IFM - foglio esercizi 06 - 9 aprile 2019

Questo foglio di esercizi riguarda le basi in spazi L^2, le famiglie di polinomi ortogonali, i corrispondenti problemi di Sturm-Liouville, l'inizio della teoria degli operatori.

Esercizio 1. Funzioni pari e dispari

Ogni funzione f definita in $\mathbb{R}$ o in un intervallo simmetrico $[-L, L]$, si decompone in una funzione pari e una dispari:

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

Usa questo fatto per provare che $M_p =$ sottospazio di L^2 delle funzioni pari, e $M_d =$ sottospazio in L^2 delle funzioni dispari, danno L^2 come somma diretta.

Esercizio 2. Basi di seni e coseni in $L^2((0, \pi))$

Mostra che $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx)\right\}$ è una base in $L^2((0, \pi))$.
Suggerimento:

- verifica che sono ortonormali
- $\{1, \sin(kx), \cos(kx) | \, k \geq 1\}$ è un sistema ortonormale completo in $L^2((-\pi, \pi))$;
- le funzioni dispari si sviluppano in soli seni
- ogni funzione di $L^2((0, \pi))$ si prolunga ad una funzione dispari in $L^2((-\pi, \pi))$
- ...

Scrivi lo sviluppo di 1 rispetto alla base trovata.

La convergenza può essere uniforme in $[0, \pi]$?

Mostra che anche $\{\cos(kx)\}_{k\in\mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale completo.

Esercizio 3. Basi di polinomi in $L^2((0, 1))$

Procedendo come nell'esercizio precedente, prova che in $L^2((0, 1))$ esiste una base di polinomi pari e una base di polinomi dispari, utilizzando i polinomi di Legendre.

Esercizio 4. * Un'osservazione sulle funzioni generalizzate di Legendre

Le funzioni generalizzate di Legendre $G_{n,2}$, con $n \geq 2$, sono polinomi di grado n, in cui compare il fattore $(1 - x^2)$ a moltiplicare, e sono un sistema ortonormale completo di $L^2((-1, 1))$. Questo implica che 1 è esprimibile come una serie di polinomi pari di grado maggiore o uguale a 2, con convergenza in L^2.
Invece di costruire questa serie convergente, limitiamoci a mostrare che 1 è nello span di $(1 - x^2)x^k$, con $k \in \mathbb{N}$. Espandendo in serie

$$\frac{1}{1 - x^2} = \sum_{k\in\mathbb{N}} x^{2k}, \quad \text{da cui } 1 = (1 - x^2)\sum_{k\in\mathbb{N}} x^{2k}$$

La convergenza della serie è uniforme nei compatti di $(-1, 1)$. Mostra che la convergenza è in L^2.

Definendo $y^2 = 1 - x^2$, l'uguaglianza precedente diventa

$$1 = y^2 \sum_{k\in\mathbb{N}} (1 - y^2)^k$$

con convergenza uniforme nei compatti di $(-1,1)\backslash\{0\}$. Mostra che anche in questo caso la convergenza è in L^2.

Esercizio 5. *• Basi di polinomi di grado elevato

La chiusura di $\text{span}\{x^{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ è il sottospazio M_p delle funzioni pari in $L^2((-1,1))$. Usando l'esercizio precedente, mostra che

- $\text{span}\{x^{2k}\}_{k\geq 1}$ è denso in M_p
- per ogni $m \geq 0$, $\text{span}\{x^{2k}\}_{k\geq m}$ è denso in M_p
- togliendo un numero finito di elementi di $\{x^{2k}\}_{k\geq 1}$ si ottiene un sottoinsieme che ha span denso in M_p
- che succede se togli un numero infinito di elementi, ma lasciandone un numero infinito? (Non ricordo cosa ho pensato quando ho scritto questa parte temo troppo difficile dell'esercizio. Cito però il seguente teorema di Müntz: in $\mathbf{C}^[a,b]$, con $a > 0$, lo span di $\{x^{\lambda_i}\}_i \in \mathbb{N}$ con $\lambda_i \geq 0$, è denso se e solo se $\sum 1/\lambda_i = +\infty$, da cui segue la densità in $L^2[0,b]$)

Attenzione: se levate un vettore da una base ortonormale non ottenete un sistema a span denso: evidentemente non potete ricostruire 1 usando $\cos(kx)$ con $k \geq 1$, perchè sono tutte funzioni ortogonali a 1.

Esercizio 6. Sistemi ortogonali completi in $\ell_2(\mathbb{N})$

Sia

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= (1100\dots)\\ \mathbf{v}_2 &= (10100\dots)\\ \mathbf{v}_3 &= (100100\dots)\\ \mathbf{v}_4 &= (1000100\dots)\end{aligned}$$

Mostra che $\mathbf{e}_0 = (100\dots)$ è nello span di $\{\mathbf{v}_k\}_{k\geq 1}$.
Suggerimento: sia V_n lo span di $\{\mathbf{v}_k\}_{k\geq 1}$. Trova la proiezione $P_n\mathbf{e}_0$ di $\mathbf{e}_0$ su V_n, minimizzando $\|\mathbf{e}_0 - \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{v}_k\|^2$, e mostra che nel limite $n \to +\infty$

$$\|P_n\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_0\| \to 0$$

Esercizio 7. *• Regolarità e sommabilità

Se una funzione periodica f è di classe C^1, la sua serie di Fourier converge uniformemente, perché i suoi coefficienti di Fourier $\hat{f}_k$ decadono come $1/k$, che è quadrato-sommabile. Infatti $\hat{f}'_k = \mathrm{i}k\hat{f}_k$.
Sia ora f una funzione C_0^1 in $\mathbb{R}$, e considera il suo sviluppo nella base data dai polinomi di Hermite. Mostra che anche in questo caso i coefficienti decadono come $1/n$ (devi usare la relazione tra H'_n e H_{n-1}.

Esercizio 8. Identità di polarizzazione

Mostra che in uno spazio di Hilber su $\mathbb{C}$ vale

$$(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 - \mathrm{i}\|\mathbf{u}+\mathrm{i}\mathbf{v}\|^2 + \mathrm{i}\|\mathbf{u}-\mathrm{i}\mathbf{v}\|^2\right)$$

Trova l'analoga espressione nel caso reale.
Usa questa identità per provare che se H e H_1 sono due spazi di Hilbert e se $F : H \to H_1$ è linerare e conserva la norma, allora F conserva il prodotto scalare.

Esercizio 9. Operatori simmetrici
Un operatore A definito in $\mathcal{D}(A)$, sottospazio denso di H, è **simmetrico** se $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{D}(A)$ vale

$$(\mathbf{u}, A\mathbf{v}) = (A\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

Assegnata $\tau(x)$ regolare, considera il $L^2((a,b))$ l'operatore del II ordine

$$Af = (\tau f')'$$

che ricorre spesso nei problemi di Sturm-Liuoville. Mostra che è simmetrico sul dominio delle funzioni $\mathbf{C}_\mathbf{0}^\infty$.

Mostra che non è simmetrico sul dominio delle funzioni $\mathbf{C}^\infty$.

Considera ora

$$Bf = (\tau f)''$$

definito su $\mathbf{C}_\mathbf{0}^\infty$. Trova w tale che B è simmetrico in L^2_w

Esercizio 10. Operatore impulso
In meccanica quantistica l'operatore illimitato $\mathrm{i}\,\partial_x$ è detto operatore impulso. Prova che è simmetrico nel dominio $\mathbf{C}_\mathbf{0}^\infty([0,\pi])$, ma non lo è in $\mathbf{C}^\infty([0,\pi])$.
Prova che è illimitato, costruendo una successione di funzioni f_k di norma 1 su cui la norma di $\mathrm{i}\,\partial_x f_k$ è divergente.

Esercizio 11. Operatori integrali
Per quali $\alpha > 0$ l'operatore

$$K_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|^\alpha + |y|^\alpha + 1} f(y)\,\mathrm{d}y$$

ha nucleo in $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$?
Per quali α l'operatore K_α è limitato?

Esercizio 12. • Operatori di moltiplicazione in L^2
Sia φ una funzione continua e limitata in $\bar{\Omega}$. Allora

$$M_\varphi f \to \varphi f$$

definito su $L^2(\Omega;\mathbb{R})$ è un operatore limitato infatti

$$\|M_\varphi f\|^2 \le \|\varphi\|_\infty \|f\|_2^2$$

Mostra che $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$.
Suggerimento: sia $\mathbf{x}_k$ una successione di Ω tale che $|\varphi(\mathbf{x}_k)| \to \|\varphi\|_\infty$. Sia g_ε^k una δ-approssimante positiva in x_k, cioè una funzione in $L^1(\Omega)$ che tende alla $\delta(x - x_k)$ per $\varepsilon \to 0$. Sia $f_\varepsilon^k = \sqrt{g_\varepsilon^k}$. Mostra che $f_\varepsilon^k \in L^2(\Omega)$ e che

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|M_\varphi f_\varepsilon^k\| = |\varphi(x_k)|$$

Deducine che $\|M_\varphi\| \ge |\varphi(x_k)|$ e che quindi $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$.

Sia ora φ misurabile e limitata da Ω in $\mathbb{R}$. Anche in questo caso mostra che $\|M_h\| = \|\phi\|_\infty$.
Suggerimento: sia $A_\varepsilon \subset \Omega$ un insieme di misura positiva ma finita su cui $|\varphi(\mathbf{x})| \ge \|\varphi\|_\infty - \varepsilon$ (perché esiste?). Definisci $f_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathcal{X}\{\mathbf{x} \in A_\varepsilon\}$. Stima $\|M_\varphi f_\varepsilon\|$ e concludi la prova.

Esercizio 13. Operatori di moltiplicazione in L^2
Con riferimento al testo precedente, mostra che esiste $f \in L^2(\Omega)$ tale che

$$\|M_\varphi f\| = \|\varphi\|_\infty \|f\|$$

se e solo se esiste un insieme di misura positiva su cui $|\varphi|$ coincide con la sua norma ∞.

Esercizio 14. Operatori di moltiplicazione in ℓ_2
Sia data $\hat{\mathbf{z}} = \{z_k\}_{k=0}^{+\infty}$. Sia $M_{\mathbf{z}}$ l'operatore da $\ell_2(\mathbb{N};\mathbb{R})$ in se che a $\hat{\mathbf{x}}$ associa

$$(M_{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{x}})(k) = z_k x_k$$

Mosta che

$$\|M_{\mathbf{z}}\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |z_k|$$

Esercizio 15. Norma di un operatore di convoluzione
Se $g \in L^1$, l'operatore di convoluzione

$$f \to \int_{\mathbb{R}} g(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y$$

è continuo e ha norma stimata da $\|g\|_1$.
Prova che in Fourier questo operatore è l'operatore di moltiplicazione per $\sqrt{2\pi}\hat{g}(\lambda)$, e dunque la sua norma è

$$\sqrt{2\pi}\|\hat{g}\|_\infty$$

Prova che questa norma è $\leq \|g\|_1$.
Osserva che un operatore integrale di convoluzione è limitato se il nucleo di convoluzione ha trasformata di Fourier limitata, e questo vale anche se il nuclo non è in L^1.

Esercizio 16. * Convoluzioni con nuclei $\notin L^1$
Come visto nell'esercizio precedente, un operatore di convoluzione può essere continuo anche se il nucleo non è in L^1 (ma necessariamente la definzione passerà per il teorema di prolungamento). Vediamo un esempio
Sia $g(x) = \sin x/x$. Nota che è una funzione di L^2, e trova la sua trasformata di Fourier ricordando che

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\alpha x)}{x} = \pi \mathrm{sign}\,(\alpha)$$

(l'integrale va inteso nel senso del valore principale). Osserva che $\hat{g}(\lambda)$ è proporzionale alla funzione caratteristica dell'intervallo $[-1,1]$. Mostra che l'operatore

$$Kf(x) = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin(x-y)}{x-y} f(y)\,\mathrm{d}y$$

è ben definito su $\mathbf{S}_\infty$, è continuo in L^2, e quindi è prolungabile ad un operatore su L^2, che ha l'espressione integrale, nel senso del valore principale,

$$Kf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x-y)}{x-y} f(y)\,\mathrm{d}y,$$

ma il nucleo non è in L^1.