IFM - foglio esercizi 1 - 26 febbraio
Hamiltoniane

Esercizio 1.

a. Sia data la lagrangiana
$$L = \frac{1}{2}(1+q^2)\dot{q}^2 - \frac{1}{2}q^2$$

Trova l'energia in funzione di q e $\dot{q}$.

Trova l'impulso coniugato a q e trova l'hamiltoniana

b. Sia data la lagrangiana
$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{4}\dot{y}^2 - \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

Trova gli impulsi coniugati a x e y e trova l'hamiltoniana.

c. Sia data la lagrangiana
$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2 - \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

Trova gli impulsi coniugati a x e y e trova l'hamiltoniana.

d. Sia data la lagrangiana
$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - y\dot{x} + x\dot{y}$$

Trova l'energia generalizzata.

Trova gli impulsi coniugati a x e y e trova l'hamiltoniana.

e. (*) Sia data la lagrangiana
$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - y\dot{x} - x\dot{y}$$

Trova gli impulsi coniugati a x e y e trova l'hamiltoniana.

Scrivi le equazioni di Eulero-Lagrange per L. Riconosci che coincidono con le equazioni di Eulero-Lagrange di lagrangiana $L' = \frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$ (che è la lagrangiana del moto libero). Come mai?

Esercizio 2. Trottola pesante

La lagrangiana della trottola pesante è

$$L = \frac{I}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta) + \frac{J}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2 - mgl\cos\theta$$

dove ϑ è l'angolo che l'asse della trottola forma con la verticale ascendente, ψ è l'angolo di rotazione della trottola intorno al suo asse, φ è l'angolo di rotazione dell'asse della trottola intorno all'asse verticale. J è il momento di inerzia rispetto all'asse della trottola, I quello rispetto a un qualunque asse ortogonale all'asse della trottola.
Determina gli implusi e scrivi l'hamiltoniana. Trova tre integrali primi del moto.

(Trovi la soluzione negli appunti h18)

Esercizio 3. (*) Dall'hamiltoniana alla lagrangiana

Sia $f(\mathbf{x})$ una funzione strettamente convessa di $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Sia $f^*(\mathbf{y})$ la sua trasformata di Legendre. Mostra che f^* è convessa (ricorda che il sup di una famiglia di funzioni convesse è convessa, e che le funzioni affini sono in particolare convesse). Mostra che f^* è strettamente convessa, e che la sua trasformata di Legendre è f.

Sia data $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, e supponi che $\partial_p^2 H$ sia una matrice non singolare.
Definisci

$$\eta = \partial_p H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$$

e mostra che questa relazione può essere invertita nella variabile $\mathbf{p}$ (almeno localmente). Definisci

$$L(\mathbf{q}, \eta) = \eta \cdot \mathbf{p} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$$

(cioè L è la trasformata di Legendre di H). Mostra che H è la trasformata di Legendre di L.

Esercizio 4. Lagrangiane con termini lineari nelle velocità

Sia $L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 - V(\mathbf{x})$. Considera la trasformazione di coordinate dipendente dal tempo $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{q}, t)$. Mostra che la lagrangiana nelle nuove variabili è della forma

$$\frac{1}{2}T(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{b}(\mathbf{q}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}} - U(\mathbf{q}, t)$$

Supponi che il vettore $\mathbf{b}$ e il potenziale U non dipendano esplicitamente dal tempo. Determina l'energia generalizzata.

Scrivi l'hamiltoniana nelle variabili $\mathbf{q}$ e $\mathbf{p}$.

Esercizio 5. Particella carica

La lagrangiana per il moto di una particella di massa m e carica e, in un campo elettromagnetico di potenziale $V(\mathbf{x}, t)$ e di potenziale vettore $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ è

$$L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{x}} - eV(\mathbf{x}, t) \tag{1}$$

dove c è la velocità della luce. Verifica che le equazioni del moto sono

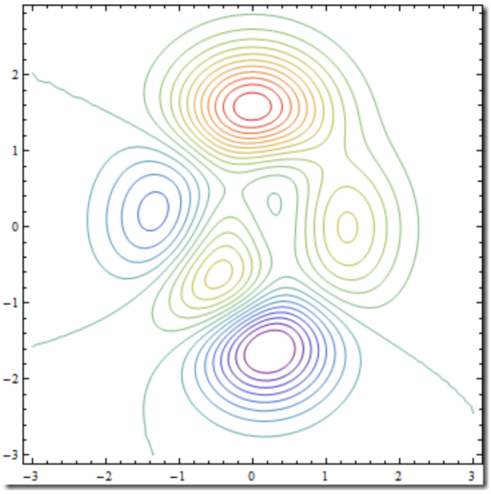
$$m\ddot{\mathbf{x}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{B}$$

dove $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ è il campo elettromagnetico $\wedge$ è il prodotto vettoriale, c è la velocità della luce, e $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$, $\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{1}{c}\,\partial_t \mathbf{A}$.

Scrivi l'hamiltoniana per il moto della particella carica.

Esercizio 6. Sistemi hamiltoniani a un grado di libertà

Supponi che la funzione $H(q, p)$ abbia le linee di livello che vedi in figura



dove i valori crescono salendo dal violetto, al blu, al verde, al giallo, al rosso.
Limitatamente alla regione rappresentata, determina i dati iniziali che danno luogo a un moto periodico. Discuti l'esistenza di soluzioni stazionarie per il sistema e la loro stabilità.

Esercizio 7. Condizione di hamiltonianità dei sistemi bidimensionali

Il sistema differenziale in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$$

è hamiltoniano se e solo se esiste H tale che $\partial_y H = f$ e $\partial_x H = -g$ (scambiare il ruolo di x e y equivale a cambiare il segno di H).
Mostrare che il sistema è hamiltoniano se e solo se il campo (f, g) ha divergenza nulla. (Questa equivalenza è vera solo in dimensione 2).

Esercizio 8. Sistema preda-predatore

Il ben noto sistema di Lotka-Volterra, che descrive i cicli delle numersità di una specie di preda e una di predatore, si può trasformare facilmente in un sistema hamiltoniano. Il sistema è

$$\begin{cases} \dot{L} = L(a - bV) \\ \dot{V} = -V(p - qL) \end{cases}$$

dove L è la numerosità delle prede (per esempio "lepri"), e V è la numerosità dei predatori (per esempio "volpi"). Riscrivi il sistema nelle variabili $\ell = \log L$ e $v = \log V$, mostra che il campo che ottieni è a divergenza nulla, determina l'hamiltoniana. Usa un qualunque software per disegnare le curve di livello dell'hamiltoniana (o disegnale qualitativamente, non è impossibile) e fai l'analisi qualitativa del moto.