IFM - foglio esercizi 07 - 16 aprile 2019

Questo foglio contiene qualche esercizio più teorico, utile per tutta la teoria svolta fin'ora.

Esercizio 1. • Sottospazi chiusi

Sia V un sottospazio finito dimensionale di uno spazio di Hilbert. Mostra che V è chiuso.

Sia V un sottoinsieme chiuso di H e A un operatore limitato invertibile (e dunque con inverso continuo). Mostra che $AV = \{Av : v \in V\}$ è chiuso.
Nota che non è vero se A non è invertibile: mostra che l'operatore M_h, con $h = 1/(1+x)$, da $L^2((0, +\infty)$ in sé non è invertibile, e ha immagine densa in L^2, dunque mappa un chiuso, tutto L^2, in un sottospazio non chiuso.

Siano V_1 e V_2 due sottospazi chiusi ortogonali. Si provi che $V_1 \oplus V_2$ è chiuso.

Esercizio 2. Proiettori

Dimostra che se P è un operatore limitato e autoaggiunto, e $P^2 = P$, allora è un proiettore.

Suggerimento: mostra che $\mathrm{Range}\, P$ è chiuso (usando $P^2 = P$) e che è ortogonale al $\mathrm{Ker}\, P$ (per autoaggiunzione). Decomponi lo spazio e mostra che P agisce come il proiettore su $\mathrm{Range}\, P$.

Costruisci in esempio di operatore P tale che $P^2 = P$, ma non è autoaggiunto. Suggerimento: lavora in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 3. Ancora proiettori

In $L^2(\mathbb{R})$, mostra che gli operatori di moliplicazione M_h sono proiettori se e solo se h è la funzione caratteristica di un misurabile di $\mathbb{R}$.

Esercizio 4. *bullet* Proiettori e Fourier

Dato $m \in \mathbb{R}$, mostra che in $L^2(\mathbb{R})$ l'operatore che a f associa la funzione

$$E_m f(x) = \int_{-\infty}^{m} \mathrm{d}\lambda \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} \hat{f}(\lambda)$$

è un proiettore.
Suggerimento:

$$E_m f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} \hat{f}(\lambda) \mathcal{X}\{\lambda < m\}$$

e l'operatore di moltiplicazione per una funione caratteristica è un proiettore.

Esercizio 5. Autovettori di $a \otimes b$

Siano $a, b \in H$ non nulli, trova autovalori e autovettori di $a \otimes b$, trova anche autovettori e autovalori dell'aggiunto, mostrando che gli autovalori sono gli stessi (ma in generale non gli autovettori).

Esercizio 6. Operatore di shift su $\ell_2(\mathbb{Z})$

Sia S definito da

$$(S\hat{x})_k = x_{k-1}$$

(è lo shift a destra). Prova che è unitario (cioè che il suo inverso è l'aggiunto).

Esercizio 7.

Considera i seguenti insiemi in $\ell_2(\mathbb{N})$:

$$B_1 = \{\hat{f} \in \ell_2 : \ |\hat{f}_k| \leq 1/|k+1|^2 \ \forall k\}$$

$$B_2 = \{\hat{f} \in \ell_2 : \ |\hat{f}_k| \leq 1/\sqrt{|k+1|} \ \forall k\}$$

$$B_3 = B_2 \cap \{\hat{f} \in \ell_2 : \ \|f\| \leq 1\}$$

Discuti la loro compattezza.
Sia a_k una successione positiva monotona crescente e divergente. Discuti la compattezza dell'insieme

$$B_a = \{\hat{f} \in \ell_2 : \ |\hat{f}_k| \leq 1/a_k \ \forall k\}$$

(riadattamento di esercizio preso dalle dispense di Pulvirenti)

Esercizio 8. teorico

Sia T un funzionale **coercivo**, cioè esiste c tale che

$$c\|x\| \leq \|Tx\|$$

Prova che:

- T è iniettivo
- $\mathrm{Range}\, T$ è chiuso.
- T non è compatto (ovviamente se la dimensione dello spazio è infinita)
- se T è anche autoaggiunto allora T è invertibile.