IFM - foglio esercizi 03 - 14 marzo

Parentesi di Poisson

Esercizio 1. Il vettore di Laplace-Runge-Lenz

Siano $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, sia $\boldsymbol{\ell} = \mathbf{q} \wedge \mathbf{p}$ il vettore momento della quantità di moto, e sia

$$\mathbf{a} = \mathbf{p} \wedge \boldsymbol{\ell} - \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}$$

Si mostri che per ogni i

$$\{a_i, \ell_j\} = \varepsilon_{i,j,k} \ell k$$

dove si sottointende la somma sull'indice ripetuto (notazione di Einstein).

Sia $H = \frac{1}{2}\mathbf{p}^2 - \frac{1}{|\mathbf{q}|}$ l'hamiltoniana per i moti centrali kepleriani in dimensione $\mathbb{R}^3$. Mostra che

$$\{a_i, H\} = 0$$

e che

$$\{a_i, a_j\} = -2H\varepsilon_{i,j,k}\ell_k$$

Esercizio 2.

Data H, due osservabili f e g (cioè due funzioni dallo spazio delle fasi in $\mathbb{R}$), una funzione F una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ e una funzione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$.
Mostra che

$$\{F(f), H\} = F'(f)\{f, H\}$$
$$\{A(f, g)), H\} = \partial_f A(f, g)\{f, H\} + \partial_g A(f, g)\{g, H\}$$

Deduci da queste proprità che le funzioni di più integrali primi sono integrali primi, e le funzioni di osservabili in involuzione sono in involuzione.

Esercizio 3. Ancora sul vettore LRL

Con le notazioni del primo esercizio, sia $\mathbf{d} = \mathbf{a}/\sqrt{2|H|}$. Supponi di restringerti agli aperti dello spazio delle fasi in cui H ha segno costante (e dunque $\mathbf{d}$ è una funzione regolare)

Usando i risultati degli esercizi precedenti, e la formula di Leibnitz, mostra che

$$\{d_i, H\} = 0$$
$$\{d_i, \ell_j\} = \varepsilon_{i,j,k}\ell_k$$
$$\{d_i, d_j\} = \mathrm{sign}(H)\, \varepsilon_{i,j,k}\ell_k$$

(Ripeto, non lo fare a mano, ma uso quallo che già sai).

(Come conseguenza, nella regione in cui H è negativa, l'algebra di Lie generata dalle funzioni ℓ_i e d_i, cioè lo spazio vettoriale generato dotato delle parentesi di Poisson come prodotto interno, è isomorfa all'algebra di Lie di $SO(4)$, quindi il moto è invariante per "rotazioni" in $\mathbb{R}^4$).

Funzioni generatrici

Esercizio 4.

Considera la seguente famiglia di trasformazioni, che dipendono dai parametri a e b.

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{p}e^{aq} \\ P &= -p^b e^q; \end{aligned}$$

Determina i valori dei parametri a e b per cui esiste una funzione $F = F(q, Q)$ che la genera. In tal modo trovi i valori dei parametri per cui la trasformazione è simplettica.

Esercizio 5.

Risolvere le equazioni di Hamilton per l'hamiltoniana $H = -\frac{pq}{2t}\log\left(\frac{p}{2q}\right)$, utilizzando la trasformazione canonica generata da $F(q, Q, t) = q^2 e^{Qt}$.

Esercizio 6.

Trovare *tutte* le relazioni che definiscono una trasfomazione canonica, assegnata una funzione di qualunque combinazione delle variabili; quante sono per un sistema a n gradi di libertà? Per esmpio, usa come variabili indipendenti (q, P), (P, q), (p, P), e, a due gradi di libertà (q_1, P_1, p_2, Q_2).

Esercizio 7.

Determinare una trasformazione canonica tra quelle generate da $F = \alpha q^a Q^b$, che trasformi l'hamiltoniana $H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q^2} + p^2 q^4\right)$ nell'hamiltoniana di un oscillatore armonico.

Esercizio 8.

Studiare il moto del sistema di Hamiltoniana

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{1}{2m}(p_2 - kq_1)^2,$$

mediante la trasformazione canonica generata da $F = kq_1 Q_2 - p_2 Q_2 + p_2 P_1$.

Esercizio 9.

Determinare il moto del sistema di Lagrangiana

$$L = q\dot{q}^2, \tag{1}$$

passando all'hamiltoniana e utilizzando la trasformazione canonica generata da $F(p, Q) = -\frac{p^3}{12Q}$.

Esercizio 10.

Considera la trasformazione

$$\begin{aligned} q &= \tilde{q}/(1 + \tilde{p}^2) \\ p &= \tilde{p} + f(\tilde{p}) \end{aligned}$$

a. Determina $f(\tilde{p})$ tale che la trasformazione sia simplettica.

b. Trova la funzione generatrice $S(q, \tilde{p})$ che genera la trasformazione.