IFM - foglio esercizi 04 - 21 marzo

Hamilton-Jacobi e variabili azione-angolo

Esercizio 1. Moto piano in un campo di dipolo

In $\mathbb{R}^3$, il potenziale di dipolo, con il dipolo orientato lungo il versore $\mathbf{n}$, è, a meno di costanti,

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{1}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}$$

Si noti che questo potenziale decade come $1/|\mathbf{x}|^2$, più rapidamente del potenziale coulombiano.

Nel caso $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$, versore dell'asse orizzontale, considera i moti ristretti al piano (x_1, x_2).

- Scrivi la lagrangiana per una particella di massa unitaria
- Scrivi la lagrangiana in coordinate polari
- Scrivi la corrispondente hamiltoniana
- Porta il moto alle quadrature risolvendo l'equazione di HJ, individuando gli opportuni integrali primi
- Discuti qualitativamente il moto al variare del valore degli integrali primi.

Esercizio 2. Moto in un campo di dipolo

Sia

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{1}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_3$$

dove $\mathbf{e}_3$ è il versore dell'asse verticale.
Scrivi la lagrangiana in coordinate sferiche, scrivi la corrispondente hamiltoniana e discuti l'integrabilità del moto.

Esercizio 3.

Considera l'hamiltoniana: $H = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}x^2(p_\phi^2 - \cos\phi)$.

a) Risolvi l'equazione di H.J. per separazione di varibili, e riduci il moto alle quadrature, cercando $W = A(x,\alpha,\beta) + B(\phi,\alpha,\beta)$ (α,β saranno i nuovi impulsi)

b) Determina la regione dello spazio delle fasi un cui il moto si può descrivere in variabili azione-angolo.

c) In questa regione scrivi dai un'espressione (anche implicia) per le frequenze dei moti quasi periodici.

(soluzione su `http://brazil.mat.uniroma1.it/dario/meccanica/esercizi4.pdf` a pagina 11)

Esercizio 4.

Considera l'Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2}P_x^2 + \frac{1}{2}P_y^2(1+x^2) + \frac{1}{2}(1+x^2)y^2.$$

a) Risolvi, per separazione di variabili, l'equazione di Hamilton Jacobi per H.

b) Determina la regione dello spazio delle fasi in cui il moto può essere descritto in variabili azione-angolo.

c) Calcola esplicitamente l'espressione dell'Hamiltoniana in termini delle variabili d'azione, e le frequenze dei moti multiperiodici.

d) Considera il moto di dato iniziale

$$\begin{array}{ll} x(0) = 0 & y(0) = 0 \\ P_x(0) = a & P_y(0) = 1, \end{array}$$

con $a \in \mathbb{R}$; trova i valori di a per cui è periodico.

e) Trova il periodo del moto per $a = 1$.

f) Discuti la stabilità della soluzione stazionaria

$$\begin{array}{ll} x(0) = 0 & y(0) = 0 \\ P_x(0) = 0 & P_y(0) = 0. \end{array}$$

trovando la soluzione dell'equazione del moto.

(soluzione su `http://brazil.mat.uniroma1.it/dario/meccanica/esercizi4.pdf` a pagina 11)

Esercizio 5. Vortici

Il moto di una particella di fluido nel campo generato da un vortice piano posto nell'origine è un moto hamiltoniano di hamiltoniana (a meno di costanti)

$$H(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

(si noti che pur essendo (x, y) coordinate nel piano, nell'hamiltoniana y gioca il ruolo di impulso). Si determini la variabile di azione per il moto, e il periodo del moto di energia E.

Esercizio 6.

Un punto materiale di massa unitaria si muove nel piano soggetto ad una forza attrattiva, di energia potenziale $-1/|\mathbf{x}| = -1/r$, e ad una forza di dipolo di energia potenziale $-x_2/|\mathbf{x}|^3 = -(\sin\phi)/r^2$, dove $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = r(\cos\phi, \sin\phi)$.

a. Scrivi la lagrangiana in coordinate polari, e scrivi la corrispondente hamiltoniana.

b. Mostra che l'equazione caratteristica di Hamilton-Jacobi è risolubile per separazione di variabili, individuando due integrali primi del moto.

c. Usando i due integrali primi trovati, determina la regione nello spazio delle fasi in cui il moto è quasi-periodico.

Esercizio 7.

Un punto materiale di massa unitaria si muove nel piano soggetto ad una forza repulsiva, di energia potenziale $1/|\mathbf{x}|^3 = 1/r^3$, e ad una forza di dipolo di enegia potenziale $x_1/|\mathbf{x}|^3 = (\cos\phi)/r^2$, dove $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = r(\cos\phi, \sin\phi)$.

a. Scrivi la lagrangiana in coordinate polari, e scrivi la corrispondente hamiltoniana.

b. Mostra che l'equazione caratteristica di Hamilton-Jacobi è risolubile per separazione di variabili, individuando due integrali primi del moto.

c. Usando i due integrali primi trovati, determina la regione nello spazio delle fasi in cui il moto è quasi-periodico.