

# Programma di Istituzioni di Fisica-Matematica 2017

5 giugno 2018

Come guida all'orale, qui trovate un **programma minimo** e il **programma completo**. Lo scopo di questa distinzione è preparare un percorso di studio coerente per chi di voi, per una qualche ragione, investirà meno risorse sulla preparazione di questo esame. Il **programma minimo** contiene infatti gli argomenti essenziali al raggiungimento degli obiettivi del corso. L'ampiezza del programma è in parte illusoria, vista la sovrapposizione con il programma di Istituzioni di Analisi Superiore e/o Analisi Funzionale. Una buona conoscenza degli argomenti del programma minimo garantisce il superamento dell'esame con una votazione coerente con la limitazione del programma (orientativamente 24). Al contrario, mostrare incompetenza sui punti del programma minimo, non consente di superare l'esame. Al momento dell'orale potete dichiarare se vi presentate con il programma minimo.

## Indice

<b>Testi e fonti</b>	<b>2</b>
<b>Programma minimo</b>	<b>3</b>
Spazi di Hilbert . . . . .	3
Problemi di Sturm-Liouville . . . . .	3
Operatori lineari . . . . .	4
Operatori compatti . . . . .	5
Operatori compatti . . . . .	5
Equazione di Poisson . . . . .	6
Potenziali . . . . .	6
Meccanica hamiltoniana . . . . .	7
Meccanica quantistica . . . . .	8
<b>Programma completo</b>	<b>9</b>
Spazi di Hilbert . . . . .	9
Problemi di Sturm-Liouville . . . . .	9
Operatori lineari . . . . .	10
Operatori compatti . . . . .	11
Operatori compatti . . . . .	11
Equazione di Poisson . . . . .	12
Potenziali . . . . .	12
Meccanica hamiltoniana . . . . .	13
Meccanica quantistica . . . . .	14

## Testi e fonti

Per i dettagli su ogni argomento, *vedi* il diario delle lezioni su <http://brazil.mat.uniroma1.it/dario/IFM2017/diario.txt>.

### Richiami di Fisica-Matematica

**B-FM** Buttà: Note del corso di Fisica-Matematica [http://www1.mat.uniroma1.it/~butta/didattica/note\\_FM.pdf](http://www1.mat.uniroma1.it/~butta/didattica/note_FM.pdf)

**DB-FM** Benedetto: Note aggiuntive per Fisica-Matematica 2015-2016 <http://brazil.mat.uniroma1.it/dario/FM2015//NoteAggiuntive/note15.pdf>

**S** Salsa: Equazioni alle derivate parziali

### Operatori lineari su spazi di Hilbert

**ifm17** Benedetto: Appunti del corso di IFM 2017-2018 <http://brazil.mat.uniroma1.it/dario/IFM2017/ifm17.pdf>

**P** Pulvirenti: note del corso di Istituzioni di Fisica Matematica 2015-16

**KF** Komogorov, Fomin: Elementi di teoria delle funzioni e analisi funzionale

**CH** Courant, Hilbert: Methods of Mathematical Physics

**RS** Reed, Simon: Methods of modern mathematical physics, vol I, Functional Analysis

### Meccanica hamiltoniana

**h17** Benedetto: Appunti di meccanica hamiltoniana 2017-2018 <http://brazil.mat.uniroma1.it/dario/IFM2017/h17.pdf>

**A** V. Arnold: Metodi Matematici della Meccanica Classica (Editori Riuniti - MIR)

**E** R. Esposito: Appunti dalle lezioni di meccanica razionale, Aracne 1999.

### Introduzione alla meccanica quantistica

**P** M. Pulvirenti: Equazione di Schrödinger [http://www1.mat.uniroma1.it/people/pulvirenti/didattica/mecca\\_quant.pdf](http://www1.mat.uniroma1.it/people/pulvirenti/didattica/mecca_quant.pdf)

**T** A. Teta: Appunti di Meccanica Quantistica, cap. 1-9, su <https://sites.google.com/site/sandroprova/didattica-1/appunti-ed-esercizi>

## Programma minimo

### Spazi di Hilbert [ifm17, cap. 2]

1. Spazi di Hilbert reali e complessi. Esempi  $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ ,  $L^2(\Omega, \mathbb{C})$ , con  $\Omega$  dominio di  $\mathbb{R}^n$ ,  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ ,  $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ . Spazi  $L^2$  con pesi
2. Sottospazi lineari chiusi e non. Ortogonale di un sottospazio.
3. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, identità del parallelogramma e Teorema della proiezione in spazi di Hilber complessi.
4. Sistemi ortonormali, disuguaglianza di Bessel; spazi separabili e sistemi ortonormali completi (basi), Identità di Parseval. Basi in spazi prodotto (enunciato).
5. Ortogonalizzazione di Gramm-Schmidt, esistenza di basi in spazi separabili.
6. Base di Fourier.
- 7.
- 8.

### Problemi di Sturm-Liouville [ifm17 cap. 1, 3, 4, 5]

1. Problemi di Sturm-Liouville
2. Polinomi di Legendre,
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
- 8.
- 9.

## Operatori lineari [ifm17 cap 6, 7, 8]

1. Operatori limitati e norma di un operatore, continuità e limitatezza. Estensione di operatori limitati definiti su sottospazi densi. Decomposizione di  $H$  attraverso immagine e nucleo. Esempi: isometrie e proiettori e loro norme. Isometria con  $\ell_2$  degli spazi di Hilbert separabili.
- 2.
- 3.
- 4.
5. Il duale di uno spazio di Hilbert e il teorema di rappresentazione di Riesz.
6. Operatore aggiunto e sue proprietà.
7. Operatori di moltiplicazione - condizioni di limitatezza
8. Operatori di integrali - condizioni di limitatezza
9. Operatori di convoluzione - condizioni di la loro limitatezza
10. Operatori unitari. Unitarietà della trasformata di Fourier.
- 11.

## Operatori compatti [ifm 17, cap. 9, 10, 14]

1. Operatori di rango finito. Teorema dell'alternativa per operatori di rango finito.
2. Invertibilità di piccole perturbazioni di operatori invertibili. Serie di Neumann e teoremi dell'alternativa per perturbazioni piccole di operatori di rango finito.
2. Esempi di precompatti in spazi di Hilbert. Convergenza debole di successioni, esempi e proprietà. Precompattanza debole dei limitati in  $H$  separabile (enunciati).
3. Convergenza debole e forte di operatori.
4. Operatori compatti.
5. Teorema dell'alternativa per operatori compatti
6. Risolvente e spettro per operatori.
7. Proprietà del risolvente.
8. Teorema spettrale per operatori compatti autoaggiunti.
- 9.
- 10.

## Operatori illimitati [ifm17 cap. 11]

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.

### Equazione di Poisson [ifm17 cap. 12]

1. Gli spazi di Sobolev  $H^1(\Omega)$  e  $H_0^1(\Omega)$ , richiami sulla disuguaglianza di Poincaré.
2. La soluzione debole in  $H_0^1(\Omega)$  dell'equazione di Poisson. Simmetria dell'operatore che esprime la soluzione.
3. Autoaggiuntezza e compattezza dell'inverso del laplaciano. Autovalori del laplaciano.
- 4.
- 5.
- 6.

### Potenziali di volume, strato singolo e di doppio strato [ifm17 cap. 14]

1. Funzione di Green per il problema di Poisson, potenziale di volume. Andamento asintotico. Campo di Dipolo.
2. La terza identità di Green e i potenziali di singolo e doppio strato
3. Discontinuità del potenziale di doppio strato e Lemma di Gauss.
4. Discontinuità della derivata normale del potenziale di singolo strato
5. Esistenza e unicità per il problema di Laplace-Dirichlet nei limitati semplicemente connessi in termini di potenziale di doppio strato.
6. Unicità per problema di Laplace-Neumann esterno.
- 7.
- 8.
- 9.

## Meccanica hamiltoniana [h17]

1. Richiami sulle lagrangiane. Impulsi. L'hamiltoniana e le equazioni di Hamilton.
2. Esempi, il moto centrale piano.
3. Le variabili cicliche nei sistemi hamiltoniani.
4. Trasformazioni canoniche. Trasformazioni simplettiche. Matrici simplettiche.
5. Parentesi di Poisson e loro invarianza per trasformazioni simplettiche.
6. Le regole di commutazione canonica.
7. Parentesi di Poisson e integrali primi.
8. Proprietà delle parentesi di Poisson.
- 9.
- 10.
- 11.
12. Condizione di simpletticità attraverso la forma  $p dq - P dQ$ .
13. Trasformazioni simplettiche dipendenti dal tempo.
14. Funzioni generatrici.
15. Equazione di Hamilton-Jacobi.
- 16.
17. Sistemi integrabili. Teorema di Liouville - solo enunciato
18. Teorema di Arnold-Liouville - solo enunciato

## Introduzione alla meccanica quantistica

Per questa parte usare le dispense di Pulvirenti o il testo di Teta, vedi dettagli sul diario delle lezioni.

- 1.
2. **L'equazione di Schroedinger**
3. **Interpretazione probabilistica della funzione d'onda.**
4. **Operatori posizione e impulso. Hamiltoniano. Teorema di Ehrenfest**
5. **Osservabili e il principio di indeterminazione.**
- 6.
7. **Buca di potenziale infinita.**
- 8.
- 9.
- 10.



## Programma completo

### Spazi di Hilbert [ifm17, cap. 2]

1. Spazi di Hilbert reali e complessi. Esempi  $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ ,  $L^2(\Omega, \mathbb{C})$ , con  $\Omega$  dominio di  $\mathbb{R}^n$ ,  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ ,  $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ . Spazi  $L^2$  con pesi - [ifm17] 2.1
2. Sottospazi lineari chiusi e non. Ortogonale di un sottospazio.
3. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, identità del parallelogramma e Teorema della proiezione in spazi di Hilber complessi.
4. Sistemi ortonormali, disuguaglianza di Bessel; spazi separabili e sistemi ortonormali completi (basi), Identità di Parseval. Basi in spazi prodotto (enunciato).
5. Ortogonalizzazione di Gramm-Schmidt, esistenza di basi in spazi separabili.
6. Base di Fourier.
7. Completezza della base di Fourier.
8. Convergenza uniforme della serie di Fourier per funzioni  $C^1$ .

### Problemi di Sturm-Liouville [ifm17 cap. 1, 3, 4, 5]

1. Problemi di Sturm-Liouville
2. Polinomi di Legendre
3. Funzioni generalizzate di Legendre
4. Polinomi di Tchebyshev
5. Polinomi di Hermite
6. Polinomi di Laguerre
7. Il laplaciano in coordinate sferiche
8. L'operatore di Laplace-Beltrami per la superficie della sfera
9. Armoniche sferiche e polinomi armonici.

## Operatori lineari [ifm17 cap 6, 7, 8]

1. Operatori limitati e norma di un operatore, continuità e limitatezza. Estensione di operatori limitati definiti su sottospazi densi. Decomposizione di  $H$  attraverso immagine e nucleo. Esempi: isometrie e proiettori e loro norme. Isometria con  $\ell_2$  degli spazi di Hilbert separabili.
2. La trasformata di Fourier in  $L^1$
3. La trasformata di Fourier in  $L^2$
4. Iniettività della trasformata di Fourier in  $L^1$  e completezza dei polinomi di Hermite e Laguerre.
5. Il duale di uno spazio di Hilbert e il teorema di rappresentazione di Riesz.
6. Operatore aggiunto e sue proprietà.
7. Operatori di moltiplicazione - condizioni di limitatezza
8. Operatori di integrali - condizioni di limitatezza
9. Operatori di convoluzione - condizioni di la loro limitatezza
10. Operatori unitari. Unitarietà della trasformata di Fourier.
11. L'operatore di shift in  $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ , il suo aggiunto, immagine e nucleo.

## Operatori compatti [ifm 17, cap. 9, 10, 14]

1. Operatori di rango finito. Teorema dell'alternativa per operatori di rango finito.
2. Invertibilità di piccole perturbazioni di operatori invertibili. Serie di Neumann e teoremi dell'alternativa per perturbazioni piccole di operatori di rango finito.
2. Esempi di precompatti in spazi di Hilbert. Convergenza debole di successioni, esempi e proprietà. Precompattanza debole dei limitati in  $H$  separabile (enunciati).
3. Convergenza debole e forte di operatori.
4. Operatori compatti.
5. Teorema dell'alternativa per operatori compatti
6. Risolvente e spettro per operatori.
7. Proprietà del risolvente.
8. Teorema spettrale per operatori compatti autoaggiunti.
9. Equazioni di Volterra in  $L^\infty$  e in  $L^2$ .
10. Spettro della trasformata di Fourier attraverso gli operatori di creazione e distruzione.

## Operatori illimitati [ifm17 cap. 11]

1. Introduzione agli operatori illimitati. Aggiunto di un operatore illimitato.
2. Operatori chiusi. Chiusura dell'aggiunto. Spettro di un operatore autoaggiunto.
3. Indentità del risolvente
4. teorema di Weyl.
5. Cenni al teorema spettrale.

### Equazione di Poisson [ifm17 cap. 12]

1. Gli spazi di Sobolev  $H^1(\Omega)$  e  $H_0^1(\Omega)$ , richiami sulla disuguaglianza di Poincaré.
2. La soluzione debole in  $H_0^1(\Omega)$  dell'equazione di Poisson. Simmetria dell'operatore che esprime la soluzione.
3. Autoaggiuntezza e compattezza dell'inverso del laplaciano. Autovalori del laplaciano.
4. Domini  $C^k$  e domini lipschitziani. Il problema di Poisson-Neumann in  $H^1(\Omega)$ .
5. Richiami sul teorema di prolungamento e sulla disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger. Esistenza e unicità della soluzione debole in  $H_m^1$ . Autovalori del laplaciano.
6. Costanti per la disuguaglianza di Poincaré e il primo autovalore del laplaciano.

### Potenziali di volume, strato singolo e di doppio strato [ifm17 cap. 14]

1. Funzione di Green per il problema di Poisson, potenziale di volume. Andamento asintotico. Campo di Dipolo.
2. La terza identità di Green e i potenziali di singolo e doppio strato
3. Discontinuità del potenziale di doppio strato e Lemma di Gauss.
4. Discontinuità della derivata normale del potenziale di singolo strato
5. Esistenza e unicità per il problema di Laplace-Dirichlet nei limitati semplicemente connessi in termini di potenziale di doppio strato.
6. Unicità per problema di Laplace-Neumann esterno.
7. Continuità della derivata normale del potenziale di doppio strato.
8. Risoluzione del problema di Laplace-Neumann interno.
9. Distribuzione delle cariche su un conduttore.

## Meccanica hamiltoniana [h17]

1. Richiami sulle lagrangiane. Impulsi. L'hamiltoniana e le equazioni di Hamilton.
2. Esempi, il moto centrale piano.
3. Le variabili cicliche nei sistemi hamiltoniani.
4. Trasformazioni canoniche. Trasformazioni simplettiche. Matrici simplettiche.
5. Parentesi di Poisson e loro invarianza per trasformazioni simplettiche.
6. Le regole di commutazione canonica.
7. Parentesi di Poisson e integrali primi.
8. Proprietà delle parentesi di Poisson.
9. Commutatore di operatori; identità di Jacobi per il commutatore.
10. Commutatore di campi vettoriali. Identità di Jacobi per il commutatore di campi e per le parentesi di Poisson.
11. Commutatività dei flussi associati a campi commutanti.
12. Condizione di simpletticità attraverso la forma  $p dq - P dQ$ .
13. Trasformazioni simplettiche dipendenti dal tempo.
14. Funzioni generatrici.
15. Equazione di Hamilton-Jacobi.
16. Equazione di HJ per il moto centrale.
17. Sistemi integrabili. Teorema di Liouville.
18. Teorema di Arnold-Liouville e variabili azione-angolo

## Introduzione alla meccanica quantistica

Per questa parte usare le dispense di Pulvirenti o il testo di Teta, vedi dettagli sul diario delle lezioni.

1. **Cenni sulla radiazione di corpo nero, l'effetto fotoelettrico e l'atomo di Bohr.**
2. **L'equazione di Schroedinger**
3. **Interpretazione probabilistica della funzione d'onda.**
4. **Operatori posizione e impulso. Hamiltoniano. Teorema di Ehrenfest**
5. **Osservabili e il principio di indeterminazione.**
6. **Dispersione della particella libera attraverso l'evoluzione della varianza della posizione.**
7. **Buca di potenziale infinita.**
8. **Oscillatore armonico quantistico, operatori di creazione e distruzione, e relazione con i polinomi di Hermite.**
9. **L'hamiltoniano dell'atomo di idrogeno.**
10. **Stati legati dell'atomo di idrogeno.**