IFM - foglio esercizi 2 - 6 marzo
Flussi, trasformazioni simplettiche

Esercizio 1.

Siano $H_1 = \mathbf{q}$ e $H_2 = \mathbf{p}$, due hamiltoniane in $\mathbf{R}^{2n}$ Determina i flussi per H_1 e H_2 e mostra che commutano.
Calcola $\{H_1, H_2\}$, e nota che non è nullo, e dunque H_2 non è un integrale primo per il moto di hamiltoniana H_1, e viceversa.

Esercizio 2.

Siano $u(x)$ e $w(x)$ due funzioni regolari non identicamente nulli, da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.
Mostra che i flussi associati commutano se e solo se esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $w(x) = cu(x)$. Mostra che se questa condizione è soddisfatta, i due flussi coincidono a meno di un riscalamento dei tempi.

Esercizio 3.

Sia α una funzione regolare da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, sia M_α l'operatore che alla funzione f associa

$$M_\alpha f(x) = \alpha(x) f(x)$$

e sia D l'operatore che a f associa la sua derivata.
Calcola il commutatore $[M_\alpha, D]$.

Esercizio 4.

Sia α una funzione regolare da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$, sia M_α l'operatore che alla funzione f associa

$$M_\alpha f(x) = \alpha(x) f(x)$$

Sia $\mathbf{u}$ un compo vettoriale in $\mathbb{R}^n$, e sia A_u l'operatore che a f associa $\operatorname{div}(\mathbf{u}\mathrm{f})$, e B_u l'operatore che a f associa $\mathbf{u} \cdot \nabla f$. Nota che $A_u = M_{\operatorname{div}\mathbf{u}} + B_u$.
Calcola i commutatori $[M_\alpha, A_u]$, $[M_\alpha, B_u]$, $[A_u, B_u]$.

Esercizio 5.

Sia $L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 - U(|\mathbf{x}|)$ la lagrangiana di un moto centrale in $\mathbb{R}^3$. Mostra che l'hamiltoniana è $H = \frac{1}{2}\mathbf{p}^2 + U(|\mathbf{x}|)$. Sia

$$\ell = \mathbf{x} \wedge \mathbf{p}$$

Mostra che

$$\{\ell_i, \ell_j\} = \sum_k \varepsilon_{i,j,k} \ell_k$$

dove $\varepsilon_{i,j,k}$ vale 1 se i, j, k è una permutazione pari di $1, 2, 3$, vale -1 se è una permutazione dispari, e vale 0 altrimenti (cioè nel caso in cui ci siano indici ripetuti).
Il vettore ℓ è il momento della quantità di moto. Mostra che si conserva, calcolando $\{\ell_i, H\}$. Infine, sia ℓ^2 il modulo quadro di $\boldsymbol{\ell}$, mostra che

$$\{\ell^2, H\} = 0, \quad \{\ell^2, \ell_i\} = 0$$

Esercizio 6.

Considera la trasformazione

$$\begin{aligned} Q &= 2a \log p + \log q \\ P &= -p^b q \log q \end{aligned}$$

Trova per quali valori di a e b è simplettica. Considera l'hamiltoniana $H = \frac{1}{2}p^2q^2(\log q)^2$, e il dato iniziale $(q(0), p(0)) = (e, \frac{1}{e})$. Trova la soluzione delle equazioni del moto utilizzando la trasformazione simplettica trovata.

Esercizio 7.

Verificare la simpletticità di:

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1 q_2 \\ Q_2 &= q_1 + q_2 \\ P_1 &= \tfrac{p_1 - p_2}{q_2 - q_1} + 1 \\ P_2 &= \tfrac{q_2 p_2 - q_1 p_1}{q_2 - q_1} - (q_2 + q_1). \end{aligned}$$

Esercizio 8.

Sia f un integrale primo per il sistema di hamiltoniana H. Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione regolare. Mostra che anche $F(f)$ è un integrale primo.

Esercizio 9.

Sia $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = F(|\mathbf{q}|) + G(|\mathbf{p}|)$, con $\mathbf{q}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$. Sia $K = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{q} \wedge \mathbf{p})$, per un dato vettore $\boldsymbol{\omega}$. Mostra che K è un integrale primo per H.
Descrivi il flusso generato da K.