IFM - foglio esercizi 03 bis - 14 marzo

Versione corretta degli esercizi 1 e 3 della scheda 3. Per gli esercizi dal 4 in poi fate riferimento al file precedente, di cui purtroppo ho cancellato il sorgente.

Esercizio 1. Il vettore di Laplace-Runge-Lenz

Siano $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, posizione e impulso, e sia $\boldsymbol{\ell} = \mathbf{q} \wedge \mathbf{p}$ il vettore momento della quantità di moto. Il vettore di Lapalce-Runge-Lenz è

$$\mathbf{a} = \mathbf{p} \wedge \boldsymbol{\ell} - \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}$$

Si mostri che

$$\{a_i, \ell_j\} = \varepsilon_{ijk} a_k$$

dove si sottointende la somma sugli indici ripetuti (notazione di Einstein).
Il conto è decisamente lungo, provo a dare qualche suggerimento per una strada possibile. (l'altra è mostrare che $\{a_1, \ell_1\} = 0$, e che $\{a_1, \ell_2\} = a_3$, e poi invocare la simmetria per permuazioni cicliche degli indici, ma non è una strada particolarmente più corta).

- Prova che $\{q_i, \ell_j\} = \varepsilon_{ijk} q_k$, e che $\{p_i, \ell_j\} = \varepsilon_{ijk} p_k$.
- Ricorda che
$$\mathbf{p} \wedge \boldsymbol{\ell} = \mathbf{p} \wedge (\mathbf{q} \wedge \mathbf{p}) = |\mathbf{p}|^2 \mathbf{q} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})\mathbf{p}$$
Dunque l'$i-$esima componente è
$$p_k p_k q_i - q_k p_k p_i$$
(sottointendendo la somma sugli indici ripetuti).
- Mostra che
$$\{p_k q_k q_i, \ell_j\} = p_k p_k \{q_i, \ell_j\} = \varepsilon_{ijk} |\mathbf{p}|^2 q_k$$
mentre gli altri termini che si ottengono dalla formula di Leibniz sono nulli.
- Mostra che
$$\{p_k q_k p_i, \ell_j\} = p_k q_k \{p_i, \ell_j\} = \varepsilon_{ijk} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) p_k$$
mentre gli altri termini che si ottengono dalla formula di Leibniz sono nulli.
- Mostra che
$$\{q_i/|\mathbf{q}|, \ell_j\} = \varepsilon_{ijk} \frac{q_k}{|\mathbf{q}|}$$
- Metti insieme i vari pezzi e concludi la prova.

Sia ora $H = \frac{1}{2}|\mathbf{p}|^2 - \frac{1}{|\mathbf{q}|}$ l'hamiltoniana del moto kepleriano in $\mathbb{R}^3$. Mostra che

$$\{a_i, H\} = 0$$

e che

$$\{a_i, a_j\} = -2H \varepsilon_{ijk} \ell_k$$

Esercizio 2.

Data H, due osservabili f e g (cioè due funzioni dallo spazio delle fasi in $\mathbb{R}$), una funzione da F da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. e una funzione A da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$. Mostra che

$$\{F(f), H\} = F'(f)\{f, H\}$$

$$\{A(f,g),H\} = \partial_f A(f,g)\{f,H\} + \partial_g A(f,g)\{g,H\}$$

Deduci da queste proprietà che le funzioni di più integrali primi sono integrali primi, e le funzioni di osservabili in involuzione sono in involuzione

Esercizio 3. Ancora sul vettore LRL

Con le notazioni del primo esercizio, sia $\mathbf{d} = \mathbf{a}/\sqrt{2|H|}$. Supponi di restringerti agli aperti dello spazio delle fasi in cui H ha segno costante (e dunque $\mathbf{d}$ è una funzione regolare).
Usando i risultati degli esercizi precedenti e la formula di Leibniz, mostra che

$$\begin{aligned}
&\{d_i, H\} = 0 \\
&\{d_i, \ell_j\} = \varepsilon_{ijk} d_k \\
&\{d_i, d_j\} = -\mathrm{sign}(H)\varepsilon_{ijk}\ell_k
\end{aligned}$$

I generatori delle rotazioni rigide in $\mathbb{R}^4$ sono in biiezione con le matrici simmetriche 4×4. Mostra che l'algebra di queste matrici rispetto al commutatore è in biiezione con l'algebra generata dalle funzioni ℓ_i e d_j. In questo senso, il moto centrale kepleriano è invariante per rotazioni rigide in $\mathbb{R}^4$.