IFM - foglio esercizi 05 - 25 marzo

Esercizi riassuntivi di Meccania hamiltoniana
Gli esercizi con * sono un po' più complessi o inusuali, affrontateli per ultimi.

Esercizio 1. * Gruppi di trasformazioni

Considera $\mathbb{R}^4$ descritto dalle coordinate $\mathbf{z} = (q_1, q_2, p_1, p_2)$ con q_i, p_i coordiante e impulsi coniugati. Sia

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice simplettica fondamentale, con I matrice identità in $\mathbb{R}^2$, e 0 matrice nulla in $\mathbb{R}^2$.
Considera i due seguenti gruppi linari a un parametro di trasformazioni

$$A^s(q_1, q_2, p_1, p_2) = (q_1, q_2, p_1 \cos s + p_2 \sin s, -p_1 \sin s + p_2 \cos s)$$

$$B^s(q_1, q_2, p_1, p_2) = (q_1 \cos s + p_1 \sin s, q_2, -q_1 \sin s + p_1 \cos s, p_2)$$

A^s è la rotazione di angolo s in verso orario nel piano (p_1, p_2).
B^s è la rotazione di angolo s in verso orario nel piano (q_1, p_1).
Mostra che l'hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2)$$

è invariante per entrambi i gruppi.

Scrivi i campi che generano i gruppi, cioè determina

$$\mathbf{u}_A(\mathbf{z}) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} A^s(\mathbf{z})$$

$$\mathbf{u}_B(\mathbf{z}) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} B^s(\mathbf{z})$$

Mostra che $\mathbf{u}_B$ è un campo hamiltoniano e determina l'hamiltoniana.
Mostra che $\mathbf{u}_A$ non è un campo hamiltoniano.

Trova due integrali primi indipendenti in involuzione per il sistema di hamiltoniana H.

Esercizio 2.

Si consideri la lagrangiana

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \frac{\dot{y}^2}{x^2} - x^2(y^2 - 1)\right)$$

a. Scrivi la corrispondente hamiltoniana.

b. Trova due integrali primi del moto indipendenti e in involuzione mediante il metodo di Hamilton-Jacobi.

c. Attraverso gli integrali primi trovati, determina la regione dello spazio delle fasi in cui il moto è quasi periodico.

d. In questa regione, determina le variabili d'azione, e scrivi l'hamiltoniana nelle nuove variabili.

e. Calcola le frequenze dei moti quasi periodici e trova le condizioni di periodicità del moto.

Esercizio 3.

Un punto materiale è libero di muoversi senza attrito su una superficie sferica di raggio 1. Indicando con $\vartheta \in [0, \pi]$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$ le usuali coordinate sulla superficie sferica, tali che

$$\mathbf{x} = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$$

la lagrangiana del sistema è data da

$$L = \frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}\sin\vartheta^2\dot{\varphi}^2.$$

a. Scrivi la corrispondente hamiltoniana.

b. Risolvi l'equazione caratteristica di Hamilton-Jacobi per separazione di varabili, trovando due integrali primi del moto indipendenti e in involuzione.

c. Porta il moto alle quadrature.

d. Attraverso gli integrali primi trovati, determina la regione dello spazio delle fasi in cui puoi dire che il moto è quasi periodico.

e. Usa gli integrali primi trovati e le equazioni di Hamilton per determinare il moto di dato iniziale $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$, $\vartheta = \pi/2$, $\dot{\vartheta} = -1$

f. (*) Sia

$$Z = \cos\varphi P_\vartheta - \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\sin\varphi P_\varphi$$

dove P_ϑ e P_φ sono i momenti coniugati a ϑ e φ.

Mostra che Z è un ulteriore integrale primo del moto, calcolando $\{H, Z\}$.

Esercizio 4. * Moto centrale con forza costante

La lagrangiana per un punto materiale nel piano xy soggetto a una forza kepleriana e a una spinta costante nella direzione dell'asse x è data da

$$L(a, b, \dot{a}, \dot{b}) = \frac{a+b}{2}\left(\frac{\dot{a}^2}{a} + \frac{\dot{b}^2}{b}\right) - \frac{4 + a^2 - b^2}{2(a+b)}$$

dove a e b sono le **coordinate paraboliche**

$$a = \sqrt{x^2 + y^2} + x, \quad b = \sqrt{x^2 + y^2} - x.$$

Si noti che $a \geq 0$ e $b \geq 0$, e che il cambiamento di coordinate $(x, y) \mapsto (a, b)$ non è biunivoco e non è regolare in $y = 0$.

a. Scrivi l'hamiltoniana del sistema in a, b, P_a, P_b.

b. Considera la funzione generatrice

$$F(r, \theta, P_a, P_b) = -r(1 + \cos\theta)P_a - r(1 - \cos\theta)P_b$$

Trova P_r e P_θ in funzione dei vecchi impulsi P_a, P_b, e delle nuove coordinate r e θ.

c. Mostra che l'equazione caratteristica di Hamilton-Jacobi è risolubile per separazione di variabili, scegliendo come nuovi impulsi l'energia e un altro opportuno integrale primo.

Suggerimento: per trovare l'ulteriore integrale primo scrivi l'equazione caratteristica di Hamilton-Jacobi e moltiplicala per $2(a + b)$, e ricorda che H è un integrale primo del moto.

d. Determina i valori degli integrali primi trovati tali che le variabili a e b rimangano limitate.

Esercizio 5.

Il moto di sistema meccanico in due variabili, $x \in \mathbb{R}$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$ periodica, è governato dalla lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(\dot{\varphi} + x)^2 - \gamma x^2/2$$

dove $\gamma \in \mathbb{R}$ è un parametro reale.

a. Scrivi l'hamiltoniana del sistema (nota che l'energia cinetica ha un termine lineare).

b. Risolvi l'equazione caratteristica di Hamilton-Jacobi per separazione di variabili, trovando due integrali primi indipendenti.

c. Determina, al variare di γ, la regione dello spazio delle fasi in cui il moto è quasi periodico.

d. Determina le frequenze dei moti quasi periodici.

Esercizio 6.

Sia data l'hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}P_\varphi^2 + (P_x^2 + x^2)\cos\varphi$$

dove φ è una variabile periodica.

a. Risolvi per separazione di variabile l'equazione caratteristica di HJ, individuando due integrali primi del moto.

b. Determina la regione dello spazio delle fai in cui il moto è quasi-periodico.