Appunti ed esercizi per il corso di Istituzioni di Fisica Matematica 2017–2018

in aggiornamento

30 maggio 2018

Queste note sono i miei appunti del corso, in cui troverete tutti gli argomenti di lezione che non siano di non facile reperibilità sui testi. Ci sono le dimostrazioni ma non tutte le parole necessarie per motivare gli argomenti.
Con * indico esercizi o argomenti che non sono stati svolti o assegnati a lezione.

Indice

Fonti **4**

1 Problemi di Sturm-Liouville **5**
1.1 Lagrangiane 5
1.2 Condizioni al contorno 6
1.3 La separazione delle variabili e il problema agli autovalori 7

2 Spazi di Hilbert **10**
2.1 Prodotto hermitiano 10
2.2 Sottospazi ortogonali e proiezioni ortogonali 11
2.3 Sistemi ortonormali, disuguaglianza di Bessel, basi ortonormali 14
2.4 La serie di Fourier 17
2.5 Basi in $L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ 20

3 Polinomi di Legendre **21**
3.1 Basi di polinomi 21
3.2 I polinomi di Legendre G_n 21
3.3 L'equazione di Sturm-Liouville per G_n 23
3.4 Zeri di G_n 24

4 Altre basi di polinomi **25**
4.1 Spazi pesati L^2_w 25
4.2 Polinomi di Tchebyshev 26
4.3 Polinomi di Hermite 27
4.4 L'equazione di Sturm-Liouville per i polinomi di Hermite 28
4.5 Polinomi di Laguerre 29

4.6 L'equazione di Sturm-Liouville per i polinomi di Laguerre 30
4.7 Funzioni generalizzate di Legendre 31
4.8 Funzioni generalizzate di Laguerre 31

5 Armoniche sferiche 33
5.1 Il laplaciano in coordinate generalizzate 33
5.2 $\triangle$ in coordinate sferiche e $\triangle_{S^2}$ 34
5.3 Le armoniche sferiche 35

6 Operatori limitati 37
6.1 $\ell_2(\mathbb{R})$ e $\ell_2(\mathbb{C})$ 41

7 Trasformata di Fourier 43
7.1 La trasformata di Fourier il $L^2(\mathbb{R})$ 43
7.2 La trasformata di Fourier il $L^1(\mathbb{R})$ 44
7.3 Completezza dei polinomi di Hermite e di Laguerre 45

8 Operatori da H in sé 47
8.1 Teorema di rappresentazione di Riesz 47
8.2 Operatore aggiunto 48

9 I teoremi dell'alternativa per operatori di rango finito 51
9.1 Lo shift su $l_2(\mathbb{N};\mathbb{R})$ 51
9.2 Operatori di rango finito 54
9.3 $\mathbf{I}-T$ con T di rango finito 55
9.4 Equazioni integrali di Fredholm per nuclei separabili 56
9.5 Piccole perturbazioni 59
9.6 Operatori piccoli e serie di Neumann 59
9.7 Equazioni integrali di Volterra 60
9.8 Convergenza debole 63
9.9 Successioni di operatori 67

10 Operatori compatti 69
10.1 Operatori compatti 69
10.2 Risolvente e spettro 74
10.3 Spettro degli operatori autoaggiunti 77
10.4 Teorema spettrale per operatori compatti autoaggiunti 80

11 Introduzione agli operatori illimitati 84
11.1 Dominio, estensioni, aggiunto 84
11.2 Operatori chiusi 85

12 Il problema di Poisson 89
12.1 Il problema di Poisson-Neumann in $[a,b]$ 90
12.2 Il problema di Poisson-Dirichlet in $[a,b]$ 92
12.3 Il Problema di Poisson in Ω 95
12.4 Il problema di Poisson-Neumann in Ω 97
12.5 Le costanti ottimali per le disuguaglianze di Poincaré 99

13 Lo spettro della trasformata di Fourier **100**

14 Il problema di Laplace **104**
14.1 Funzione di Green, dipoli, andamento asintotico 104
14.2 I potenziali di singolo e doppio strato 106
14.3 Discontinuità dei potenziali singolari 112
14.4 Il problema di Laplace - Dirichlet interno 118
14.5 Il problema di Laplace-Neumann 121
14.6 Conduttori carichi 122
14.7 Appendice: regolarità del potenziale di volume 124
14.8 Appendice: unicità per il problema di Laplace-Neumann esterno 128

Fonti

Testi e dispense varie

CH Courant, Hilbert: Methods of Mathematical Physics

RS Reed, Simon: Methods of modern mathematical physics, vol I, Functional Analisys

KF Komogorov, Fomin: Elementi di teoria delle funzioni e analisi funzionale

S Salsa: Equazioni alle derivate parziali

G Garroni: note del corso di Istituzioni di Analisi Superiore 2016
`http://www1.mat.uniroma1.it/people/garroni/Note-IAS-16-17.pdf`

P Pulvirenti: note del corso di Istituzioni di Fisica Matematica 2015-16
`http://www1.mat.uniroma1.it/people/pulvirenti/didattica/IFMat_2016.pdf`

T] Teta **Brief Review on Hamiltonian Mechanics and Electromagnetism.pdf** che trovate su
`https://sites.google.com/site/sandroprova/didattica-1/appunti-ed-esercizi`

B Buttà: note del corso di Fisica-Matematica
`http://www1.mat.uniroma1.it/~butta/didattica/note_FM.pdf`

FM Benedetto: note aggiuntive per Fisica-Matematica 2015-2016
`http://brazil.mat.uniroma1.it/dario/FM2015//NoteAggiuntive/note15.pdf`

IFM Benedetto: appunti di IFM 2017-2018 (queste note)
`http://brazil.mat.uniroma1.it/dario/FM2017/ifm17.pdf`

1 Problemi di Sturm-Liouville

Vedi [S] pag. 357, [CH] pp 291-292, fino formula (19), e *vedi anche* gli esercizi del primo paragrafo in [FM].

1.1 Lagrangiane

Consideriamo una corda che può vibrare nella direzione verticale, che indichiamo con $u(x,t)$, e di estremi 0 e L. Sia $\rho(x) > 0$ la sua densità di massa, Ipotizziamo inoltre che la corda sia soggetta ad una forza $f(x)$ costante nello spostamento, ma dipendente da x (nel caso della gravità $f(x) = -g$), e da un richiamo elastico verso $u = 0$ di coefficiente di elasticità $k(x)$.
Il sistema così descritto ha energia cinetica

$$\frac{1}{2}\int_0^L \rho(x)(\partial_t u(x,t))^2 \,\mathrm{d}x$$

L'energia potenziale della forza esterna f è

$$-\int_0^L f(x)u(x,t)\,\mathrm{d}x$$

quella del richiamo elastico è

$$\frac{1}{2}\int_0^L k(x)u^2(x,t)\,\mathrm{d}x$$

Nella modellizzazione delle corde vibranti, l'energia potenziale dovuta all'elasticità viene ottenuta ipotizzando la sua dipendenza lineare dalla lunghezza complessiva della corda; assegnata la tensione τ agli estremi, tale energia potenziale è

$$\tau\int_0^L \sqrt{1+(\partial_x u(x,t))^2}$$

Una eventuale disomogeneità della corda implicherà differenti contributi all'energia di differenti tratti, dunque generalizziamo questa espressione in

$$\int_0^L \tau(x)\sqrt{1+(\partial_x u(x,t))^2}$$

Nella descrizione dei moti di una corda vibrante si assume la piccolezza degli spostamenti intorno all'equilibrio $u = 0$, che consente di approssimare le equazioni al primo ordine. Ricordo che approssimare le equazioni al primo ordine equivale a considerare l'approssimazione quadratica della lagrangiana (come esempio potete rifarvi alla teoria delle piccole oscillazioni intorno a un equilibrio, in cui sviluppate al secondo ordine energia cinetica ed energia potenziale, e ottenete delle equazioni di oscillatori accoppiati).
Dunque considereremo l'approssimazione quadratica del termine di energia elastica, ottenendo

$$\frac{1}{2}\int_0^L \tau(x)\,\partial_x u(x,t)^2$$

Avere individuato tutti i termini dell'energia permette di scrivere la lagrangiana del sistema che è

$$L = L[u,\dot{u},u'] = \int_0^L \mathrm{d}x\left(\frac{\rho}{2}\dot{u}^2 - \frac{\tau}{2}u'^2 - \frac{k}{2}u^2 + fu\right) \tag{1.1}$$

Calcoliamo la variazione prima dell'azione, cioè

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} A[u+\varepsilon\delta u] = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \int_0^T \mathrm{d}t \int_0^L \mathrm{d}x L[u+\varepsilon\delta u, u'+\varepsilon\delta u']$$

Derivando sotto segno di integrale e integrando per parti nel tempo, ipotizzando come sempre variazioni nulle per $t=0$ e $t=T$, si ottiene

$$\delta A = \int_0^T \mathrm{d}t \int_0^L \mathrm{d}x\, [-\rho\ddot{u}\delta u - \tau u'\delta u' - ku\delta u + f\delta u]$$

L'ultimo passaggio importante da compiere è l'integrazione per parti per spostare la derivata spaziale da $\delta u'$:

$$\delta A = \int_0^T \mathrm{d}t \left[-\tau u'\delta u\Big|_{x=0}^{x=L} + \int_0^L \mathrm{d}x\,\delta u\,(-\rho\ddot{u} + (\tau u')' - ku + f)\right]$$

Fissando u agli estremi $u(0,t)=u_-$ e $u(L,t)=u_+$ (condizioni di Dirichlet), il termine di bordo nello spazio si annulla, infatti deve essere $\delta u(x,t)=0$ se $x=0,L$).
Dunque, imponendo la stazionarietà dell'azione, cioè che δA sia nulla per ogni scelta di δu, si ottengono le equazioni del moto

$$\rho\,\partial_t^2 u = \partial_x(\tau\,\partial_x u) - ku + f \tag{1.2}$$

1.2 Condizioni al contorno

Si noti che imporre condizioni non omogenee o anche dipendenti dal tempo, cioè $u(0,t) = \bar{u}_-(t)$ e $u(L,t)=\bar{u}_+(t)$ non modifica l'equazione del moto. Infatti il calcolo della variazione prima non cambia, vale sempre $\delta u(0,t)=0$ e $\delta u(L,t)=0$.
Si hanno condizioni al contorno differenti se si assume l'esistenza di forze che agiscono al bordo (invece le condizioni di Dirichlet implicano solo l'esistenza di reazioni vincolari al bordo). Consideriamo dei termini di energia potenziale al bordo, dati da $U_-(u(0,t)) + U_+(u(L,t))$, che sono le energie potenziali di due forze che agiscono su u nei punti $x=0$ e $x=L$.
In questo caso i termini al bordo della variazione dell'azione diventano

$$-\tau(L)u'(L,t)\delta u(L,t) + \tau(0)u'(0,t)\delta u(0,t) - U'_-(u(L,t))\delta u(L,t) - U'_+(u(0,t))\delta u(0,t)$$

(lascio i dettagli al lettore), mentre il termine integrale è lo stesso. Imponendo $\delta A = 0$ per ogni $\delta u(x,t)$ nulla in $x=0$ e $x=L$, si ottengono le equazioni del moto. Però vanno annullati anche i termini di bordo. Se non si fissa u al bordo, le funzioni $\delta u(0,t)$ e $\delta u(L,t)$ sono arbitrarie, dunque l'azione è nulla se

$$-U'_-(u(0,t)) = \tau(0)\,\partial_x u(0,t), \qquad -U'_+(u(L,t)) = -\tau(L)\,\partial_x u(L,t)$$

Nota che questa espressione indica che $\tau(x)u'(x,t)$ con $x=0,L$ è la forza agli estremi esercitata dalla corda, che deve uguagliare quella esterna[1].

[1]Più correttamente, $\tau(x)u'(x,t)$ è una "tensione", analogo unidimensionale della pressione. In un fluido, su una superficie Σ di normale $\mathbf{n}$ il fluido esercita, attraverso la pressione p, la forza $-p\Sigma\mathbf{n}$. Dato il verso $\mathbf{n}$ parallelo alla corda in x, la corda esercita una forza $-\tau u'\mathbf{n}$, che cambia segno con $\mathbf{n}$. Per questo motivo, all'estremo sinistro la forza che esercita la corda è $\tau u'$, mentre all'estremo destro è $-\tau u'$.

Se Σ è la sezione della corda, la forza che si esercita su Σ nella direzione $\mathbf{n}$ ortogonale a Σ è $-\tau u'\mathbf{n}$, e quindi cambia verso con $\mathbf{n}$, così come

L'ipotesi che abbiamo fatto sulle forze al bordo ci ha dato condizioni generali, anche non lineari, dunque fuori dalla teoria delle piccole oscillazioni. Però, in assenza delle energie potenziali U_- e U_+, si hanno le condizioni di Neumann omogenee $u' = 0$, che indicano appunto l'assenza di forze al bordo.
Ipotizzando che le forze al bordo siano costanti, cioè che le energie potenziali siano lineari, $U_-(u) = g_- u$ e $U_+(u) = g_+ u$ si ottengono le usuali condizioni di Neumann non omogenee. Se invece consideriamo forze lineari, cioè energie potenziali quadratiche, $U_-(u) = k_- u^2/2$ e $U_+(u) = k_+ u^2/2$, con $k_-, k_+ > 0$, si ottengono condizioni lineari omogenee dette condizioni di Robin

$$\tau(0)\,\partial_x u(0,t) = -k_- u(0,t), \qquad \tau(L)\,\partial_x u(L,t) = +k_+ u(L,t)$$

1.3 La separazione delle variabili e il problema agli autovalori

Considera l'equazione che hai ottenuto nel punto precedente in assenza della forza esterna f:

$$\rho\,\partial_t^2 u = \partial_x(\tau\,\partial_x u) - ku$$

Cerchiamo una soluzione per separazione di variabili $u(x,t) = A(t)B(x)$. Ottieni

$$\rho \ddot{A} B = A(\partial_x(\tau\,\partial_x B) - kB)$$

che può avere soluzioni solo se

$$\ddot{A}/A = \lambda$$

è una costante, e in tal caso

$$\partial_x(\tau(x)\,\partial_x B(x)) - k(x)B(x) = \lambda\rho(x)B(x) \tag{1.3}$$

L'equazione per A ha soluzioni $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, con pulsazione $\omega = \sqrt{-\lambda}$ se λ è negativo. La corrispondente soluzione in B è la forma spaziale dell'oscillazione che produce l'andamento armonico temporale di pulsazione ω (in pratica un suono di frequenza $\omega/(2\pi)$).
Nel caso di ρ, τ e k indipendenti da x, $B(x)$ risulta essere una oscillazione armonica, e imponendo le condizioni al contorno si trova una sequenza numerabile di possibili valori di λ. Queste soluzioni $B(x)$ sono le "armoniche" del sistema.

Nel caso generale si tratta di risolvere il problema agli autovalori, dato dall'equazione (1.3), detto **problema di Sturm-Liouville**, in cui $B(x)$ e λ sono le incognite. Anche in questo ci aspettiamo, assegnate le condizioni al bordo, un'infinità numerabile di autovalori. Dimostrare questo fatto richiede un po' di analisi funzionale (spazi di Hilbert, basi, operatori, diagonalizzazione degli operatori compatti).

Esercizio 1. Il minimo dell'energia - I
Considera la sola energia potenziale

$$U = \frac{1}{2}\int (\tau(u')^2 + ku^2 - fu)$$

nel caso di condizioni di Dirichlet o Neumann omogenee. Nota che è un funzionale limitato dal basso, dunque ha senso chiedersi qual è il suo minimo.

Qual è l'equazione che deve soddisfare u che realizza il minimo?

Esercizio 2. Il minimo dell'energia - II

Supponi ora f nulla. Moltiplica per $u(x)$ l'equazione e integrando, dimostra che il minimo è raggiungo solo per $u = 0$.
Osserva che se $k \equiv 0$, nel caso di condizioni di Neumann omogenee esistono soluzioni non banali.
Scrivi l'energia nel caso di condizioni di Robin e mostra che anche in questo caso esistono soluzioni non banali solo se $k = 0 = k_\pm$.

Esercizio 3. Energia e autovalori

Uno dei tipici problemi della meccanica quantistica, è la ricerca dello **stato fondamentale** di un sistema, cioè quello di energia minima (che corrisponde, in meccanica classica, a uno stato di equilibrio stabile). Però in meccanica quantistica lo stato fisico di un sistema è descritto dalla **funzione d'onda**, che è una funzione di norma L^2 pari ad 1. Dunque il minimo dell'energia va cercato non tra le funzioni qualunque ma tra quelle con norma L^2 unitaria. Anticipo inoltre che un termine del tipo $\frac{1}{2}(u')^2$ è l'energia cinetica del sistema (mentre per una corda è l'energia potenziale elastica), mentre un termine del tipo $\int V(x)|u|^2$ è l'energia potenziale della particella sottoposta a un potenziale $V(x)$ (mentre nel caso della corda $\int k/2|u|^2$ è l'energia potenziale elastica).

Ipotizziamo dunque che U sia l'energia di un sistema quantistico di funzione d'onda u.
Cercare il minimo con il vincolo $\int u^2 = 1$ equivale a cercare i punti stazionari di

$$U + \lambda\frac{1}{2}\left(\int u^2 - 1\right)$$

dove λ è il moltiplicatore di Lagrange.
Scrivi le equazioni di Eulero-Lagrange per il minimo e nota che hai ottenuto esattamente il problema agli autovalori di Sturm-Liouville.
Moltiplicano per u e integrando, mostra che gli autovalori sono negativi o nulli, e che la corrispondente energia è $-\lambda/2$. Dunque l'energia minima si ottiene per l'autofunzione che ha l'autovalore di minimo modulo.

Per $k = 0$, mostra che 0 non è autovalore nel caso di condizioni di Dirichlet omogenee o Robin, mentre lo è nel caso di condizioni di Neumann omogenee se $k \equiv 0$

Ho descritto un modello fisico che porta al problema di Sturm-Liouville, però questo tipo di problemi si incontra anche cercando le autofunzioni del laplaciano in particolari geometrie, dopo aver ridotto il problema ad un caso unidimensionale (vedremo dopo degli esempi). In questi casi τ ha un'espressione matematica semplice, ma spesso è nulla al bordo. Ci chiediamo dunque cosa cambia in questi casi.

Supponiamo che $\tau(x)$ si annulli nell'estremo $x = L$. Calcolando la variazione dell'azione assumendo u libera al bordo, il termini di bordo dovrebbe essere

$$\tau(L)u'(L)\delta u(L)$$

Imporre $\delta u(L) = 0$ (cioè condizioni di Dirichlet) è indistinguibile dal porre $\delta u(L)$ arbitrario, se $u'(x)\tau(x)$ limitato.
Dunque il principio variazionale sembra indicare che la condizione al contorno da imporre, nel caso di τ nullo a un estremo, sia u limitato in quell'estremo. Vedremo in che senso questa è effettivamente la condizione giusta.

Esercizio 4. Autovalori e condizioni al contorno
Considera in $[-1,1]$ l'equazione di Sturm-Liouville

$$((1-x^2)u')' = -\lambda u$$

Mostra che per $\lambda = 0$ esistono almeno due soluzioni linearmente indipendenti non nulle, di cui una, che indicherò con ϕ_0, limitata, e l'altra, ϕ_1 non limitata agli estremi ma con $(1-x^2)\Phi_1'$ limitato.
Mostra che per ϕ_0 l'energia elastica è limitata, per ϕ_1 no.

Esercizio 5. Il moto di un'asta sottile *
Il moto vibratorio di un'asta rigida è governato da un'equazione che non è quella delle onde, che si ottiene assumendo che l'energia potenziale sia proporzionale all'integrale del quadrato della curvatura. In tal modo, mentre per una corda elastica i punti con $u' \neq 0$ danno contributo all'energia, questo non accade per un'asta metallica, dove è necessario che $u'' \neq 0$.
Assumi che la densità di massa sia costante, e che l'energia potenziale sia l'integrale del quadrato della curvatura.

- Scrivi la lagrangiana
- Approssima la lagrangiana al II ordine
- Mostra che l'equazione di Eulero-Lagrange è

$$\ddot{u} = -u^{(4)}$$

- Quali e quante condizioni al contorno puoi assegnare? Qual è il loro significato fisico?
- Trova le armoniche del problema, considerando u e u' nulle al bordo.
- Le pulsazioni di una corda vibrante sono $\omega_k = \nu k$, con k intero positivo: Come sono le pulsazioni dell'asta?

Nelle oscillazioni armoniche $\omega_k = \nu k$, il valore $\omega_1 = \nu$ è la **fondamentale**, i suoi multipli sono le armoniche. In particolare la prima armonica è ha frequenza doppia, e l'orecchio o il cervello umano considerano un suono di frequenza doppia uguale all'altro. Le ulteriori armoniche sono le altre note, e un questo modo le armoniche degli strumenti a corda (uguali a quelle degli strumenti a fiato), hanno dato origine alla scala naturale, successivamente "temperata" dividendo in 23 parti uguali il logaritmo della frequenza tra due ottave.

Le aste metalliche, hanno solo un sottoinsieme delle frequenze delle corde, e per questo hanno un "timbro" completamente diverso (il timbro è dato, in prima approssimazione, da come si distribuisce l'energia nelle armoniche disponibili).
Gli strumenti a percussione piana, invece, non hanno pulsazioni della forma νn con n intero, dunque danno suoni "non armonici", che è il motivo per cui è difficile assegnare una "nota" ad un tamburo (ci si riesce con il timpano, per un'affascinante fenomeno psicoacustico).

2 Spazi di Hilbert

In queste note non riporto definizioni e dimostrazioni elementari sugli spazi di Hilbert, che ho riassunto a lezione. Si veda su qualunque testo la definizione di prodotto scalare nel caso reale e nel caso complesso, la definizione di spazio di Hilbert, la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz ([S] parr 6.3-6.4, oppure [G] parr. 5.1-5.2, ma mancano i sistemi ortonormali, Bessel e l'identità di Parseval, che trovi su [KF] III.4; per il caso complesso vedi [RS] cap 2 parr 1-4; per richiami su Fourier va bene un qualunque testo, in particolare [KF]).
Sempre su [S] o su [G], si trova anche il **Teorema della proiezione**, che dimostro comunque anche qui.
Non considererò mai spazi di Hilbert non separabili, e solo spazi di dimensione infinita, se non esplicitamente indicato.

Do per noto che se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un **dominio** (cioè un aperto connesso), lo spazio delle funzioni L^2 a valori reale è e completo nella norma data dal prodotto scalare.

2.1 Prodotto hermitiano

Dato uno spazio vettoriale H sul campo $\mathbb{C}$, un prodotto hermitiano è un prodotto a valori in $\mathbb{C}$

$$H \times H \to \mathbb{C}$$

che a $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$ associa il numero complesso (u, v) che verifica i seguenti assiomi:

- è lineare nel secondo argomento: per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in H$ e $\lambda \in \mathbb{C}$:
  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) + (\mathbf{u}, \mathbf{v}_2)$
  $(\mathbf{u}, \lambda\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v})$
- lineare coniugato nel primo argomento:
  $(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}_2, \mathbf{v})$
  $(\lambda\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \bar{\lambda}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$
- è "hermitiano": $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$
- è definito positivo: $(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ è reale e definisce la norma $\|\mathbf{u}\|^2 = (\mathbf{u}, \mathbf{u})$

La definizione di ortogonalità è la stessa del caso reale. Do per noto (o per esercizio), la continuità del prodotto hermitiano e della norma rispetto alla metrica indotta dalla norma.

Se H è completo rispetto alla norma, è uno "spazio di Hilbert". $\mathbb{C}^n$ è uno spazio di Hilbert di dimensione finita con il prodotto scalare

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_1^n \bar{u}_i v_i$$

Lo spazio delle funzioni a valori complessi quadro sommabili $L^2(\Omega, \mathbb{C})$ ha come prodotto scalare

$$(f, g) = \int_\Omega \bar{f} g$$

che definisce la norma
$$\|f\|^2 = \int_\Omega \bar{f} f = \int_\Omega |f|^2$$

Do per noto che $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ è uno spazio completo. Noto che $L^2(\Omega, \mathbb{C})$, come spazio metrico, è in biezione isometrica con $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$, assegnando a f a valori in $\mathbb{C}$ la coppia costituita dalla sua parte reale e dalla sua parte immaginaria. Da questo è immediato ottenere che $L^2(\Omega, \mathbb{C})$ è uno spazio completo e che le funzioni continue sono dense.
D'ora in poi H sarà sempre uno spazio di Hilbert complesso, a meno che non sia specificato altrimenti.

2.2 Sottospazi ortogonali e proiezioni ortogonali

Ci sono alcune differenze su quello che è vero in dimensione infinita rispetto al caso finito. In particolare, i sottospazi di uno spazio di dimensione infinita non sono necessariamente chiusi. Si pensi al sottospazio dei polinomi di $L^2([0,1], \mathbb{R})$: si tratta di un sottospazio che è denso (e non chiuso, visto che non tutte le funzioni di L^2 sono polinomi...).

In dimensione infinita è ancora possibile costruire la proiezione ortogonale di un vettore su un sottospazio, ma (non troppo sorprendentemente...) è necessario che il sottospazio sia chiuso.

Teorema 2.1. Teorema della proiezione.
Sia V un sottospazio chiuso di H, sia $\mathbf{u} \in H$, sia
$$dist(\mathbf{u}, V) = \inf\{\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \mid \mathbf{v} \in V\}$$
la distanza tra $\mathbf{u}$ e V. Esiste il punto di minima distanza $\mathbf{w}$ tale che
$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| = dist(\mathbf{u}, V)$$
Inoltre $\mathbf{w}$ è l'unico vettore che verifica
$$(\mathbf{u} - \mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0, \ \forall \mathbf{v} \in V.$$
In termini geometrici elementari, quest'ultima affermazione dice che $\mathbf{w}$ è il "piede" della perpendicolare da $\mathbf{v}$ a V.

Ricordo che questo teorema si estende, con qualche modifica nel secondo punto, al caso di sottoinsiemi convessi chiusi.

Dimostrazione. Ricordo che per la norma indotta da un prodotto scalare vale l'**identità del parallelogramma**:
$$\frac{1}{2}\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2$$
(dimostrare, svolgendo i quadrati, che vale anche nel caso del prodotto hermitiano).
Sia $\mathbf{v}_n \in V$ una successione minimizzante, cioè tale che per $n \to +\infty$
$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_n\| \to dist(\mathbf{u}, V).$$

Scegliendo $\mathbf{a} = \mathbf{u} - \mathbf{v}_n$ e $\mathbf{b} = \mathbf{u} - \mathbf{v}_m$ nella disuguaglianza del parallelogramma scritta sopra, si ha

$$2\|\mathbf{u} - (\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_m)/2\|^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_m\|^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_n\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_m\|^2$$

Da cui segue che

$$\|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_m\|^2 = 2\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_n\|^2 + 2\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_m\|^2 - 4\|\mathbf{u} - (\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_m)/2\|^2 \tag{2.1}$$

Ora

$$dist(\mathbf{u}, V) \leq \|\mathbf{u} - (\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_m)/2\|$$

perché $(\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_m)/2 \in V$ e

$$\|\mathbf{u} - (\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_m)/2\| \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_n\| + \frac{1}{2}\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_m\|$$

che tende a zero nel limite $n, m \to +\infty$. Dunque il secondo membro della (2.1) tende a 0 per $n, m \to +\infty$, e quindi $\mathbf{v}_n$ è di Cauchy. Per completezza di H esiste

$$\mathbf{w} = \lim_{n \to +\infty} \mathbf{v}_n$$

che è in V, perché V è chiuso, e raggiunge il minimo perchè $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_n\| \to \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|$.
Abbiamo trovato un vettore $\mathbf{w}$ che realizza il minimo, per mostrare che è unico dimostriamo prima la seconda parte.
Per definizione, $\mathbf{w}$ soddisfa, per ogni $\mathbf{v} \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w} + \lambda\mathbf{v}\|^2 \geq \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2,$$

infatti $\mathbf{w} - \lambda\mathbf{v} \in V$. Sviluppando il primo membro si ha

$$\lambda(\mathbf{u} - \mathbf{w}, \mathbf{v}) + \bar{\lambda}(\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{w}) + |\lambda|^2\|\mathbf{v}\|^2 \geq 0$$

Riconoscendo nel secondo termine il complesso coniugato del primo, si ha

$$2\Re\left(\lambda(\mathbf{u} - \mathbf{w}, \mathbf{v})\right) + |\lambda|^2\|\mathbf{v}\|^2 \geq 0$$

che, scegliendo $\lambda = \mu\overline{(\mathbf{u} - \mathbf{w}, \mathbf{v})}$, con $\mu \in \mathbb{R}$ arbitrario, diventa

$$|(\mathbf{u} - \mathbf{w}, \mathbf{v}))|^2(2\mu + \mu^2\|\mathbf{v}\|^2) \geq 0$$

Il polinomio $2\mu + \mu^2\|\mathbf{v}\|^2$ non ha segno definito (è negativo per μ negativo e di piccolo modulo), dunque la disuguaglianza è soddisfatta solo se $|(\mathbf{u} - \mathbf{w}, \mathbf{v}))|^2$ cioè

$$(\mathbf{u} - \mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0$$

Mostreremo ora che esiste al più un vettore $\mathbf{w}$ che verifica questa uguaglianza per ogni $\mathbf{v} \in V$, concludendo la prova.
Siano $\mathbf{w}_i$ con $i = 1, 2$ due vettori di V tali che, per ogni $\mathbf{v} \in V$, sia ha $(\mathbf{u} - \mathbf{w}_i, \mathbf{v}) = 0$. Allora, sommando e sottraendo $\mathbf{u}$,

$$(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2, \mathbf{v}) = (\mathbf{w}_1 - \mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u} - \mathbf{w}_2, \mathbf{v}) = 0$$

Poichè $\mathbf{w}_i \in V$, si può scegliere $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$, e dunque si ottiene $\|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\|^2 = 0$. $\square$

Come corollario, segue la seguente generalizzazione al caso infinito dimensionale della decomposizione in uno spazio euclideo. Sia V un sottospazio vettoriale di H (anche non chiuso) e sia

$$V^\perp = \{v \in H | \ \forall z \in V \ (z, v) = 0\}$$

il sottospazio dei vettori ortogonali a V.

Teorema 2.2. Decomposizione in somma diretta di sottospazi ortogonali chiusi. *Se V è un sottospazio vettoriale chiuso,*

$$H = V^\perp \oplus V$$

Dimostrazione. Infatti, per il teorema della proiezione, dato $\mathbf{u}$ in H, esiste $\mathbf{w} \in V$ tale che $(\mathbf{u} - \mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V$. Ma allora $(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \in V^\perp$, dunque

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u} - \mathbf{w}) + \mathbf{w}$$

è la decomposizione di $\mathbf{u}$ in $V^\perp + V$; l'unicità della decomposizione segue dalla relazione di orgonalità. $\square$

Analizzo ora le proprietà dei sottospazi legate all'ortogonalità. Sia M un sottospazio, e sia $\overline{M}$ la sua chiusura topologica.

a. $M^\perp$ è un chiuso

Infatti il prodotto scalare è continuo, dunque sia $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$ e $\forall \mathbf{v} \in M$ sia $(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}) = 0$; passando al limite $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ per ogni $\mathbf{v} \in M$, dunque $\mathbf{u} \in M^\perp$

b. $\overline{M}^\perp = M^\perp$

Infatti da $M \subset \overline{M}$ si ottiene $\overline{M}^\perp \subset M^\perp$. Sia ora $\mathbf{v} \in M^\perp$, e sia $\mathbf{u} \in M$; esiste $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$ con $\mathbf{u}_n \in M$. Ma allora $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lim(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}) = 0$ perché $\mathbf{v}$ è ortogonale a M. Per genericità di $\mathbf{u}$ segue che $\mathbf{v} \in \overline{M}^\perp$.

c. ${M^\perp}^\perp = \overline{M}$

Infatti, per il teorema della proiezione e per il punto precedente

$$H = \overline{M}^\perp \oplus \overline{M} = M^\perp \oplus \overline{M}$$

e vale anche, essendo $M^\perp$ chiuso,

$$H = {M^\perp}^\perp \oplus M^\perp$$

e quindi $\overline{M} = {M^\perp}^\perp$.

Quanto detto sopra, garantisce che dato V sottospazio chiuso di H, è ben definito l'**operatore di proiezione** su V, detto anche **proiettore** su V, che associa a $\mathbf{u} \in H$ la sua proiezione $\mathbf{w} \in V$, determinata attraverso il teorema della proiezione. Il proiettore P su V ha diverse proprietà:

- $P : H \to V$ è un operatore lineare
  (dimostrazione per esercizio)
- Se $\mathbf{v} \in V$, allora $P\mathbf{v} = \mathbf{v}$
  Infatti $\mathbf{v}$ realizza distanza 0 da V.
- $P^2 = PP = P$
  Infatti $P\mathbf{u} \in V$, dunque, per il punto precedente, $P(P\mathbf{u}) = P\mathbf{u}$
- $(\mathbf{u}, P\mathbf{z}) = (P\mathbf{u}, P\mathbf{z}) = (P\mathbf{u}, \mathbf{z})$
  Infatti $\mathbf{u} = P\mathbf{u} + (\mathbf{u} - P\mathbf{u})$. La prima identità segue dal fatto che $(\mathbf{u} - P\mathbf{u}) \in V^\perp$ e $P\mathbf{z} \in V$; la seconda viene dalla prima scambiando il ruolo di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{z}$.
- $(\mathbf{u}, P\mathbf{u}) = \|P\|^2$
  come segue immediatamente dal punto precedente

Anche in spazi di Hilbert vale il teorema di Pitagora.

Teorema 2.3. Teorema di Pitagora

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u} - P\mathbf{u}\|^2 + \|P\mathbf{u}\|^2$$

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata, infatti

$$(\mathbf{u} - P\mathbf{u}, \mathbf{u} - P\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|^2 - (P\mathbf{u}, \mathbf{u}) - (\mathbf{u}, P\mathbf{u}) + \|P\mathbf{u}\|^2$$

e i due prodotto sono entrambi pari a $(P\mathbf{u}, P\mathbf{u}) = \|P\mathbf{u}\|^2$. Dunque

$$\|\mathbf{u} - P\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - \|P\mathbf{u}\|^2.$$

□

2.3 Sistemi ortonormali, disuguaglianza di Bessel, basi ortonormali

D'ora in poi darò per noto che le funzioni $\mathbf{C}(\Omega; \mathbb{C})$, $\mathrm{C}^k(\Omega; \mathbb{C})$, $\mathrm{C}^\infty(\Omega; \mathbb{C})$, e quelle a supporto compatto in Ω sono dense nella norma L^2 nello spazio $L^2(\Omega, \mathbb{C})$.

Definisco **sistema ortonormale** una successione $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, tale che

$$(e_k, e_h) = \delta_{kh}$$

Chiamerò invece **sistema ortogonale** una successione $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, tale che $\{v_k / \|v_k\|\}_{k \in \mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale.

Dato un sistema ortonormale $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, noto che il sottospazio V_n =span$\{\mathbf{e}_k\}_{k=0}^n$ è finito-dimensionale, dunque è chiuso, e $\{\mathbf{e}_k\}_{k=0}^n$ è una sua base. Dunque l'operatore $P_n : H \to V_n$ definito come

$$P_n \mathbf{u} = \sum_{k=0}^{n} \hat{\hat{u}}_k \mathbf{e}_k \quad \text{dove } \hat{u}_k = (\mathbf{e}_k, \mathbf{u})$$

è il proiettore su V_n, infatti per ogni $k \le n$

$$(\mathbf{u} - P_n\mathbf{u}, \mathbf{e}_k) = \hat{u}_k - \sum_{h=1}^{n} \mathbf{u}_h(\mathbf{e}_h, \mathbf{e}_k) = \hat{u}_k - \hat{u}_k = 0$$

Per linearità si ottiene $(\mathbf{u} - P_n\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ per ogni $\mathbf{v} \in V_n$.
Vale inoltre che

$$\|P_n u\|^2 = \| \sum_{k=0}^{n} \hat{u}_k \mathbf{e}_k\|^2 = \sum_{k=0}^{n} |\hat{u}_k|^2$$

Teorema 2.4. Disuguaglianza di Bessel
Se $\mathbf{u} \in H$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\hat{u}_k|^2 \le \|\mathbf{u}\|^2.$$

Dimostrazione. Questa disuguaglianza è un'immediata conseguenza del teorema di Pitagora dimostrato sopra.

$$\|veu\|^2 = \|\mathbf{u} - P_n\mathbf{u}\|^2 + \|P_n\mathbf{u}\|^2$$

Per ortonormalità, $\|P_n\mathbf{u}\|^2 = \sum_{k=0}^{n} |\hat{u}_k|^2$. Maggiorando con 0 il termine $\|\mathbf{u} - P_n\mathbf{u}\|^2$ e passando al limite si ottiene la tesi. □

I coefficienti $\hat{u}_k = (\mathbf{e}_k, \mathbf{u})$ sono le componenti di $\mathbf{u}$ rispetto ai vettori del sistema ortonormale, e sono anche detti **coefficienti di Fourier**.

È il caso di notare che dalla disuguaglianza di Bessel discende **Cauchy-Schwartz**, infatti dato $\mathbf{u}$ non nullo, $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$ è un vettore unitario che è base per la retta che passa per $\mathbf{u}$. Dato $\mathbf{v}$ qualunque la sua proiezione sulla retta è $\hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v})$, dunque dalla disuguaglianza di Bessel si ottiene

$$\|\mathbf{v}\|^2 \ge \|(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v})\|^2 = \frac{|(\mathbf{u}, \mathbf{v})|^2}{\|\mathbf{u}\|^2}$$

da cui la tesi.

Si chiama **base ortonormale** un sistema ortonormale completo tale che, per ogni $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = \sum_{k=0}^{+\infty} \hat{u}_k \mathbf{e}_k, \quad \text{con } \hat{u}_k = (\mathbf{e}_k, u)$$

dove la serie converge nella norma di H. In tal caso $\mathbf{u}$ si sviluppa nella **serie di Fourier** dei suoi coefficienti.
Questa definizione generalizza la definizione di base in uno spazio finito-dimensionale. Si noti che in uno spazio di dimensione n, ogni sistema ortonormale di n elementi è una base, mentre in uno spazio di dimensione infinita non è ovviamente detto che in sistema ortonormale infinito sia una base (basta levare un vettore a una base per ottenere un controesempio). Anzi, il problema interessante è costruire effettivamente delle basi.

Proposizione 2.1. Proprietà delle basi ortonormali.
Sono equivalenti:

a. $\{\mathbf{e}_k\}_{k=0}^{+\infty}$ *è una base*

b. $\forall k \in \mathbb{N}\, (\mathbf{v}, \mathbf{e}_k) = 0$ *implica* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Si noti che questa asserzione è equivalente ad affermare che l'ortogonale al sottospazio delle combinazioni lineari finite di $\{\mathbf{e}_k\}_{k=0}^{+\infty}$ *è banale.*

c. *vale l'***uguaglianza di Parseval** *per ogni* $\mathbf{u} \in H$: $\sum_{k=0}^{+\infty} |\hat{u}_k|^2 = \|\mathbf{u}\|^2$

Dimostrazione. Cominciamo con l'osservare che la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \hat{u}_k \mathbf{e}_k$ è convergente, infatti, per ortogonalità degli elementi della base

$$\|\sum_{n+1}^{m} \hat{u}_k \mathbf{e}_k\|^2 = \sum_{n+1}^{m} |\hat{u}_k|^2 \leq \sum_{n+1}^{+\infty} |\hat{u}_k|^2$$

e il membro di destra, per la disuguaglianza di Bessel, è il resto di una serie convergente. Dunque la successione associata alla serie è di Cauchy, e quindi la serie converge. Sia $\mathbf{w}$ il limite:

$$\mathbf{w} = \sum_{k=0}^{+\infty} \hat{u}_k \mathbf{e}_k.$$

Per continuità della norma e del prodotto scalare si ottiene facilmente che

$$\|\mathbf{w}\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |\hat{u}_k|^2 \quad \text{e,} \quad \forall \mathbf{z}, \quad (\mathbf{w}, \mathbf{z}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \bar{\hat{u}}_k (\mathbf{e}_k, \mathbf{z}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \bar{\hat{u}}_k z_k,$$

dove $z_k = (\mathbf{e}_k, \mathbf{z})$ sono i coefficienti di Fourier di $\mathbf{z}$. Usando queste proprietà è immediato verificare che

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 - (\mathbf{u}, \mathbf{w}) - (\mathbf{w}, \mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|^2 - \sum_{k=0}^{+\infty} |\hat{u}_k|^2$$

Il sistema assegnato è una base se e solo se $\mathbf{w} = \mathbf{u}$, dunque questa espressione implica l'equivalenza tra (a) e (c). Inoltre, $(\mathbf{u} - \mathbf{w})$ è ortogonale a tutti i vettori $\mathbf{e}_k$, dunque se vale (b), deve essere $\mathbf{u} = \mathbf{w}$, cioè vale (a). Viceversa, se $\{\mathbf{e}_k\}_{k=0}^{+\infty}$ è una base e $v_k = (\mathbf{v}, \mathbf{e}_k) = 0$ per ogni k, allora $\mathbf{v} = \sum v_k \mathbf{e}_k = \sum 0\, \mathbf{e}_k = \mathbf{0}$. □

Teorema 2.5. Esistenza di una base in spazi separabili
In uso spazio di Hilbert separabile esiste sempre una base ortonormale.

Dimostrazione. Sia $\{\mathbf{g}_k\}_{k=0}^{+\infty}$ un sottoinsieme denso numerabile di H, che esiste per l'ipotesi di separabilità. Posso estrarre una successione $\mathbf{v}_k$ tale che $\mathbf{v}_{n+1}$ non appartiene allo span di V_n =span$\{\mathbf{v}_k\}_{k=0}^{n}$. Questa successione ha la proprietà che le sue combinazioni lineari finite ricostruiscono la successione $\mathbf{w}_k$, dunque sono dense in H. Sia P_n il proiettore su V_n. Costruiamo iterativamente la base cercata mediante **ortogonalizzazione di Gramm-Schmidt**:

- $\mathbf{e}_0 = \mathbf{v}_0 / \|\mathbf{v}_0\|$;

  osservo che V_0 =span$\{\mathbf{v}_0\}$ =span$\{\mathbf{e}_0\}$

- $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 - P_0\mathbf{v}_1$

  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{w}_1/\|\mathbf{w}_1\|$

  Il vettore $\mathbf{e}_1$ esiste perché se $\mathbf{w}_1$ fosse nullo allora $\mathbf{v}_1 \in V_0$.

  Per definizione di $\mathbf{e}_1$, V_1 =span$\{\mathbf{e}_k\}_{k=0}^{1}$

- Induttivamente, $\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{v}_{n+1} - P_n\mathbf{v}_{n+1}$

  $\mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{w}_{n+1}/\|\mathbf{w}_{n+1}\|$

  Il vettore $\mathbf{e}_{n+1}$ esiste perché se $\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{0}$ allora $\mathbf{v}_{n+1} \in V_n$, contro l'ipotesi.

La successione $\{\mathbf{e}_k\}_{k=0}^{+\infty}$ è un sistema ortonormale per costruzione. Resta da verificare che sia una base. Sia $V = \bigcup_{n=0}^{+\infty} V_n$ il sottospazio delle combinazioni lineari finite dei vettori $\mathbf{e}_k$. Per ipotesi V è denso in H, e poiché

$$H = \overline{V} \oplus V^{\perp}$$

ne segue che $V^{\perp}$ è banale, cioè che se $\mathbf{v}$ è ortogonale a ogni $\mathbf{e}_k$, allora $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Ma questa è una delle condizioni equivalenti della proprietà di essere una base. □

Esercizio 6. Attenti all'intuito

Sia $\{\mathbf{e}\}_{k=0}^{+\infty}$ un sistema ortonormale, e sia W un sottospazio denso.
Si potrebbe pensare che il sistema è una base se, per ogni $\mathbf{w} \in W$ se $(\mathbf{e}_k, w) = 0$ per ogni k, allora $\mathbf{w} = 0$. Equivalentemente, il sistema è una base se non esiste $w \in W$ non nullo tale che $(\mathbf{e}_k, w) = 0$ per ogni k.
Dopo aver letto la sezione successiva, mostrare che questa affermazione è falsa. Suggerimento: $\cos(kx)$ con $k \in \mathbb{N}$ è un sistema ortogonale completo per $L^2(0,\pi)$, così come lo è $\sin(kx)$ con $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

2.4 La serie di Fourier

Per tentare di fare una trattazione autocontenuta, mi appoggio al **teorema di Stone-Weierstrass**, che non dimostro ma che dovrebbe essere noto al lettore, e che generalizza il ben noto teorema di Weierstrass.

Teorema 2.6. Teorema di Stone-Weierstrass
Sia X un compatto di $\mathbb{R}^n$, e sia $\mathcal{A}$ una sottoalgebra delle funzioni continue da X in $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) che contiene la costanti e separa i punti in senso forte, cioè se $x, y \in \Omega$ e $a, b \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), e $x \neq y$ e $a \neq b$, allora esiste $f \in A$ tale che $f(x) = a$ e $f(y) = b$.
Allora le combinazioni lineari di elementi $\mathcal{A}$ sono dense in $\mathbf{C}(X)$ nella norma delle funzioni continue.
Nel caso di funzioni a valori complessi, alle ipotesi va aggiunto che $\mathcal{A}$ sia anche chiusa per coniugazione.

Consideriamo le funzioni

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

definite e periodiche in $[-\pi, \pi]$. Queste funzioni possono essere anche pensate da $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$, dove $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} |\, |z| = 1\}$. Ovviamente $\varphi_k(x) = \frac{1}{2\pi} z^k$, dove $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$. In $\mathbf{C}(\mathbb{S}^1; \mathbb{C})$ l'insieme delle combinazioni lineari di $\{z^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ costituisce una sotto algebra (cioè un sottospazio lineare su $\mathbb{C}$ chiuso per il prodotto), ed è anche chiuso per coniugazione, perché $\overline{z^k} = z^{-k}$.

È facile vedere che queste combinazioni lineari separano i punti, usando le costanti e e^{ikx}. Infatti, dati $\neq y \in [-\pi, pi)$ e $a \neq b$, esistono α e β tali che

$$\begin{aligned} \alpha + \beta \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} &= a \\ \alpha + \beta \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} &= b \end{aligned}$$

e questo sistema ha soluzione perché $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \neq \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$.
Dunque è denso in $\mathbf{C}(\mathbb{S}^1; \mathbb{C})$ nella norma dell'estremo superiore.
Ne segue, in particolare, ogni funzione periodica continua a valori in $\mathbb{C}$ è limite uniforme di combinazioni lineari delle funzioni e^{ikx}, e ogni funzione periodica reale continua è limite uniforme di combinazioni lineari di $\sin(kx)$ e $\cos(kx)$.
Infine, poichè se Ω è limitato la norma $L^2(\Omega)$ è stimata dalla norma $L^\infty(\Omega)$, dalla densità delle funzioni continue in L^2 segue che i polinomi trigonometrici (cioè le combinazioni lineari di e^{ikx}) sono densi in L^2. In questo modo, abbiamo verificato la condizione (b) che garantisce che abbiamo effettivamente una base.

Quando si lavora con la base di Fourier, i coefficienti vengono indicati come

$$\hat{f}_k = (\varphi_k, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x) \, \mathrm{d}x$$

e il fatto che φ_k sia una base vuol dire che per ogni $f \in L^2$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \text{ in } L^2.$$

È relativamente facile mostrare che una maggiore regolarità migliora la convergenza. Se f è di classe C^1, è immediato verificare che

$$\hat{f'}_k = \mathrm{i}k \hat{f}_k$$

Per Bessel-Parseval, la serie dei quadrati dei coefficienti di Fourier di f' è convergente, cioè

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^2 |\hat{f}_k|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f'|^2$$

Ma allora

$$\left| \sum_{|k| \geq n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \hat{f}_k \right| \leq \sum_{|k| \geq n} \frac{|k| |\hat{f}_k|}{|k|} \leq \frac{1}{2} \sum_{|k| \geq n} \left(|k|^2 |\hat{f}_k|^2 + \frac{1}{|k|^2} \right)$$

e la serie a destra è il resto della somma di due serie convergenti. Dunque la convergenza della serie di Fourier è uniforme.

Sulle dispense di Buttà [B] trovate una prova abbastanza semplice della convergenza puntuale della serie di Fourier nei punti in cui f è derivabile. Su [KF] trovate i teoremi ottimali sulla condizione di convergenza puntuale della serie di Fourier (ipotesi del Dini). Infine, il teorema di Stone-Weierstrass assicura per ogni funzione continua l'esistenza di una successione uniformemente convergente di polinomi trigonometrici. Questa successione in generale NON è la serie di Fourier. Però si può dimostrare il teorema di Fejér (vedi [KF]), che asserisce la convergenza uniforme a f continua delle somme di Cesaro della corrispondente serie di Fourier.

A partire da questa base, è facile costruirne una di sole funzioni reali, che sono quindi una base sia per $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ che per $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ Per la coppia k, $-k$ con $k \neq 0$, si considerano le combinazioni

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_k + \varphi_{-k}), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_k - \varphi_{-k})$$

che hanno norma 1, e sono ortogonali (verificare per esercizio). Queste due funzioni coincidono con

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx), \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx).$$

La base va completata con $\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Esercizio 7. Funzioni pari e dispari
Considera $L^2((-a,a),\mathbb{R})$. Mostra che

$$M^p = \{f \in L^2((-a,a),\mathbb{R}) : f(x) = f(-x) \text{ q.o. }\}$$

$$M^d = \{f \in L^2((-a,a),\mathbb{R}) : f(x) = -f(-x) \text{ q.o. }\}$$

sono due sottospazi chiusi ortogonali tra loro, e che

$$L^2((-a,a),\mathbb{R}) = M^p \oplus M^d$$

Esercizio 8. Basi per $L^2((0,\pi))$
Usando l'esercizio precedente, dimostra che $\{\sin(kx)\}_{k\geq 1}$ è una sistema ortogonale completo per $L^2((0,\pi))$ (prolunga per disparità...).
Analogamente, prova che $\{\cos(kx)\}_{k\geq 0}$ è un sistema ortogonale completo per $L^2((0,\pi)$ (prolunga per parità...).

Esercizio 9. Autofunzioni di ∂_x^2 ***in*** $[0,\pi]$
Nota che $\{\sin(kx)\}_{k\geq 1}$ è un sistema ortogonale di autofunzioni di ∂_x^2, con condizioni di Dirichlet omogenee al bordo. Gli autovalori sono $-k^2$ e sono tutti semplici (cioè l'autospazio corrispondente ha dimensione 1). Osserva che $\sin(kx)$ ha $k-1$ zeri interni all'intervallo.
Analogamente, $\{\cos(kx)\}_{k\geq 0}$ è un sistema ortogonale di autofunzioni di ∂_x^2, con condizioni di Neumann omogenee al bordo. Gli autovalori sono $-k^2$ e sono tutti semplici (cioè l'autospazio corrispondente ha dimensione 1). Osserva che $\cos kx$ ha k zeri interni all'intervallo.
In generale, la $k-$esima funzione della base ha k zeri nell'intervallo ($\sin kx$ è la $k-1$-esima funzione).

Esercizio 10. Autofunzioni di ∂_x^4 ***in*** $[0,\pi]$
Trova le soluzioni di

$$\partial_x^4 u = \lambda u$$

con u nulla al bordo e derivate nulle al bordo (stai cercando le autofunzioni per una sbarra metallica murata orizzontalmente agli estremi).
Risolvi lo stesso problema con u nulla al bordo e u'' nulla al bordo. In questo caso la sbarra è incernierata agli estremi, cioè è libera di oscillare intorno agli estremi, dove non agiscono forze che la piegano.

2.5 Basi in $L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$

Sia $\{\phi_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base ortonormale per $L^2(\Omega_1)$ e sia $\{\psi_j(x)\}_{j\in\mathbb{N}}$ in $L^2(\Omega_2)$. Allora

$$\{\phi_i(x)\psi_j(y)\}_{i,j\in\mathbb{N}^2} \text{ è una base ortonormale per } L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$$

L'ortonormalità è di verifica immediata. Sia ora $f(x,y) \in L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Allora esiste finito

$$\int_{\Omega_1} \mathrm{d}x\, |\phi_i(x)| \int_{\Omega_2} \mathrm{d}y\, |\psi_j(y)|\, |f(x,y)| \tag{2.2}$$

Infatti, poiché $\|\psi_j\| = 1$, usando Cauchy-Schwartz l'integrale a destra è stimato da

$$\left(\int_{\Omega_2} |f(x,y)|^2\right)^{1/2}$$

che è una funzione in $L^2(\Omega_1)$, perché $f \in L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Dunque il suo prodotto con $|\phi_i(x)|$ è in L^1, cioè l'integrale (2.2) esiste finito e vale il teorema di Fubini:

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} \phi_i(x)\, \psi_j(y)\, f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{\Omega_1} \mathrm{d}x\, \phi_i(x) \int_{\Omega_2} \mathrm{d}y \psi_j(y) f(x,y)$$

Sia ora f ortogonale a $\phi_i(x)\psi_j(y)$ per ogni coppia di indici $i,j \in \mathbb{N}^2$. Ne segue, per l'identità scritta sopra,

$$0 = \int_{\Omega_1} \mathrm{d}x\, \phi_i(x) \int_{\Omega_2} \mathrm{d}y \psi_j(y) f(x,y)$$

Poiché $\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale,

$$0 = \int_{\Omega_2} \mathrm{d}y\, \psi_j(y) f(x,y)$$

sul complementare di un insieme $Z_j \subset \Omega_1$ di misura nulla. Sia $Z = \bigcup Z_j$; Z è di misura nulla, e sul suo complementare

$$0 = \int_{\Omega_2} \mathrm{d}y\, \psi_j(y) f(x,y) \text{ per ogni } j$$

Poiché $\{\psi_j(y)\}_{j\in\mathbb{N}}$ è una base ortonormale, $f(x,y) = 0$ q.o. in y, se $x \in Z^c$, da cui segue che $f(x,y) = 0$ q.o. in $\Omega_1 \times \Omega_2$.

In conclusione, non esistono funzioni ortogonali a tutte le funzioni del sistema ortonormale $\phi_i(x)\psi_j(y)$. Ne segue che questo sistema è in effetti una base ortonormale.

Si può generalizzare questo esempio, si veda su [RS] il paragrafo sul prodotto tensore di due spazi di Hilbert.

3 Polinomi di Legendre

3.1 Basi di polinomi

Consideriamo $L^2((-1,1))$, e sia $\phi_k(x)$ il sistema ortonormale che si ottiene ortogonalizzando con Gramm-Schmidt la successione di funzioni $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Poiché i polinomi sono densi nella norma uniforme nelle funzioni continue sui compatti, e le funzioni continue sono dense in L^2, il sistema $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è un sistema completo.

È facile verificare che ϕ_k è un polinomio di grado k, che è dispari per k dispari, e pari per k pari (i monomi dispari sono ortogonali a quelli pari in un intervallo simmetrico rispetto a 0). Inoltre, per costruzione,

$$\operatorname{span}\{\phi_k\}_{k=0}^n = \operatorname{span}\{x^k\}_{k=0}^n$$

dunque se $k < n$

$$\int_{-1}^1 x^k \phi_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Ne segue che a meno di coefficienti moltiplicativi, ϕ_n è l'unico polinomio di grado n ortogonale al sottospazio generato da 1, x, $\ldots x^{n-1}$.
Questa costruzione algebrica è semplice, ma poco sintetica. Esiste un modo per dare un'espressione compatta per questi polinomi che nasce dalla seguente osservazione. Sia $n > 0$, e sia $\phi_n^{(1)}$ una primitiva di ϕ_n. Poiché

$$0 = (1, \phi_n) = \int_{-1}^1 \phi_n(x)\,\mathrm{d}x \phi_n^{(1)}(1) - \phi_n^{(1)}(-1) = 0.$$

Ne segue che posso scegliere tra le primitive quella nulla agli estremi: $\phi_n^{(1)}(\pm 1) = 0$. Dunque questa primitiva di ϕ_n è un polinomio che si annulla ai bordi, cioè nella sua fattorizzazione c'è $x^2 - 1$.
Inoltre, se $n > 1$

$$0 = (x, \phi_n) = x\phi_n^{(1)}\big|_{\pm 1} - (1, \phi_n^{(1)}) = (1, \phi_n^{(1)})$$

ma allora anche esiste una primitiva di $\phi_n^{(1)}$ che è un polinomio che si annulla ai bordi e la cui derivata si annulla ai bordi, quindi nella sua fattorizzazione c'è $(x^2-1)^2$. Proseguendo, esiste un $n-$esima primitiva di ϕ_n che ha il fattore $(x^2-1)^n$. A partire da questa osservazione, si comprende che ϕ_n deve essere proporzionale alla derivata $n-$esima di $(x^2-1)^n$. Vediamo i dettagli.

3.2 I polinomi di Legendre G_n

Indico con D la derivata d/dx. Ricordo la formula di Leibniz

$$D^n(fg) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k f\, D^{n-k} g$$

e che, per $k \leq n$

$$D^k x^n = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

a. $D^n(x^2-1)^n$ è un polinomio di grado n, infatti è la derivata $n-$esima di un polinomio di grado $2n$.

b. Se $m<n$, usando la formula di Leibniz,

$$D^m(x^2-1)^n = D^m((x-1)^n(x+1)^n) = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} D^k(x-1)^n\, D^{m-k}(x+1)^n$$

dunque in $x=\pm1$ vale 0.

c. Invece la derivata $n-$esima non è nulla agli estremi:

$$D^n(x^2-1)^n\Big|_{x=\pm1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} D^k(x-1)^n\, D^{n-k}(x+1)^n\Bigg|_{x=\pm1} = (\pm1)^n 2^n n!$$

d. Sia ϕ una funzione regolare; integrando iterativamente per parti, si ha che

$$(\phi, D^n(x^2-1)^n) = (-1)^n(D^n\phi, (x^2-1)^n)$$

e. Scegliendo $\phi = x^m$ con $m<n$, si ottiene che $D^n(x^2-1)^n$ è un polinomio di grado n ortogonale a x^m, per tutti gli $m<n$, e dunque a tutti i polinomi di grado inferiore a n. Ne segue che a meno di costanti moltiplicative, $D^n(x^2-1)^n$ coincide con il polinomio ϕ_n ottenuto per ortogonalizzazione delle potenze di x.

Sia ora

$$G_n(x) = \frac{1}{2^n n!}D^n(x^2-1)^n$$

a. Poichè il termine di ordine massimo è quello che si ottiene derivando n volte x^{2n}, risulta lo sviluppo

$$G_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n n!^2}x^n + \dots$$

b. Per quanto visto sopra, $G_n(\pm1) = (\pm1)^n$

c. Poichè G_n è ortogonale a tutti i polinomio di grado inferiore,

$$(G_n, G_n) = \frac{(2n)!}{2^n n!^2}(x^n, G_n)$$

Ora

$$(x^n, G_n) = \frac{1}{2^n n!}(x^n, D^n(x^2-1)^n)$$

e, usando la proprietà ricavata sopra

$$(x^n, D^n(x^2-1)^n) = (-1)^n n! \int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,\mathrm{d}x$$

Integrando successivamente per parti,

$$\int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (x-1)^n (x+1)^n \,\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{n}{n+1} \int_{-1}^{1} (x-1)^{n-1} (x+1)^{n+1} \,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)} \int_{-1}^{1} (x-1)^{n-2} (x+1)^{n+2} \,\mathrm{d}x =$$
$$= (-1)^n \frac{n!^2}{(2n)!} \int_{-1}^{1} (x+1)^{2n} \,\mathrm{d}x$$

Infine, osservando che

d. $\int_{-1}^{1} (x+1)^{2n} \,\mathrm{d}x = 2^{2n+1}/(2n+1)$ si ottiene

$$(G_n, G_m) = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}$$

I polinomi G_n sono detti polinomi di Legendre, e sono un sistema ortogonale, con la normalizzazione data sopra.

3.3 L'equazione di Sturm-Liouville per G_n

Qui indico le derivate con l'apice: $Df = f' = df/dx$. Considero il polinomio

$$((1-x^2)G_n')'$$

Ricordando qual è il primo termine dello sviluppo in potenze di G_n, è facilmente mostrare che si tratta di un polinomio di grado n, e che nel suo sviluppo, il coefficiente di x^n è $-n(n+1)\frac{1}{2^n n!}$.

Integrando per parti,

$$(((1-x^2)G_n')', G_m) = -\int_{-1}^{1} (1-x^2) G_n' G_m' = (((1-x^2)G_m')', G_n)$$

Ricordando che G_n è ortogonale ai polinomi di grado inferiore e che G_m è ortogonale ai polinomi di gradi inferiore, dalla simmetria di questa espressione si ottiene che se $n \neq m$,

$$(((1-x^2)G_n')', G_m) = 0.$$

Usando che $((1-x^2)G_n')' = -n(n+1)\frac{1}{2^n n!} x^n + \ldots$, si ottiene

$$(((1-x^2)G_n')', G_n) = -n(n+1)(G_n, G_n)$$

Quindi, che per ogni m,

$$(((1-x^2)G_n')' + n(n+1)G_n, G_m) = 0$$

e dunque G_n risolve l'equazione di Sturm-Liouville

$$((1-x^2)G_n')' = (1-x^2)G_n'' - 2xG_n' = -n(n+1)G_n$$

3.4 Zeri di G_n

G_n soddisfa un'equazione differenziale lineare del secondo ordine in $(-1,1)$, ed è una funzione non nulla, dunque non può avere zeri non semplici, in $(-1,1)$ altrimenti il teorema di esistenza e unicità porterebbe a concludere che è una funzione nulla. Inoltre G_n non ha zeri agli estremi, come abbiamo calcolato.
Se G_n ha $m \leq n$ zeri $x_1 \dots x_m$ in $(-1,1)$, tutti semplici, G_n cambia segno negli negli zeri. Dunque

$$\int_{-1}^{1} G_n(x) \prod_{i=1}^{m}(x - x_i)\,\mathrm{d}x$$

ha segno definito. Però G_n è ortogonale ai polinomi di grado inferiore a n, quindi $m = n$. Quindi G_n ha tutti i suoi n zeri semplici e interni a $(-1,1)$.

4 Altre basi di polinomi

Introducendo gli spazi pesati, si costruiscono altri sistemi completi di funzioni ortogonali, legati ai polinomi.

4.1 Spazi pesati L^2_w

Sia $w(x) \geq 0$ su Ω aperto di $\mathbb{R}^n$. Si definisce lo spazio pesato L^2_w attraverso il prodotto scalare

$$(f, g)_w = \int_\Omega w(x)\, f(x) g(x)\, \mathrm{d}x$$

Suppongo che $w(x) = 0$ al più su un sottoinsieme di misura nulla di Ω (per esempio agli estremi, se Ω è in intervallo di $\mathbb{R}$). Inoltre saranno interessanti i casi in cui w diverge in qualche punto.
L'operatore

$$U : L^2_w(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

definito da

$$Uf = \sqrt{w} f$$

è una biezione che conserva il prodotto scalare e dunque la norma (cioè è una biezione isometrica):

$$(f, g)_w = (Uf, Ug).$$

Non è difficile provare che se w è continua le funzioni continue (ma anche quelle C^∞) a supporto compatto sono dense in $L^2_w(\Omega)$, sapendo che sono dense in $L^2(\Omega)$.

Data $f \in L^2_w(\Omega)$, e dato $\varepsilon > 0$; sia $R > 0$ tale che

$$\int_{\Omega \setminus \overline{B}_R} w f^2 < \varepsilon$$

dove $B_R = \{\mathbf{x},\ |\, \|x\| < R\}$; questo R esiste per sommabilità dell'integrando.
Sia ora $\Omega_{M,R} = \{x \in B_R |\, w(x) < M\}$, con $M > 0$. Per continuità di w, questo insieme è aperto, inoltre w è finita su qualunque compatto contenuto in Ω, dunque $\mathcal{X}\{x \in B_R,\, w(x) > M\} \to 0$ q.o. per $M \to +\infty$.
Sia data $f \in L^2_w(\Omega)$. Poichè wf^2 è sommabile, per convergenza dominata

$$\lim_{M \to +\infty} \int \mathcal{X}\{x \in B_R,\, w(x) > M\} w f^2 = 0$$

Dunque, fissato R come sopra, per M abbastanza grande

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_{M,R}} w f^2 < 2\varepsilon$$

Fissato in questo modo M, esiste f_ε a supporto compatto in $\Omega_{M,R}$ tale che

$$\|f - f_\varepsilon||_{L^2(\Omega_{M,R})} < \varepsilon / M$$

La funzione f_ε si può considerare nulla, prolungandola con continuità, in tutto Ω). Dunque

$$\begin{aligned}\|f - f_\varepsilon\|_{L^2_w(\Omega)} &= \|f\|_{L^2_w(\Omega\setminus\Omega_{M,R})} + \|f - f_\varepsilon\|_{L^2_w(\Omega_{M,R})} \\ &\leq 2\varepsilon + M\|f - f_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_{M,R})} \leq 3\varepsilon\end{aligned}$$

Considero ora un caso particolare, più utile. Sia I un intervallo limitato di $\mathbb{R}$, e sia w continua sommabile su I:

$$\int_I \mathrm{d}x w(x) < +\infty$$

Sia f una funzione continua, e sia p_n una sequenza di polinomi che tende a f uniformemente. L'ipotesi di sommabilità di w permette di affermare che questa convergenza è anche in L^2_w, infatti

$$\|f - p_n\|^2_w \leq \|f - p_n\|_\infty \int_I w$$

Poiché le funzioni continue sono dense in $L^2_w(I)$, ne segue che $\operatorname{span}\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è denso in $L^2_w(I)$.

4.2 Polinomi di Tchebyshev

Considero lo spazio pesato

$$L^2_w((-1,-1))$$

con $w = 1/\sqrt{1-x^2}$, dotato del prodotto scalare

$$(f,g)_w = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} f(x)g(x)$$

Con il cambiamento di variabile $\cos x = \vartheta$ si ha

$$\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}\vartheta$$

dunque

$$(f,g)_w = \int_0^\pi f(\cos\vartheta)g(\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta$$

Noto che

$$\mathcal{A} : L^2_w((-1,1)) \to L^2((0,\pi))$$

definito da

$$(\mathcal{A}f)(\theta) = f(\cos\theta)$$

è una biezione isometrica.
Poiché $\{\cos(n\vartheta)\}_{n\geq 0}$ è un sistema ortonormale completo in $L^2((0,\pi))$, ottengo che

$$T_n = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n \arccos x), \quad n \in \mathbb{N}$$

è un sistema ortogonale completo il $L^2_w((-1,1))$. Ne segue che

$$(1-x^2)^{-1/4}T_n(x)$$

è una sistema ortogonale completo il $L^2((-1,1))$

Poiché

$$\cos(n\vartheta) + \mathrm{i}\sin(n\vartheta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\vartheta} = (\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta)^n =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^k\vartheta\, \mathrm{i}^{n-k} \sin^{n-k}\vartheta,$$

passando alle parti reali, ottengo che

$$\cos(n\vartheta) = \cos^n\vartheta - \binom{n}{2}(\cos\vartheta)^{n-2}\sin^2\vartheta + \binom{n}{4}(\cos\vartheta)^{n-4}\sin^4\vartheta - \dots$$

Da questa espressione e dal fatto che $\sin 2\vartheta = 1 - \cos^2\vartheta$ si ha che

$$T_n = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n \arccos x)$$

detto $n-$esimo polinomio di Tchebyshev, è un polinomio di grado n. (per $n = 0$ definisco $T_0 = 1$)

La normalizzazione è tale che $T_n(x) = x^n + \dots$. Per dimostrarlo, si usa lo sviluppo del binomio

$$\cos^n\vartheta = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta}}{2}\right)^2$$

Lascio i dettagli al lettore.

Usando che $D^2_\vartheta \cos(n\vartheta) = -n^2\cos(n\vartheta)$, e che

$$\partial_\theta = -\sqrt{1-x^2}\,\partial_x$$

si mostra facilmente che T_n risolve

$$\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}T_n')' = -n^2 T_n$$

che corrisponde al problema di Sturm-Liouville

$$(\sqrt{1-x^2}T_n')' = -n^2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_n$$

Esplicitando le derivate di T_n:

$$(1-x^2)T_n'' - xT_n' = -n^2 T_n$$

4.3 Polinomi di Hermite

Considero $L^2_w(\mathbb{R})$, con $w = \mathrm{e}^{-x^2}$ e considero i polinomi di Hermite

$$H_n = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} D^n \mathrm{e}^{-x^2}$$

È semplice mostrare che

a. $H_n(x)$ è un polinomio di grado n

b. $H_n(x) = 2^n x^n + \dots$

c. Sia ϕ regolare e a crescita al più polinomiale. Integrando per parti si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2} \phi(x) H_n(x)\, \mathrm{d}x = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} \phi(x) D^n \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} D^n \phi(x) \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x$$

Si può notare che questa affermazione vale anche se $|\phi(x)| \leq c\mathrm{e}^{\alpha x^2}$, con $\alpha \in (0,1)$.

d. Scegliendo $\phi = x^k$ e notando che se $k < n$ allora $D^n x^k = 0$, si ha che $(x^k, H_n)_w = 0$ per $k < n$.

e. Per calcolare la normalizzazione, osservo intanto che

$$(x^n, H_n)_w = \int_{\mathbb{R}} D^n x^n \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x = n!\sqrt{\pi}$$

Ne segue, usando il punto **b**, che

$$(H_n, H_n)_w = 2^n (x^n, H_n) = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

Se ne conclude che H_n è una famiglia di polinomi di grado n, che costituisce un sistema ortogonale in $L^2_w(\mathbb{R})$, e dunque

$$\frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \mathrm{e}^{-x^2/2} H_n(x)$$

è un sistema ortonormale di $L^2(\mathbb{R})$. Successivamente, proveremo che è un sistema ortonormale completo. Per esercizio potete provare a mostrare che

$$\mathrm{span}\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$$

è denso in L^2_w (affermazione equivalente alla completezza dei polinomi di Hermite) ma è improbabile che ci riusciate usando argomenti elementari.

4.4 L'equazione di Sturm-Liouville per i polinomi di Hermite

Calcoliamo preliminarmente H_n'. Poiché H_n ha grado n, H_n' ha grado $n-1$, e, per il punto b. dell'esercizio precedente, $H_n' = n 2^n x^{n-1} + \dots = 2n H_{n-1} + \dots$ Ne segue che

$$H_n' = 2n H_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} c_k H_k$$

Troviamo i coefficienti c_k. Sia $k \leq n-2$:

$$(H_n', H_k)_w = c_k (H_k, H_k)$$

D'altra parte

$$(H_n', H_k) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2} H_n'(x) H_k(x)\, \mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2} H_n(x) \left(-2x H_k(x) + H_k'(x)\right) \mathrm{d}x$$

che è 0 perché $x H_k(x)$ e H_k' sono polinomi di grado minore di n. Dunque

$$H_n'(x) = 2n H_{n-1}$$

Considera ora

$$\left(\mathrm{e}^{-x^2} H_n'\right)' = 2n\left(\mathrm{e}^{-x^2} H_{n-1}\right)' = 2n\mathrm{e}^{-x^2}(-2xH_{n-1} + H_{n-1}') = -2n\mathrm{e}^{-x^2}(H_n + \dots)$$

Ho usato che

$$2xH_{n-1} = 22^{n-1}xx^{n-1} + \dots = H_n + \dots$$

Ne segue che

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\mathrm{e}^{-x^2} H_n'\right)' H_m \,\mathrm{d}x = -2n(H_n, H_m)_w$$

che riscrivo come

$$(\mathrm{e}^{x^2}(\mathrm{e}^{-x^2} H_n')', H_m)_w = -2n(H_n, H_m)_w$$

Quindi, per ortonormalità dei polinomi $\{H_m\}_{m\in\mathbb{N}}$,

$$\mathrm{e}^{x^2}(\mathrm{e}^{-x^2} H_n')' = -2nH_n$$

Equivalentemente, H_n risolve il problema di Sturm-Liouville

$$(\mathrm{e}^{-x^2} H_n')' = -2n\mathrm{e}^{-x^2} H_n$$

e anche

$$H_n'' - 2xH_n' = -2nH_n$$

4.5 Polinomi di Laguerre

Considera $L^2_w(\mathbb{R}^+)$, con $w = \mathrm{e}^{-x}$ e considera i polinomi di Laguerre

$$L_n = \mathrm{e}^x D^n(x^n \mathrm{e}^{-x})$$

Mostra che

a. $L_n(x)$ è un polinomio di grado n

b. $L_n(x) = (-1)^n x^n + \dots + n!$

c. $|D^n(x^n \mathrm{e}^{-x}| \le c_{n,\varepsilon} \mathrm{e}^{-(1-\varepsilon)x}$, per $\varepsilon \in (0,1)$ (questa stima serve per poter fare gli integrali per parti nel punto successivo).

d. Per ogni ϕ regolare che non diverga più di $\mathrm{e}^{\alpha x}$ con $\alpha \in (0,1)$,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\phi(x)L_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \phi(x)D^n x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = (-1)^n \int_0^{+\infty} D^n\phi(x)x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

e. $(x^k, L_n)_w = 0$ per $k < n$

f. $(x^n, L_n)_w = (-1)^n \int_0^{+\infty} D^n x^n x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = (-1)^n n! \int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = (-1)^n n!^2$

g. $(L_n, L_m)_w = n!^2 \delta_{n,m}$

Se ne conclude che L_n è una famiglia di polinomi di grado n, che costituisce un sistema ortogonale in $L^2_w(\mathbb{R}^+)$, e dunque

$$\frac{1}{n!}\mathrm{e}^{-x/2}L_n(x)$$

è un sistema ortonormale di $L^2(\mathbb{R}^+)$. Successivamente, proveremo che è un sistema ortonormale completo. Per esercizio potete provare a mostrare che

$$\mathrm{span}\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$$

è denso in $L^2_w(\mathbb{R}^+)$ (affermazione equivalente alla completezza dei polinomi di Laguerre) ma è improbabile che ci riusciate usando argomenti elementari.

4.6 L'equazione di Sturm-Liouville per i polinomi di Laguerre

Calcoliamo per parti

$$\int_0^{+\infty}\left(x\mathrm{e}^{-x}L_n'\right)' L_m = -\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}L_n'L_m' = \int_0^{+\infty}\left(x\mathrm{e}^{-x}L_m'\right)' L_n$$

Poiché

$$\left(x\mathrm{e}^{-x}L_n'\right)' = \mathrm{e}^{-x}(xL_n'' + (1-x)L_n')$$

e xL_n'' ha grado $n-1$ mentre $(1-x)$ ha grado n, ne segue che per $m \geq n$ il primo integrale l'integrale può essere diverso da zero solo se $m = n$. Analogamente, per $m \leq n$ l'ultimo integrale può essere diverso da zero solo se $m = n$. Quindi l'integrale è nullo se $m \neq n$. Calcoliamone il valore per $m = n$:

$$xL_n'' + (1-x)L_n' = -n(-1)^n x^n + \dots = -nL_n + \dots$$

Dunque per ogni m:

$$\int_0^{+\infty}\left(x\mathrm{e}^{-x}L_n'\right)' L_m = -n(L_n, L_m)$$

Per ortogonalità dei polinomi di Laguerre concludo che

$$\left(x\mathrm{e}^{-x}L_n'\right)' = -nL_n$$

(qui non serve la completezza, perché non si esce dallo spazio dei polinomi). Equivalentemente

$$xL_n'' + (1-x)L_n' = -nL_n$$

Esercizio 11. * Ottimalità di G_n

Sia G_n l'$n-$esimo polinomio di Legendre, e sia $C_n = (2n)!/(2^n n!)$ il coefficiente di x^n in G_n. Il polinomio G_n/C_n è dunque monico. Dimostra che tra tutti i polinomi monici di grado n, G_n/C_n è quello con la minima norma quadratica.
Suggerimento: vedi CH pag 86.

Esercizio 12. * Ottimalità di T_n

Sia T_n l'$n-$esimo polinomio di Tchebyshev. Mostra che tra tutti i polinomi monici di grado n, è quello che minimizza la norma L^∞.

Suggerimento: vedi CH pag 89.

Esercizio 13. * Zeri dei polinomi ortogonali
Sia $\{\phi_n(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ la famiglia di polinomi che si ottiene per ortonormalizzazione di $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ nello spazio pesato $L^2_w((a,b))$, con $w \geq 0$, nullo al più agli estremi a e b. Usando lo stesso ragionamento del punto 3.4 mostra che ϕ_n ha esattamente n zeri semplici in (a,b). Mostra anche che non è necessario conoscere a priori la semplicità degli zeri.

4.7 Funzioni generalizzate di Legendre

Derivando e manipolando le basi di polinomi si ottengono altre basi di polinomi.
Definisco le funzioni generalizzate di Legendre di ordine $k \geq 0$ come

$$G_{n,k} = (1-x^2)^{k/2} D^k G_n$$

che sono funzioni non nulle per $n \geq k$ (e in particolare sono polinomi se k è pari). Mostriamo che a k fissato si tratta di un sistema ortogonale:

$$(G_{n,k}, G_{m,k}) = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^k D^k G_n D^k G_m = (-1)^k \int_{-1}^{1} G_n D^k((1-x^2)^k D^k G_m)$$

infatti, ogni derivata di ordine $h < k$ di $(1-x^2)^k D^k G_m$ si annulla al bordo. Il grado del polinomi che moltiplica G_n è $-k+2k-k+m = m$, dunque l'integrale è nullo se $m < n$. Integrando per parti rispetto a G_m si ottiene la stessa conclusione per $m > n$. A questo punto è semplice concludere che, a meno di costanti, le funzioni $G_{n,k}$ sono il risultato dell'ortogonalizzazione di $(1-x^2)^{k/2}x^n$, con $n \in 0, +\infty$.

Anche le funzioni generalizzate di Legendre soddisfano un'equazione di Sturm-Liouville:

$$((1-x^2)G'_{n,k})' - \frac{k}{1-x^2} G_{n,k} = -n(n+1)G_{n,k}$$

È abbastanza semplice mostrarlo nel caso $k=1$, secondo [CH] segue da un calcolo esplicito, che comunque non sembra facilissimo.

4.8 Funzioni generalizzate di Laguerre

Si possono generalizzare i polimoni di Laguerre. Si considerino i polinomi

$$L_n^{(k)}(x) = (-1)^k D^k L_{n+k}$$

con $n \geq 0$, $k \geq 0$.
Sia $w = \mathrm{e}^{-x}$ e $w_k = x^k \mathrm{e}^{-x}$ È facile mostrare che

a. $L_n^{(k)}$ è un polinomio di grado n

b. Sia $m < n$. Integrando per parti

$$(x^m, L_n^k)_{w_k} = (-1)^k (x^{m+k}, D^k L_{n+k})_w = \frac{(m+k)!}{k!}(x^m, L_n)_w = 0$$

dove ho usato che per ogni $p < q$ si ha che $(x^p, L_q)_w = 0$,

c.
$$(x^n, L_n^{(k)})_{w_k} = \frac{(n+k)!}{k!}(x^n, L_n)_w = (-1)^2 n!^2 \frac{(n+k)!}{k!}$$

Da queste proprietà, procedendo come abbiamo già fatto per i polinomi di Laguerre, si ottiene che $\{L_n^{(k)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è il sistema ortonormale in $L^2_{w_k}$ che si ottiene ortogonalizzando $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Si può mostrare, ma qui non lo farò, che $L_n^{(k)}$ risolvono il problema di Sturm-Liouville

$$xD^2L_n^{(k)} + (k+1-x)L_n^{(k)} = -nL_n^{(k)}$$

Più in generale, dato $\alpha \geq 0$, le funzioni

$$L_n^{(\alpha)} = x^{-\alpha}\mathrm{e}^x D^n(x^{n+\alpha}\mathrm{e}^{-x})$$

risolvono
$$xD^2L_n^{(\alpha)} + (\alpha+1-x)L_n^{(\alpha)} = -nL_n^{(\alpha)}$$

5 Armoniche sferiche

In questa sezione scriveremo il laplaciano sulla superficie sferica, e ne determineremo le autofunzioni.

5.1 Il laplaciano in coordinate generalizzate

Il laplaciano è l'operatore

$$\triangle = \nabla \cdot \nabla = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2$$

Il linea di principio, nulla osta a ottenere la sua espressione nelle variabili $\mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x})$ determinando $\partial_{x_i}^2$ in funzione delle derivate nelle variabili $\mathbf{y}$. Chiunque ci abbia mai provato sa che peró non è semplice e non è la strada giusta, perchè si perde la struttura di divergenza dell'operatore. Procediamo invece cambiando variabile nell'uguaglianza

$$\int \nabla\alpha \cdot \nabla\beta = -\int \triangle\alpha\, \beta$$

valida per tutte le funzioni C_0^∞. Ovviamente $\mathrm{d}x = J(\mathbf{y})\,\mathrm{d}y$, dove

$$J(\mathbf{y}) = \left|\det \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right|$$

Inoltre

$$\partial_{x_i} = \sum_j \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\,\partial_{y_j}$$

e quindi

$$\nabla_x = \left(\partial\Phi^{-1}\right)^t \nabla_y.$$

Scaricando la matrice sul primo termine, l'uguaglianza integrale scritta sopra diventa

$$\int J\,\partial\Phi^{-1}\left(\partial\Phi^{-1}\right)^t \nabla_y\alpha \cdot \nabla_y\beta = -\int J\triangle_y\beta$$

Integrando per parti nel primo membro, si ottiene

$$\triangle_y = \frac{1}{J}\nabla_y \cdot \left(\partial\Phi^{-1}\left(\partial\Phi^{-1}\right)^t \nabla_y\alpha\right)$$

Questa espressione diventa più elegante in termini della **metrica** indotta dal cambiamento di variabili. Senza usare il linguaggio della geometria differenziale, data

$$\Phi : U \to V$$

consideriamo al primo ordine in $\mathbf{h}$ il vettore differenza

$$\Phi(\mathbf{y}+\mathbf{h}) - \Phi(\mathbf{y}) \approx \partial\Phi(y)\mathbf{h}$$

La sua lunghezza al quadrato, come elemento di V, è dato dalla forma quadratica

$$(\partial\Phi\mathbf{h}, \partial\Phi\mathbf{h}) = (\partial\Phi^t\,\partial\Phi\mathbf{h}, \mathbf{h})$$

La matrice
$$g = \partial\Phi^t \, \partial\Phi$$
è la metrica, cioè è la matrice che permette di ridefinire il prodotto scalare nello spazio delle $\mathbf{y}$, in modo che dia la lunghezza euclidea nello spazio delle $\mathbf{x}$. Si noti che g dipende da $\mathbf{y}$, ed è una matrice simmetrica definita positiva.

Notando che
$$g^{-1} = \partial\Phi^{-1} \left(\partial\Phi^{-1}\right)^t$$
e che
$$\det g = \det \partial\Phi^2 = J^2$$
è semplice scrivere l'espressione del laplaciano utilizzando g:
$$\triangle_y \alpha = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \nabla_y \left(\sqrt{\det g} \, g^{-1} \nabla_y \alpha \right)$$
Oltre ad essere più compatta, questa espressione ha il vantaggio di avere significato anche se Φ non è un diffeomorfismo, ma è solo una rappresentazione parametrica di una varità, o, ancora più astrattamente, se g è una metrica assegnata su una varietà riemanniana. In questi casi, l'operatore che abbiamo definito è l'operatore di **Laplace-Beltrami**.

5.2 $\triangle$ in coordinate sferiche e $\triangle_{S^2}$

In coordinate sferiche $\mathbf{x} = (x, y, z)$
$$\begin{aligned} x &= r \sin\vartheta \, \cos\varphi \\ y &= r \sin\vartheta \, \sin\varphi \\ z &= r \cos\vartheta \end{aligned}$$
dove $r > 0$, $\vartheta \in (0, \pi)$, $\varphi = (0, 2\pi)$. Sia
$$\partial_r \mathbf{x} = \mathbf{x}/r \qquad \partial_\vartheta \mathbf{x} = \begin{pmatrix} r\cos\vartheta\cos\varphi \\ r\cos\vartheta\sin\varphi \\ -r\sin\vartheta \end{pmatrix} \qquad \partial_\varphi \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$
Si nota che sono tre vettori tangenti, dunque
$$\mathrm{d}x^2 = r^2\,\mathrm{d}\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}r^2$$
(rispetto alla precedente, in questa espressione, $h_1 = \mathrm{d}\vartheta$, $h_2 = \mathrm{d}\varphi$. $h_3 = \mathrm{d}r$).

Consideriamo la parte della metrica che dipende solo dalle variabili angolari, e per $r = 1$, cioè consideriamo la metrica per la superficie della sfera unitaria S^2:
$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\vartheta \end{pmatrix}, \quad g^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\sin^2\vartheta \end{pmatrix}, \quad \det g = \sin^2\vartheta$$
Dunque l'operatore di Laplace-Beltrami è
$$\triangle_{S^2}\alpha = \frac{1}{\sin\vartheta} \begin{pmatrix} \partial_\vartheta \\ \partial_\varphi \end{pmatrix} \cdot \left(\sin\vartheta \begin{pmatrix} \partial_\vartheta\alpha \\ \partial_\varphi\alpha/\sin^2\vartheta \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sin\vartheta}\,\partial_\vartheta(\sin\vartheta\,\partial_\vartheta\alpha) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\,\partial^2_\varphi\alpha \tag{5.1}$$
Se invece consideriamo tutto il cambiamento di variabili, otteniamo l'espressione del laplaciano in coordinate sferiche
$$\triangle = \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\,\partial_\vartheta(\sin\vartheta\,\partial_\vartheta\alpha) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\,\partial^2_\varphi\alpha + \frac{1}{r^2}\,\partial_r(r^2\,\partial_r\alpha) \tag{5.2}$$

5.3 Le armoniche sferiche

In questa sezione troveremo le autofunzioni dell'operatore di Laplace-Beltrami sulla superficie sferica

$$\triangle_{S^2}\alpha = \lambda\alpha$$

Procediamo per separazione di variabili $\alpha = A(\vartheta)B(\varphi)$. Si ottiene

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\,\partial_\vartheta(\sin\vartheta\,\partial_\vartheta A) + \frac{A}{\sin^2\vartheta}\frac{1}{B}\,\partial^2_\varphi B = \lambda A$$

che è risolubile solo se $B"/B$ è costante. Poiché φ è una variabile angolare, a meno di combinazioni lineari con $|k|$ fissato,

$$B(\varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

L'equazione per A diventa il problema di Sturm-Liouville

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\,\partial_\vartheta(\sin\vartheta\,\partial_\vartheta A) - \frac{k^2 A}{\sin^2\vartheta} = \lambda A$$

Cambio variabile $z = \cos\vartheta$, con $\partial_\vartheta = -\sin\vartheta\,\partial_z$. Si ottiene

$$\partial_z\left((1-z^2)\,\partial_z A\right) - \frac{k^2 A}{1-z^2} = \lambda A$$

di cui conosciamo già un sistema completo di soluzioni in L^2, dato dalle funzioni generalizzate di Legendre:

$$\lambda = -n(n+1) \quad A(z) = G_{n,|k|}(z)$$

Noto che $\int_{-1}^1 f(z)\,\mathrm{d}z = \int f_0^\pi(\cos\vartheta)\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta$, dunque $G_{n,|k|}(\cos\vartheta)$ sono ortogonali rispetto alla misura sulla superficie sferica.
Le armoniche sferiche sono il sistema ortonormale

$$Y_{n,k} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi}G_{n,|k|}(\cos(\vartheta))$$

con $n \geq |k|$ (per n fissato ci sono $2n+1$ funzioni). Ricordando che $\cos\vartheta = z$, e dunque $G_{n,|k|}(z) = (1-z^2)^{|k|/2}D^{|k|}G_n(z) = \sin\vartheta^{|k|}D^{|k|}G_n(z)$, notando che

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varphi}\sin\vartheta^{|k|} = (\cos\varphi\sin\vartheta \pm \mathrm{i}\sin\varphi\sin\vartheta)^{|k|} = (x \pm \mathrm{i}y)^{|k|}$$

con $\pm$ a seconda del segno di k, si ottiene che le armoniche sferiche, espresse nelle variabili x, y, z, sono

$$Y_{n,k} = (x \pm \mathrm{i}y)^{|k|}D^{|k|}G_n(z)$$

cioè polinomi omogenei di grado $|k| + n - |k| = n$.
Consideriamo ora il laplaciano del polinomio omogeneo di grado n dato da $P_n(x,y,z) = r^n Y_{n,k}(\vartheta,\varphi)$:

$$\triangle P_n = r^n\frac{1}{r^2}\triangle_{S^2}Y_{n,k} + Y_{n,k}\frac{1}{r^2}\,\partial_r(r^2 r^n) = r^{n-1}(\triangle_{S^2}Y_{n,k} + n(n+1)Y_{n,k}) = 0$$

Dunque P_n è un **polinomio armonico** di grado n. La relazione con le armoniche sferiche ci fa notare che ci sono $2n+1$ polinomi armonici indipendenti di grado n. Questa relazione si può ovviamente ottenere anche imponendo l'armonicità ad un generico polinomio omogeneo di grado n (*vedi* [CH]).

Concludo con una osservazione geometrica. Indicando con S^2 la superficie sferica, il sottospazio delle funzioni $L^2(S^2, \mathbb{R})$ di autovalore $n(n+1)$ ha dimensione $2n+1$ ed ha come base, a meno di normalizzazioni, le armoniche sferiche (dopo aver separato parte reale e parte immaginaria). Cambiando il sistema di coordinate sferiche (cioè cambiando la terna di riferimento x, y, z), questo spazio deve essere invariante. Dunque, data $M \in SO(3)$ matrice di rotazione nello spazio, M mappa una combinazione di armoniche sferiche in un'altra combinazione di armoniche sferiche, dunque, agisce come una matrice $(2n+1) \times (2n+1)$. Il sottogruppo così ottenuto del gruppo delle matrici $(2n+1) \times (2n+1)$ è una **rappresentazione** del gruppo $SO(3)$.

6 Operatori limitati

Se B_1 e B_2 sono due spazi di Banach, indico con $\mathcal{L}(B_1, B_2)$ lo spazio (di Banach) degli operatori limitati da B_1 a B_2, cioè gli operatori lineari A tali che esiste $c > 0$ per cui

$$\|A\mathbf{v}\|_{B_2} \leq c\|\mathbf{v}\|_{B_1}.$$

È semplice verificare che la limitatezza è una proprietà che si conserva per combinazioni lineari. Indicherò con $\mathcal{L}(B)$ lo spazio degli operatori limitati da B in B.
Se $T \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$, indico con $\operatorname{Ker} T$ il kernel (nucleo) di T:

$$\operatorname{Ker} T = \{\mathbf{v} \in B_1 | \, T\mathbf{v} = 0\} \subset B_1$$

e con $\operatorname{Range} T$ l'immagine di T:

$$\operatorname{Range} T = \{T\mathbf{v} \in B_2 | \, \mathbf{v} \in B_1\} \subset B_2$$

Teorema 6.1. Limitatezza e continuità
$T : B_1 \to B_2$ è limitato se e solo se è continuo.

Dimostrazione. Se T è limitato

$$\|T\mathbf{v} - T\mathbf{u}\|_{B_2} = \|T(\mathbf{u} - \mathbf{v})\|_{B_2} \leq c\,\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|_{B_2}$$

dunque è lipschitziano e quindi continuo.
Se T è continuo, è continuo in 0, dunque dato $\varepsilon = 1$, esiste $\delta > 0$ tale che se $\|\mathbf{v}\|_{B_1} \leq \delta$ allora $\|T\mathbf{v}\|_{B_2} \leq 1$. Poiché

$$T\mathbf{v} = \frac{\|\mathbf{v}\|_{B_1}}{\delta} T\left(\frac{\delta\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_{B_1}}\right)$$

e l'argomento di T ha norma δ, vale

$$\|T\mathbf{v}\|_{B_2} \leq \frac{\|\mathbf{v}\|_{B_1}}{\delta}$$

quindi T è limitato e $\|T\| \leq 1/\delta$. $\square$

Si definisce **norma** di un operatore limitato T il numero

$$\|T\| = \inf\{c \geq 0 | \, \forall \mathbf{v}\ \|T\mathbf{v}\|_{B_2} \leq c\|\mathbf{v}\|_{B_1}\} = \sup_{\mathbf{v} \neq 0} \frac{\|T\mathbf{v}\|_{B_2}}{\|\mathbf{v}\|_{B_1}}$$

È facile osservare che

$$\|T\| = \sup_{\|\mathbf{v}\|_{B_1} = 1} \|T\mathbf{v}\|_{B_2} = \sup_{\|\mathbf{v}\|_{B_1} \leq 1} \|T\mathbf{v}\|_{B_2} = \sup_{\|\mathbf{v}\|_{B_1} < 1} \|T\mathbf{v}\|_{B_2}$$

Come conseguenza della definizione di norma,

$$\|T\mathbf{v}\|_{B_2} \leq \|T\|\,\|\mathbf{v}\|_{B_1}$$

da cui si ottiene che dati $T \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ e $S \in \mathcal{L}(B_2, B_3)$, allora

$$\|ST\| \leq \|S\|\,\|T\|$$

Teorema 6.2. $\mathcal{L}(B_1, B_2)$ **è uno spazio di Banach.**

Dimostrazione. Mostriamo che è uno spazio completo rispetto alla norma. Sia T_n una successione di operatori limitati, di Cauchy rispetto alla norma. Per ogni $\mathbf{v} \in B_1$:

$$\|T_n\mathbf{v} - T_m\mathbf{v}\|_{B_1} \leq \|T_n - T_m\| \, \|\mathbf{v}\|_{B_2}$$

dunque $T_n\mathbf{v}$ è di Cauchy in B_2. Poiché B_2 è completo, $T_n\mathbf{v}$ converge a un elemento di B_2 che indico con $T\mathbf{v}$.
È facile mostrare che $T\mathbf{v}$ è lineare. Resta da mostrare che è limitato e che è il limite in norma operatore di T_n. Poiché $T_m\mathbf{v} \to T\mathbf{v}$ in B_1, Infine

$$\|(T - T_n)\mathbf{v}\| = \lim_{m \to +\infty} \|T_m\mathbf{v} - T_n\mathbf{v}\| \leq \limsup_{n \to +\infty} \|T_m - T_n\| \, \|\mathbf{v}\|$$

Ma fissato $\varepsilon > 0$, esiste N tale che se $m, n \geq M$ $\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$, dunque per $n \geq N$

$$\|(T - T_m)\mathbf{v}\| \leq \varepsilon\|\mathbf{v}\|$$

Questa disuguaglianza implica che T è limitato e che

$$\lim_{m \to +\infty} \|T - T_n\| = 0$$

□

Facciamo qualche esempio.

Esempio 6.1. Proiettori

Sia M un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert H. Sia P_M il proiettore su M. La sua norma è 1, infatti $\|P_M\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{v}\|$, e se $\mathbf{v} \in M$ allora $P_M\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Esempio 6.2. Isometrie

Se $T \in \mathcal{L}(B)$ è biettivo, lineare, e conserva la norma, T è una **biezione isometrica** (che tra un po' chiameremo **operatore unitario**). Nel caso di spazi di Hilbert, la proprietà di conservare la norma coincide con la proprietà di conservare il prodotto hermitiano. Infatti vale la seguente **identità di polarizzazione** (da verificare per esercizio)

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 - \mathrm{i}\|\mathbf{u} + \mathrm{i}\mathbf{v}\|^2 + \mathrm{i}\|\mathbf{u} - \mathrm{i}\mathbf{v}\|^2\right) \tag{6.1}$$

Esempio 6.3. Operatori di moltiplicazione

Sia φ una funzione limitata, allora

$$M_\varphi f \to \varphi f$$

è un operatore limitato e

$$\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty.$$

Esempio 6.4. Operatori integrali

Sia $g(x, y)$ una funzione di due variabili in $\Omega \times \Omega$, e sia

$$Kf(x) = \int_\Omega g(x, y)\, f(y)\, \mathrm{d}y$$

K è detto "operatore integrale" e la funzione g è detta "nucleo integrale". Questo operatore è ben definito se $g(x, y)$ è L^2 in y, infatti in tal caso l'integrale esiste e verifica

$$|Kf(x)|^2 \leq \|f\|^2 \int_\Omega |g(x, y)|^2\, \mathrm{d}y$$

Da questa espressione si nota che l'operatore è anche limitato, infatti

$$\int |Kf(x)|^2\, \mathrm{d}x \leq \|g\|^2_{L^2(\Omega\times\Omega)} \|f\|^2$$

e dunque

$$|K| \leq \|g\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}$$

Come vedremo, un operatore integrale può essere ben definito e limitato anche se g non è in L^2 nelle due variabili.

Esempio 6.5. $\mathcal{F}$ come operatore

La trasformata di Fourier è un operatore integrale, con nucleo $g(\lambda, x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\lambda}$ che è solo limitato e non è in nessuno spazio sommabile. Ciò nonostante, $\mathcal{F}$ è continuo in L^2 (in particolare è isometrico). Ricordo però che $\mathcal{F}$ è definito per densità.

Esempio 6.6. Operatori di convoluzione

Un caso particolare di operatore integrale è quello di operatore di convoluzione:

$$(Kf)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x - y) f(y)$$

In questo caso $g(x - y)$ certamente non può essere sommabile nelle due variabili. D'altra parte

$$(Kf)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) f(x - y)$$

e

$$\|Kf\|^2 \leq \int \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y_1\, \mathrm{d}y_2 |f(x - y_1)|\, |f(x - y_2)|\, |g(y_1)|\, |g(y_2)|$$

Poiché

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y_1)|\, |f(x - y_2)|\, \mathrm{d}x \leq \|f\|^2,$$

si ha

$$\|Kf\|^2 \leq \|g\|_1^2 \|f\|^2,$$

cioè K è limitato se $g \in L^1$. Anche in questo caso, è opportuno pensare l'operatore come definito sulle funzioni C_0^∞, caso in cui è chiaro che l'integrale esiste se $g \in L^1$. Poi si nota che si tratta di un operatore limitato in L^2 e lo si estende per densità.

Esempio 6.7. Operatori di convoluzione in trasformata di Fourier

Rivediamo gli operatori di convoluzione in Fourier, in particolare in dimensione 1. In trasformata di Fourier, le convoluzioni si trasformano in prodotti (anche in questo caso, le identità seguenti vanno provate prima con $f \in \mathrm{C}_0^\infty$ e poi estese per densità):

$$\widehat{Kf}(\lambda) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y g(x-y) f(y) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(x-y)} g(x-y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda y} f(y)$$
$$= \sqrt{2\pi}\hat{g}(\lambda)\hat{f}(\lambda)$$

Dunque l'operatore K in Fourier è l'operatore di moltiplicazione

$$\hat{f} \to \sqrt{2\pi}\hat{g}\hat{f}$$

che è continuo se e solo se $\hat{g}$ è limitata. Una condizione sufficiente è che g sia il L^1, infatti

$$\|\hat{g}\|_\infty \leq \frac{1}{2\pi}\|g\|_1$$

Per esercizio si generalizzi questo esempio a R^n.

Esempio 6.8. Ancora operatori integrali

Do ora una condizione più generale per la limitatezza di un operatore integrale K di nucleo g. Sia

$$M = \max\left(\sup_{z_1 \in \Omega} \int_\Omega \mathrm{d}z_2 |g(z_1, z_2)|,\ \sup_{z_2 \in \Omega} \int_\Omega \mathrm{d}z_1 |g(z_1, z_2)|, \right) \tag{6.2}$$

Se $M < +\infty$, allora K è limitato e $\|K\| \leq M$. Infatti

$$\|Kf\|^2 \leq \int_{\Omega^3} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y_1\, \mathrm{d}y_2 |g(x, y_1)|\, |g(x, y_2)|\, |f(y_1)|\, |f(y_2)|$$

Usando che

$$|f(y_1)|\, |f(y_2)| \leq \frac{1}{2}|f(y_1)|^2 + |f(y_2)|^2$$

e riconoscendo che i due termini hanno lo stesso valore, si ha

$$\|Kf\|^2 \leq \int_\Omega \mathrm{d}y_1 |f(y_1)|^2 \int_\Omega \mathrm{d}x |g(x, y_1)| \int_\Omega \mathrm{d}y_2 |g(x, y_2)|$$

Stimando con M l'ultimo integrale, si ottiene

$$\|Kf\|^2 \leq M \int_\Omega \mathrm{d}y_1 |f(y_1)|^2 \int_\Omega \mathrm{d}x |g(x, y_1)|$$

Stimano con M l'ultimo integrale, si ottiene

$$\|Kf\|^2 \leq M^2 \|f\|^2$$

da cui la tesi.
Per esercizio, mostra che se $g(x, y) = g(x - y)$ con $g \in L^1$, M è limitato.

Esercizio 14. Operatori di moltiplicazione

Data φ limitata, e considera l'operatore di moltiplicazione M_φ. Dimostra che $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$. Nota che in generale non esiste $f \in L^2$ tale che $\|\varphi f\| = \|\varphi\|_\infty \|f\|$; fai un esempio di questo fatto e mostra che ne segue che la sfera unitaria di uno spazio infinito dimensionale non è compatta.

Esercizio 15. Operatori di convoluzione
Trova la trasformata di Fourier di $g(x) = \sin x/x$, ricordando che

$$\int \frac{\sin(\alpha x)}{x} = \pi \mathrm{sign}\,(\alpha).$$

Osserva che $\hat{g}(\lambda)$ è proporzionale alla funzione caratteristica dell'intervallo $[-1, 1]$. Mostra che l'operatore

$$Kf(x) = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin(x-y)}{x-y} f(y)\,\mathrm{d}y$$

è ben definito su S_∞, è continuo in L^2, e quindi è prolungabile ad un operatore su L^2, che ha l'espressione integrale, nel senso del valore principale,

$$Kf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x-y)}{x-y} f(y)\,\mathrm{d}y,$$

ma il nucleo non è in L^1.

6.1 $\ell_2(\mathbb{R})$ e $\ell_2(\mathbb{C})$

Lo spazio delle successioni reali

$$\ell_2(\mathbb{R}) = \{\{\hat{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}} | \sum |\hat{x}_k|^2\}$$

con il prodotto scalare

$$(x, y) = \sum_k \hat{x}_k \hat{y}_k$$

è uno spazio di Hilbert reale separabile, che è in isometria con tutti gli spazi di Hilbert reali separabili. Infatti, dato H, sia $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una base, e sia

$$T : \mathbf{v} \to \{(\mathbf{e}_k, \mathbf{v})\}_{k \in \mathbb{N}}$$

Per Bessel-Parseval, T è una isometria biettiva.

Analogamente, lo spazio delle successioni complesse

$$\ell_2(\mathbb{C}) = \{\{\hat{x}_k\}_{k \in \mathbb{Z}} | \sum |\hat{x}_k|^2\}$$

con il prodotto scalare

$$(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{\hat{x}}_k y_k$$

è uno spazio di Hilbert separabile, in biezione con tutti gli spazi di Hilbert complessi. Si noti che indicizzare le successioni in $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$ è del tutto equivalente. Nel caso complesso uso $\mathbb{Z}$ perché sto pensando all'esempio dato della serie di Fourier.

Nel caso di operatori non limitati, è essenziale descrivere con chiarezza il dominio di definizione, che, nel caso di operatori interessanti, è sempre un sottospazio denso. Quindi, formalmente, un operatore non limitato sarà la coppia $(A, \mathcal{D}(A))$, dove $\mathcal{D}(A)$ è un sottospazio denso, e A è lineare su $\mathcal{D}(A)$. È una facile conseguenza del teorema di prolungamento delle funzioni uniformemente continue il seguente

Teorema 6.3. Teorema di prolungamento
Sia $(A, \mathcal{D}(A))$ un operatore, $\mathcal{D}(A)$ denso e A limitato su $\mathcal{D}(A)$. Allora esiste, unico, un prolungamento continuo di A a tutto lo spazio.

Dimostrazione. Per esercizio. □

Gli operatori illimitati non sono invece prolungabili con continuità.

Esempio 6.9. Operatore di derivazione
In $L^2(\mathbb{R})$, l'operatore ∂_x è definito a valori in L^2 su C_0^∞, ma anche su C_0^1, o sulle funzioni C^1 con derivata quadro-sommabile. Questi tre sottospazi sono tutti possibili domini di definizione di ∂_x.

Esempio 6.10. Operatore di moltiplicazione
Se φ non è limitata su Ω, l'operatore di moltiplicazione M_φ non è limitato. Sia $\Omega = \mathbb{R}$ e $\varphi = 1 + x^2$. Un possibile dominio di definizione di M_φ è il sottospazio delle funzioni a supporto compatto. Un altro è il sottospazio delle funzioni f tali che

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + x^2)^2 |f|^2 < +\infty$$

7 Trasformata di Fourier

Indicherò con S^∞ lo spazio di Schwartz, cioè le funzioni C^∞ da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$, con le derivate che decrescono più rapidamente di ogni polinomio:

$$S^\infty = \{f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})| \ \forall k, n \geq 0 \ \exists c_{k,n} \ \ \forall x \in \mathbb{R}\, (1 + |x|^k)|D^n f| \leq c_{k,n}\}.$$

In [FM] par. 3.2 trovate la dimostrazione che la trasformata di Fourier:

$$(\mathcal{F}f)(\lambda) = \hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x} f(x)\, \mathrm{d}x$$

è biettiva da S^∞ in S^∞, e che la sua inversa è

$$(\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda$$

Inoltre $\mathcal{F}$ (e $\mathcal{F}^{-1}$) è un'isometria rispetto al prodotto L^2:

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(\lambda)}\hat{g}(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} g(x)\, \mathrm{d}x.$$

Questa identità equivale all'identità distribuzionale

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x-y)}\, \mathrm{d}\lambda = \delta(x - y)$$

Queste affermazioni discendono dal fatto che, per funzioni regolari la trasformata di Fourier traduce regolarità in decadimento all'infinito e viceversa:

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(D^n f) = (\mathrm{i}\lambda)^n \mathcal{F}(f) \\ &\partial_\lambda \mathcal{F}f = \mathcal{F}\left((-\mathrm{i}x)^n f(x)\right) \end{aligned}$$

7.1 La trasformata di Fourier il $L^2(\mathbb{R})$

Usando la densità delle funzioni C_0^∞ in $L^2(\mathbb{R})$, si ottiene la densità delle funzioni S_∞ in $L^2(\mathbb{R})$, dunque $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^{-1}$ si prolungano a due funzionali continui su $L^2(\mathbb{R})$, uno l'inverso dell'altro, e che conservano la norma. Dunque $\mathcal{F}$ è una isometria biettiva da $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ in sé.
Insisto su un punto. Se f è il L^2, nulla sappiamo della sommabilità di f. Però l'esistenza del prolungamento di $\mathcal{F}$ garantisce che, q.o. il λ, esiste come valore principale

$$\lim_{L \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^{L} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x} f(x)\, \mathrm{d}x$$

e che questo limite è L^2 in λ.

7.2 La trasformata di Fourier il $L^1(\mathbb{R})$

Se $f \in L^2(\mathbb{R})$, la trasformata esiste e

$$|\mathcal{F}f| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_1$$

Inoltre, poichè $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}$ è continua in λ e limitata da 1, per convergenza dominata $\mathcal{F}f(\lambda)$ è continua il λ (si noti che questa proprietà è falsa se si ha solo $f \in L^2$).
Inoltre, se $f \in \mathrm{C}^1$, $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$ allora

$$\mathcal{F}f'(\lambda) = \mathrm{i}\lambda\mathcal{F}f(\lambda)$$

dunque

$$|\mathcal{F}f(\lambda)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}|\lambda|}\|f'\|_{L^1}$$

e quindi tende a 0 per $\lambda \to \pm\infty$.
Per densità delle funzioni C^1 a supporto compatto in L^1, si ottiene che se $f \in L^1(\mathbb{R})$, allora

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty} \mathcal{F}f(\lambda) = 0$$

(questa asserzione è una variante del lemma di Rienmann-Lebesgue).

La trasformata di Fourier in L^1 non è biettiva sulle funzioni continue, ma rimane iniettiva. La prova non è immediata ma non è difficile. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, dati a, b tali che $-\infty < a < b < +\infty$, consideriamo la funzione

$$g(x) = \int_a^b f(x+t)\,\mathrm{d}t = \int_{a+x}^{b+x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Usando la sommabilità di f, è semplice mostrare che che g è una funzione continua in a, b, x (lascio i dettagli al lettore per esercizio).
Mostriamo che $g \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x|g(x)| \leq \int_a^b \mathrm{d}t \int_{\mathbb{R}} |f(x+t)|\,\mathrm{d}x = (b-a)\|f\|_1$$

Inoltre g è in $L^2(\mathbb{R})$. Infatti, usando Cauchy-Schwartz,

$$\|g\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x|g(x)|^2 \leq \int_a^b \mathrm{d}t_1 \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x|f(x+t_1)| \int_a^b \mathrm{d}t_2|f(x+t_2)| \leq (b-a)^2\|f\|_1^2$$

Usando il teorema di Fubini si ottiene che

$$\hat{g}(\lambda) = \hat{f}(\lambda) \int_a^b \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$

Noto che ad a e b fissati distinti, l'integrale in $\mathrm{d}t$ è

$$\frac{1}{\mathrm{i}\lambda}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda b} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda a})$$

che è non nullo solo in un insieme di misura nulla in λ. Quindi se $\hat{f}(\lambda) = 0$ q.o. allora $\hat{g}(\lambda) = 0$ q.o. e dunque è identicamente nulla (g è in $L^1(\mathbb{R})$, dunque la sua trasformata è una funzione continua).
Poiché $g \in L^2$ e $\mathcal{F}$ è un'isometria biettiva in L^2, ne segue che

$$\|g\|_2 = \|\hat{g}\|_2 = 0$$

e dunque $g(x) = 0$ q.o. in x, ma essendo g continua $g(x) \equiv 0$, in particolare in $x = 0$, da cui ottengo che $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ per ogni a e b. Ma allora f deve essere nulla quasi ovunque.

7.3 Completezza dei polinomi di Hermite e di Laguerre

La completezza in $L^2_w(\mathbb{R})$ con $w = \mathrm{e}^{-x^2}$ dei polinomi di Hermite è equivalente al fatto che se $f \in L^2_w$ verifica per ogni $n \in \mathbb{N}$ che $(x^n, f)_w = 0$, allora f deve essere nulla.

Sia dunque $f \in L^2_w(\mathbb{R})$, con $(x^n, f)_w = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. È immediato notare che $\mathrm{e}^{\delta|x|} \in L^2_w(\mathbb{R})$, per ogni $\delta > 0$, infatti $\int \mathrm{e}^{-x^2+2\delta|x|}$ è finito, Ne segue che

$$\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{\delta|x|}f(x) \in L^1(\mathbb{R})$$

Questa asserzione serve per poter usare il teorema di convergenza dominata:

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(\mathrm{i}\lambda)^n}{n!} f(x)\,\mathrm{d}x$$

L'espressione a destra è assolutamente convergente, infatti è stimata da

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\lambda|^n}{n!} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{\delta|x|}|f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Dunque si può invertire l'ordine dell'integrazione e della somma, ottenendo che

$$\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-x^2} f\right)(\lambda) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_R \mathrm{e}^{-x^2} \frac{(\mathrm{i}\lambda)^n}{n!} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

infatti tutti i termini della serie sono nulli, per l'ipotesi su f. Dall'iniettività della trasformata di Fourier in L^1, segue che $\mathrm{e}^{-x^2} f(x)$ è nulla quasi ovunque, dunque f è nulla in $L^2_w(\mathbb{R})$.

La completezza in $L^2_w(\mathbb{R}^+)$ con $w = \mathrm{e}^{-x}$ dei polinomi di Laguerre è equivalente al fatto che se $f \in L^2_w(\mathbb{R}^+)$ verifica per ogni $n \in \mathbb{N}$ che $(x^n, f)_w = 0$, allora f deve essere nulla.

Seguendo il [CH], sembra che, usando la trasformazione $x = y^2$ si possa mostrare che la completezza dei polinomi in $L^2_{\mathrm{e}^{-y^2}}(\mathbb{R})$ sia equivalente alla completezza dei polinomi in $L^2_{\mathrm{e}^{-x}}(\mathbb{R}^+)$. Però c'è qualche dettaglio che non torna, quindi, seguendo il suggerimento di uno di voi, faccio una dimostrazione diretta usando lo stesso procedimento usato per la completezza dei polinomi di Hermite.

Sia dunque $f \in L^2_{\mathrm{e}^{-x}}$ e sia $(x^n, f)_w = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Con il cambiamento di variabili $x = z^2$ si ha

$$0 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-z^2} z^{2n+1} f(z^2)\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{+\infty} |z|\mathrm{e}^{-z^2} z^{2n} g(z)\,\mathrm{d}z$$

dove $g(z) = f(z^2)$. La funzione g è in $L^2_{|z|\mathrm{e}^{-z^2}}(\mathbb{R})$, infatti

$$\int_{\mathbb{R}} |z|\mathrm{e}^{-z^2} g^2(z) = \int_{\mathbb{R}} |z|\mathrm{e}^{-z^2} f^2(x^2) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} f^2(x)$$

Si mostra facilmente che $\mathrm{e}^{\delta|z|} \in L^2_{|z|\mathrm{e}^{-z^2}}$, per ogni $\delta > 0$. Ne segue che

$$\mathrm{e}^{-z^2}|z|\mathrm{e}^{\delta|z|}g(x) \in L^1(\mathbb{R})$$

Ma allora, per convergenza dominata,

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}|z|g(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-z^2} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(\mathrm{i}\lambda)^n}{n!} z^n |z| g(z)\,\mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_R \mathrm{e}^{-z^2} \frac{(\mathrm{i}\lambda)^n}{n!} z^n|z|g(z)\,\mathrm{d}z.$$

I termini con n dispari sono nulli perché $|z|g(z)$ è pari. Se $n = 2k$ l'integrale è

$$\int_R \mathrm{e}^{-z^2} z^{2k}|z|g(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

per l'ipotesi. Dunque

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}|z|g(z)\,\mathrm{d}z = 0 \quad \forall\lambda.$$

Per iniettività della trasformata di Fourier in L^1,

$$\mathrm{e}^{-z^2}|z|g(z) = 0 \quad \text{q.o.}$$

e quindi g è nulla, da cui $f = 0$ q.o..

8 Operatori da H in sé

Considero adesso un caso particolare di operatori lineari, quelli che vanno da H in $\mathbb{R}$ per spazi reali (in $\mathbb{C}$ per spazi complessi). Tali operatori vengono detti **funzionali lineari**. Nel caso finito dimensione, una applicazione lineare da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ è

$$L\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} z_i x_i$$

per opportuni coefficienti $z_i, i = 1 \dots n$, cioè

$$L\mathbf{x} = (\mathbf{z}, \mathbf{x})$$

In dimensione infinita, fissato $\mathbf{z} \in H$ il funzionale

$$L\mathbf{x} = (\mathbf{z}, \mathbf{x})$$

è lineare continuo, e poiché, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, $|L\mathbf{x}| \leq \|\mathbf{z}\| \, \|\mathbf{x}\|$, e scegliendo $\mathbf{x} = \mathbf{z}$ si ottiene che

$$\|L\| = \|\mathbf{z}\|.$$

Osservo inoltre che

$$\|\mathbf{z}\| = \sup_{\mathbf{x}:\|\mathbf{x}\|=1} |(\mathbf{z}, \mathbf{x})|.$$

Anche in dimensione infinita i funzionali lineari sono tutti e soli quelli ottenuti mediante prodotto scalare con un vettore fissato, come mostra il seguente teorema.

8.1 Teorema di rappresentazione di Riesz

Sia L un funzionale lineare continuo in H spazio di Hilbert reale o complesso. Essendo L lineare, $\operatorname{Ker} L$ è un sottospazio chiuso. Se $\operatorname{Ker} L = H$, la scelta $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ dimostra il teorema. Mostriamo invece che se $\operatorname{Ker} L$ non è tutto H, il suo ortogonale ha dimensione 1.

Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in (\operatorname{Ker} L)^\perp$ non nulli: sia

$$L\mathbf{v}_1 = \alpha_1 \quad L\mathbf{v}_2 = \alpha_2$$

(entrambi non nulli, per ipotesi sulle $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, che sono nell'ortogonale del nucleo). Ma allora

$$L(\mathbf{v}_1/\alpha_1 - \mathbf{v}_2/\alpha_2) = 0$$

e dunque $(v_1/\alpha_1 - v_2/\alpha_2) \in \operatorname{Ker} L$. Ma per ipotesi $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono non nulli e ortogonali al nucleo di L, dunque

$$\mathbf{v}_1/\alpha_1 - \mathbf{v}_2/\alpha_2 = 0$$

Ne segue che esiste un vettore $\mathbf{v}_0$ di norma 1 tale che

$$(\operatorname{Ker} L)^\perp = \{\alpha v_0 | \ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Poiché L è continuo, $\operatorname{Ker} L$ è chiuso, dunque (vedi punto 2.2 a pagina 11)

$$H = \operatorname{Ker} L \oplus (\operatorname{Ker} L)^\perp.$$

Sia $\mathbf{v} \in H$; decomponendolo

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}_0, \mathbf{v})\mathbf{v}_0 + (\mathbf{v} - (\mathbf{v}_0, \mathbf{v})\mathbf{v}_0)$$

dove $(\mathbf{v}_0, \mathbf{v})\mathbf{v}_0$ è la proiezione di $\mathbf{v}$ su $(\operatorname{Ker} L)^\perp$ e dunque $\mathbf{v} - (\mathbf{v}_0, \mathbf{v})\mathbf{v}_0 \in \operatorname{Ker} L$. Ne segue

$$L\mathbf{v} = (\mathbf{v}_0, \mathbf{v})L\mathbf{v}_0 = (\mathbf{z}, \mathbf{v}) \quad \text{e } \|L\| = \|\mathbf{z}\|$$

con $\mathbf{z} = \overline{L\mathbf{v}_0}\mathbf{v}_0$.

Come mi ha fatto notare uno di voi, questa dimostrazione si può semplificare, saltando il passaggio di provare l'unidimensionalità del kernel di L. Riporto qui la dimostrazione. Sia $\mathbf{v}_0$ un vettore unitario in $\operatorname{Ker} L^\perp$; dato $\mathbf{u}$, il vettore $(L\mathbf{v}_0)\mathbf{u} - (L\mathbf{u})\mathbf{v}_0$ è nel $\operatorname{Ker} L$, infatti $L((L\mathbf{v}_0)\mathbf{u} - (L\mathbf{u})\mathbf{v}_0) = 0$. Dunque

$$0 = (\mathbf{v}_0, (L\mathbf{v}_0)\mathbf{u} - (L\mathbf{u})\mathbf{v}_0) = L\mathbf{v}_0\,(\mathbf{v}_0, \mathbf{u}) - L\mathbf{u} \quad \text{da cui } L\mathbf{u} = L\mathbf{v}_0\,(\mathbf{v}_0, \mathbf{u}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

dove $\mathbf{v} = \overline{L\mathbf{v}_0}\mathbf{v}_0$. Il motivo per cui vi ho proposto una dimostrazione più lunga è che mi sembra più semplice ricordarsi alcuni passaggi se ho in mente cosa deve dimostrare, rispetto a ricordarsi un "trucco". Naturalmente il trucco sui usato, è identico a quello che permette di provare che la dimensione dell'ortogonale al kernel è uno.
Per uno spazio di Banach B, lo spazio di Banach di tutti i funzionali lineari e continui è detto **duale** di B e si indica con B'. Per uno spazio di Hilbert H il duale si identifica con H stesso mediante il teorema di rappresentazione di Riesz.
La possibilità di identificare H' con H permette di definire l'**aggiunto** di un operatore da H a H (nota che per uno spazio di Banach B l'aggiunto è un operatore in $\mathcal{L}(B')$)

8.2 Operatore aggiunto

Sia $A \in \mathcal{L}(H)$, fissiamo un vettore $\mathbf{v} \in H$ e consideriamo l'applicazione

$$H \ni \mathbf{u} \to (\mathbf{u}, A\mathbf{v}) \in \mathbb{R}$$

È evidentemente un funzionale lineare in $\mathbf{v}$, e verifica

$$|(\mathbf{u}, A\mathbf{v})| \le \|\mathbf{u}\|\,\|A\mathbf{v}\| \le \|A\|\,\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$$

Per il teorema di rappresentazione, esiste $\tilde{\mathbf{u}}$ tale che per ogni $\mathbf{v}$:

$$(\mathbf{u}, A\mathbf{v}) = (\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})$$

È facile dimostrare che $\tilde{\mathbf{u}}$ dipende linearmente da $\mathbf{u}$, dunque esiste l'operatore lineare A^* tale che $\tilde{\mathbf{u}} = A^*\mathbf{u}$, dunque

$$(\mathbf{u}, A\mathbf{v}) = (A^*\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

Passando ai coniugati si ottiene $(A\mathbf{v}, \mathbf{u}) = (\mathbf{v}, A^*\mathbf{u})$.

Proviamo che A^* è limitato.

$$\|A^*\mathbf{u}\| = \sup_{\|\mathbf{v}\|=1} (A^*\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sup_{\|\mathbf{v}\|=1} (\mathbf{u}, A\mathbf{v}) \le \|A\|\,\|\mathbf{u}\|$$

Ne segue A^* è limitato e che

$$\|A^*\| \le \|A\|$$

Allo stesso modo,

$$\|A\mathbf{v}\| = \sup_{\|\mathbf{u}\|=1} (\mathbf{u}, A\mathbf{v}) = \sup_{\|\mathbf{u}\|=1} (A^*\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq \|A\| \, \|\mathbf{v}\|$$

dunque $\|A\| \leq \|A^*\|$ e dalle due disuguaglianze si ottiene

$$\|A^*\| = \|A\|.$$

Inoltre

$$A^{**} = A$$

infatti per ogni $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$,

$$(A^{**}\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, A^*\mathbf{v}) = (A\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Infine, sempre a proposito delle norme, sia $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$:

$$\|A\mathbf{u}\|^2 = (A\mathbf{u}, A\mathbf{u}) = (A^*A\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq \|A^*A\| \, \|\mathbf{u}\|^2 \leq \|A\| \, \|A^*\| \, \|\mathbf{u}\|^2$$

Dividendo per $\|\mathbf{u}\|^2$ e passando al sup si ottiene

$$\|A\|^2 \leq \|A^*A\| \leq \|A\| \, \|A^*\| = \|A\|^2$$

quindi

$$\|A^*A\| = \|A\|^2$$

Usando che $A^{**} = A$, si prova facilmente che $\|AA^*\| = \|A\|^2$.
Definizione: A è **autoaggiunto** se $A^* = A$.

È facile provare che

$$(AB)^* = B^*A^*.$$

Se A è invertibile e continuo, il teorema dell'applicazione aperta garantisce che A^{-1} è continuo. Inoltre

$$1 = \|\mathbf{I}\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\| \, \|A^{-1}\| \text{ e dunque } \|A\| \, \|A^{-1}\| \geq 1.$$

Più in generale, questo teorema è vero in spazi di Banach.

È anche facile mostrare che

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1*})$$

Nel caso di spazi vettoriali reali di dimensione finita, le matrici autoaggiunte sono le matrici simmetriche, nel caso di spazi vettoriali complessi di dimensione finita la matrice associata all'aggiunto è la coniugata della trasposta.

Esempio 8.1. Aggiunto degli operatori di moltiplicazione
Sia h una funzione data, e sia $M_h \in \mathcal{L}(L^2)$ l'operatore di moltiplicazione

$$M_h f(x) = h(x) f(x)$$

$$M_h^* f(x) = \overline{h(x)} f(x)$$

Dunque M_h è autoaggiunto se e solo se h è reale.

Esempio 8.2. Aggiunto degli operatori di moltiplicazione in ℓ_2
Sia z_k una successione, e sia $M_z \in \mathcal{L}(l_2)$ dato da

$$(M_z x)_k = z_k x_k$$

È facile verificare che $\|M_z\| = \sup_k |z_k|$. Inoltre $M_z^* = M_{\bar{z}}$.

Esempio 8.3. Aggiunto degli operatori integrali
L'aggiunto dell'operatore integrale $Kf(x) = \int_\Omega g(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y$ è l'operatore $K^*f(x) = \int_\Omega g^*(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y$, dove $g^*(x,y) = \overline{g(y,x)}$ (lo si verifichi per esercizio). Ne segue che se g è reale e simmetrico, K è autoaggiunto (ma non è una condizione necessaria).

Esempio 8.4. Aggiunto degli operatori di convoluzione
Nel caso di una convoluzione $g(x,y) = g(x-y)$, dunque l'aggiunto è l'operatore di convoluzione di nucleo $\overline{g(y-x)}$. Se g è reale, l'operatore è autoaggiunto se g è una funzione pari.
Poiché la trasformata di Fourier del nucleo dell'operatore aggiunto è $\overline{\hat{g}}$, la condizione di autoaggiuntezza dell'operatore è

$$\hat{g}(\lambda) = \overline{\hat{g}}(\lambda)$$

cioè se $\hat{g}$ è reale.
Si noti che per una funzione reale la trasformata di Fourier è reale se e solo se la funzione è pari.

Esercizio 16. L'aggiunto di $\mathcal{F}$
Si provi, per esercizio, che $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$. Un operatore il cui aggiunto coincide con l'inverso è detto **unitario**. Usando la decomposizione polare del prodotto hermitiano in somme e differenze di quadrati, si mostri per esercizio che se T è un'isometria biettiva, allora T è unitario.

9 I teoremi dell'alternativa per operatori di rango finito

In questo capitolo discuterò dell'analogo infinito-dimensionale dei teoremi sulla risolubilità delle equazioni lineari nel caso finito dimensionale. Premetto un semplice esempio che mostra che non sarà argomento banale.

9.1 Lo shift su $l_2(\mathbb{N};\mathbb{R})$

Gli operatore di shift permettono di fare esempi semplici sulle differenze tra il caso finito dimensionale e il caso infinito dimensionale.
Sia $S : l_2 \to l_2$ definito da

$$S(x_0, x_1, x_2 \dots) = (0, x_0, x_1 \dots)$$

cioè S è l'operatore che shifta in avanti di un posto la successione, mettendo 0 come primo elemento. Prova i seguenti fatti.

a. S è iniettivo, infatti

$$\operatorname{Ker} S = \{0\}$$

ma non suriettivo, infatti

$$\operatorname{Range} S = \{0\} \times \ell_2$$

(ricorda che invece un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^n$ in sé è iniettiva se e solo se è suriettiva).

b. S conserva il prodotto scalare, ma non essendo biettivo non è un operatore unitario.

c. L'aggiunto di S è definito da

$$S^*(x_0, x_1, x_2 \dots) = (x_1, x_2 \dots)$$

che è lo shift a sinistra.

d. $S^*S = \mathbf{I} \quad$ ma $SS^* \neq \mathbf{I}$

e.

$$\operatorname{Ker} S^* = \mathbb{R} \times 0^{\mathbb{N}} \quad \operatorname{Range} S^* = l_2$$

Da questo esempio si vede che in dimensione infinita, un operatore può essere iniettivo senza essere suriettivo e viceversa. Inoltre la dimensione del kernel di un operatore può essere differente dalla dimensione del kernel dell'aggiunto.

Riassumo qui i risultati principali sulle equazioni lineari in spazi di dimensione finita, e discuto la loro estensione al caso di spazi di dimensione infinita.
Sia A una matrice $n \times n$ in campo complesso, e sia b assegnato, e consideriamo il problema dell'esistenza di $x \in \mathbb{C}^n$ tale che

$$Ax = b$$

SL 1. Se $\det A \neq 0$, per ogni b esiste una ed una sola soluzione: A è invertibile, e l'equazione omogenea associata ha solo la soluzione nulla.

SL 2. Se $\det A = 0$, l'equazione omogenea associata ammette un sottospazio non banale di soluzioni, e l'equazione $Ax = b$ ammette soluzione (non unica) se il rango della matrice completa è uguale al rango di A (Rouché-Capelli). Questa affermazione é infatti equivalente al fatto che b è combinazione lineare delle colonne di A, cioè che b è nel $\mathrm{Range}\, A$

La nozione di determinate e di rango di una matrice non si esportano facilmente al caso infinito-dimensionale, ma i risultati precedenti possono essere riscritti in termini più adatti al caso infinito dimensionale.
Premetto un'osservazione valida in generale negli spazi di Hilbert.

Teorema 9.1. $(\mathrm{Range}\, A)^\perp = \mathrm{Ker}\, A^*$
Sia $y \in \mathrm{Range}\, A$*, dunque esiste* z *tale che* $y = Az$*;*

$$\begin{aligned} (y, x) = 0 \ \forall y \in \mathrm{Range}\, A \iff (Az, x) = 0 \ \forall z \\ \iff (z, A^* x) = 0 \ \forall z \iff x \in \mathrm{Ker}\, A^* \end{aligned}$$

Dunque

$$(\mathrm{Range}\, A)^\perp = \mathrm{Ker}\, A.$$

La stessa conclusione vale scambiando A *e* A^**.*

Da questo fatto, in dimensione finita, se A è un operatore da $\mathbb{C}^n$ in sé:

$$\mathbb{C}^n = \mathrm{Range}\, A \oplus \mathrm{Ker}\, A^* = \mathrm{Range}\, A^* \oplus \mathrm{Ker}\, A \tag{9.1}$$

inoltre, poiché il rango di una matrice è il massimo numero di colonne linearmente indipendenti, e anche il massimo numero di righe linearmente indipendenti,

$$\dim \mathrm{Range}\, A = \dim \mathrm{Range}\, A^*$$

da cui, usando la doppia decomposizione di $\mathbb{C}^n$ fatta sopra, si ottiene

$$\dim \mathrm{Ker}\, A = \dim \mathrm{Ker}\, A^*$$

Il teorema di Rouché Capelli si può dunque riformulare così: $Ax = b$ ha soluzione se e solo se b è nell'immagine di A, cioè se e solo se b è ortogonale al nucleo di A^*. In generale la soluzione non è unica a meno che $\mathrm{Ker}\, diA$ non sia banale, ma in tal caso lo è anche quello di A^* (perché hanno la stessa dimensione) e dunque per qualunque b il sistema ha soluzione unica.
Riassumendo, in dimensione finita

df 1. $\mathbb{C}^n = \mathrm{Range}\, A \oplus \mathrm{Ker}\, A^*$

df 2. $\mathbb{C}^n = \mathrm{Range}\, A^* \oplus \mathrm{Ker}\, A$

df 3. $\dim \mathrm{Ker}\, A = \dim \mathrm{Ker}\, A^*$

Da questi fatti segue che A è invertibile se e solo se $\mathrm{Ker}\, A \neq \{0\}$, infatti vale la seguente catena di equivalenze:

- A è suriettivo se e solo se $\mathrm{Range}\, A = \mathbb{C}^n$

- Range $A = \mathbb{C}^n$ se e solo se Ker A^* è banale (per **df. 2**)
- Ker A^* è banale se e solo se Ker A è banale (per **df. 3**)
- Ker A è banale se e solo se A è iniettivo.

Inoltre **df. 2** afferma che $Ax = b$ ha soluzione se e solo se b è ortogonale a Ker A^*, e la soluzione non è unica se i kernel non sono banali.

In dimensione infinita risultati di questo tipo (che sono veri solo per opportune classi di operatori) si chiamano **teoremi dell'alternativa**, perché affermano che o l'equazione $Ax = b$ ha soluzione per ogni b, e in tal caso è unica, o ha soluzione solo se b è ortogonale al nucleo di A^* (e in tal caso non è unica). Più formalmente, do una definizione. Un operatore limitato A **verifica i teoremi dell'alternativa** se

$$\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Ker} A^*$$

e Range A e Range A^* sono chiusi, e dunque

$$H = \operatorname{Ker} A^* \oplus \operatorname{Range} A = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Range} A^*$$

Naturalmente la condizione sulla dimensione dei nuclei è interessante sono nel caso siano finito-dimensionali.

Esempio 9.1. L'equazione lineare per gli shift

Rileggiamo in termini di risolubilità di equazioni lineari l'esempio sull'operatore di shift S. Anche in questo caso

$$l_2 = \operatorname{Range} S^* \oplus \operatorname{Ker} S = \operatorname{Range} S \oplus \operatorname{Ker} S^*$$

Dunque $S\hat{x} = \hat{b}$ ha soluzione se e solo se $\hat{b}$ è ortogonale al Ker $S*$, cioè se $b_0 = 0$. Si noti che la soluzione se esiste è unica. Invece $S^*\hat{x} = \hat{b}$ ha soluzione per ogni $\hat{b}$, ma non è unica, perché il Ker S^* è non banale. In questo esempio, è vero il "teorema di Roché-Capelli", ma è falso che la dimensione dei nuclei di S e S^* siano uguali.

Considero ora un altro esempio istruttivo.

Esempio 9.2. L'equazione lineare per gli operatori di moltiplicazione

Sia ora $h = \frac{1}{1+x^2}$, e sia $M_h f(x) = h(x)f(x) = \frac{f(x)}{1+x^2}$. Questo operatore è limitato e autoaggiunto in $L^2(\mathbb{R})$, con il nucleo banale. D'altra parte $M_h f = b$ ha soluzione solo se $b(x)(1+x^2) \in L^2(\mathbb{R})$, dunque la condizione di nucleo banale dell'aggiunto non corrisponde alla risolubilità dell'equazione lineare. Il motivo è che, in generale, dal fatto sempre vero che Ker $A^* = (\text{Range } A)^\perp$ si ottiene

$$H = \operatorname{Ker} A^* \oplus (\operatorname{Ker} A^*)^\perp = \operatorname{Ker} A^* \oplus \operatorname{Range} A^{\perp\perp} = \operatorname{Ker} A^* \oplus \overline{\operatorname{Range} A}$$

Dunque dalla banalità di Ker A^* si ottiene la densità del Range A, non che Range A sia tutto H. Nell'esempio che sto considerando, è facile vedere che $M_h L^2$ è denso (basta notare che M_h porta S_∞ in sé), mentre $M_h L^2$ non è tutto L^2. Infatti

$$1/(1+x^2) \in L^2(\mathbb{R})$$

ma la soluzione di

$$\frac{1}{1+x^2} f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{è} \quad f(x) = 1 \notin L^2(\mathbb{R})$$

Dunque in questo caso
$$L^2(\mathbb{R}) \neq \operatorname{Range} M_h \oplus \operatorname{Ker} M_h^*$$
Quello che accade è che $\operatorname{Range} M_h$ non è chiuso.

Questo esempio mostra che si può sperare di riprodurre i risultati finito dimensionali solo per classi di operatori che abbiano l'immagine chiusa.

Riassumendo: anche in dimensione infinita, dato $A \in \mathcal{L}(H)$, si ha
$$(\operatorname{Range} A)^\perp = \operatorname{Ker} A^*$$
ma da questo si può solo concludere che
$$H = \overline{\operatorname{Range} A} \oplus \operatorname{Ker} A^* = \overline{\operatorname{Range} A^*} \oplus \operatorname{Ker} A$$

In dimensione infinita gli operatori che più somigliano a quelli dei casi finito dimensionali sono gli **operatori di rango finito**. Per definizione T è di rango finito se e solo se la dimensione del $\operatorname{Range} T$ è finita. In particolare questo implica che il $\operatorname{Range} T$ è un sottospazio chiuso, essendo finito dimensionale.
Prima di studiarli, premetto una definizione. Dati due vettori a e b, indico con $a \otimes b$ il loro **prodotto tensoriale**[2] come l'operatore in $\mathcal{L}(H)$ definito da
$$a \otimes b\, f = a(b, f)$$
Nota che la matrice associata a $a \otimes b$ è la matrice che si ottiene moltiplicando il vettore colonna di a per il vettore riga b coniugato, cioè $(a \otimes b)_{ij} = a_i \overline{b_j}$.
La sua norma operatoriale è $\|a\|\,\|b\|$ (esercizio) e il suo aggiunto è
$$(a \otimes b)^* = b \otimes a,$$
infatti
$$((a\otimes b)^* y, x) = (y, a\otimes b\, x) = (y, a(b,x)) = (b,x)(y,a) = (b\overline{(y,a)}, x) = (b(a,y), x) = (b\otimes a\, y, x)$$
Verifica per esercizio che se $\{\mathbf{e}_k\}_{k=0}^n$ è una base ortonormale per un sottospazio finito M, allora
$$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_k \text{ è il proiettore su } M$$

9.2 Operatori di rango finito

Sia T è un operatore di rango finito, e sia $\{p_i\}_{i=1}^n$ una base per $\operatorname{Range} T$. Per ogni f si può decomporre Tf nella base per $\operatorname{Range} T$:
$$Tf = \sum_{i=1}^{n} (p_i, Tf) p_i = \sum_{i=1}^{n} (T^* p_i, f) p_i = \sum_{i=1}^{n} (q_i, f) p_i$$

[2] Non è veramente il prodotto tensoriale di a e b, perché, per come è definito, $a \otimes b$ è una forma bilineare su $H' \times H$, mentre il prodotto tensore è definibile, per esempio, come forma bilineare su $H' \times H'$, vedi [RS]. Nel caso di H reale la differenza non si nota.

dove $q_i = T^* p_i$. Usando la definizione di prodotto tensore,

$$T = \sum_{i=1}^{n} p_i \otimes q_i \tag{9.2}$$

da cui

$$T^* = \sum_{i=1}^{n} q_i \otimes p_i$$

Ne segue che l'immagine di T^* è lo span dei vettori q_i dunque anche T^* è di rango finito. Si noti che (9.2) definisce comuque un operatore di rango finito, con $\operatorname{Range} T = \operatorname{span}\{p_i\}_{i=1}^{n}$, anche se i p_i non sono ortonormali, e anche se i p_i non sono indipendenti.
Per quel che riguarda il problema lineare $Tx = b$, si nota subito che $\operatorname{Ker} T$ ha dimensione infinita e dunque T non è un operatore invertibile, inoltre $\operatorname{Range} T^*$ è chiuso (perché di dimensione finita) dunque

$$H = \operatorname{Ker} T^* \oplus \operatorname{Range} T$$

e $Tx = b$ ha soluzione (non unica) se e solo se b è ortogonale al nucleo di T^*. In questo senso, il teorema di Rouché-Capelli vale per gli operatori di rango finito.

Esercizio 17. Operatori di rango finito
Sia $T = \sum_i q_i \otimes p_i$. Mostra che se $\dim \operatorname{Range} T = n$, allora $\{p_i\}_{i=1}^{n}$ è un sistema di n vettori linearmente indipendenti e $\{q_i\}_{i=1}^{n}$ è un sistema di n vettori linearmente indipendenti.

In pratica gli operatori di rango finito sono degli operatori finito dimensionali, immersi in uno spazio infinito dimensionale, quindi la teoria delle equazioni lineari per questi operatori è banale. Più significativo è il caso di perturbazioni di rango finito dell'operatore identità, cioè lo studio di $\mathbf{I} - T$. L'interesse per questo tipo di operatori discende dalla ricerca degli autovalori di T, infatti λ è un autovalore di T se e solo se $\operatorname{Ker}(\lambda \mathbf{I} - T)$ è non banale. Sviluppare la teoria per $\mathbf{I} - T$ permetterà dunque di considerare il problema agli autovalori $Tu = \lambda u$, nel caso di autovalori non nulli.

9.3 $\mathbf{I} - T$ con T di rango finito

Sia T un operatore di rango finito dato da

$$T = \sum_{i=1}^{n} p_i \otimes q_i$$

Sia M il sottospazio finito (e dunque chiuso) generato dai vettori p_i e q_i, con $i \in 1, \dots n$. Poiché M è chiuso

$$H = M \oplus M^{\perp}$$

Per definizione di M:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Range} T \subset M, \quad \text{da cui} \quad M^{\perp} \subset \operatorname{Ker} T^* \\ &\operatorname{Range} T^* \subset M, \quad \text{da cui} \quad M^{\perp} \subset \operatorname{Ker} T \end{aligned}$$

Poiché H si decompone in somma diretta di M e $M^\perp$, posso scrivere i suoi elementi, in modo unico, come somma di elementi di M e di $M^\perp$: $z = z_M + z_\perp$, con $z_M \in M$ e $z_\perp \in M^\perp$. Vediamo come agisce $\mathbf{I} - T$:

$$(\mathbf{I} - T)z = (\mathbf{I} - T)z_M + (\mathbf{I} - T)z_\perp = (\mathbf{I} - T)z_M + z_\perp$$

infatti $z_\perp \in M^\perp \subset \operatorname{Ker} T$. Si osservi inoltre che $(\mathbf{I} - T)z_M \in M$. Ne segue che

$$\operatorname{Ker}(\mathbf{I} - T) = \{z_M \in M : (\mathbf{I} - T)z_M = 0\}$$

che coincide con il nucleo della restrizione a M dell'operatore $I - T$. Analogamente

$$\operatorname{Ker}(\mathbf{I} - T^*) = \{z_M \in M : (\mathbf{I} - T^*)z_M = 0\}.$$

Su M, che è di dimensione finita, gli operatori $I - T$ e $I - T^*$ sono uno l'aggiunto dell'altro, dunque

$$\dim \operatorname{Ker}(\mathbf{I} - T) = \dim \operatorname{Ker}(\mathbf{I} - T^*) < +\infty. \tag{9.3}$$

Studiamo ora le immagini. Dall'identità $(\mathbf{I} - T)(z_M + z_\perp) = (\mathbf{I} - T)(z_M) + z_\perp$ si ottiene che

$$\operatorname{Range}(\mathbf{I} - T) = (\mathbf{I} - T)(M) \oplus M^\perp$$

dove $(\mathbf{I} - T)(M) \subset M$ è l'immagine della restrizione a M dell'operatore $\mathbf{I} - T$. Dunque l'immagine è somma diretta di $M^\perp$, che è un sottospazio chiuso, e dell'immagine della restrizione di $\mathbf{I} - T$ a M, che è un sottospazio finito e dunque chiusto. Ne segue che l'immagine è somma diretta di due sottospazi chiusi ortogonali tra loro, dunque è un sottospazio chiuso (lo si provi per esercizio). Lo stesso risultato vale per $\operatorname{Range}(\mathbf{I} - T^*)$. Quindi

$$\begin{aligned} H &= \operatorname{Ker}(\mathbf{I} - T) \oplus \operatorname{Range}(\mathbf{I} - T^*) \\ &= \operatorname{Ker}(\mathbf{I} - T^*) \oplus \operatorname{Range}(\mathbf{I} - T) \end{aligned}$$

Questa uguaglianza, insieme alla (9.3), dimostra che per gli operatori del tipo $\mathbf{I} - T$, con T di rango finito, valgono i teoremi dell'alternativa.

Un'osservazione finale: se $\operatorname{Ker}(\mathbf{I} - T)$ è banale, esiste l'inverso che è un operatore limitato. Nel caso in cui il kernel non sia banale, e l'equazione $(\mathbf{I}-T)x = b$ abbia soluzione, la soluzione è della forma $x = x_0 + x_1$, con $x_0 \in \operatorname{Ker}(\mathbf{I} - T)$ soluzione qualunque dell'omogenea, e x_1 unica soluzione di

$$(\mathbf{I} - T)x_1 = b \quad \text{con } x_1 \in (\operatorname{Ker}(\mathbf{I} - T))^\perp$$

La soluzione in x_1 è unica perché $\mathbf{I} - T$ ristretto all'ortogonale al suo kernel è anche iniettivo oltre a essere suriettivo, dunque è invertibile e l'inverso è continuo. In particolare esiste C tale che $\|x_1\| \le C\|b\|$. Una stima di questo tipo, cioè che a meno della soluzione dell'omogenea, la soluzione dell'equazione è ottenuta da b mediante un operatore limitato, sarà vera tutte le volte che potremo dimostrare un teorema dell'alternativa.

9.4 Equazioni integrali di Fredholm per nuclei separabili

Considero $L^2(\Omega; \mathbb{R})$ e sia $g(x, y)$ un **nucleo integrale** assegnato e sia b una funzione data. L'equazione

$$f(x) - \int_\Omega g(x, y) f(y) \, dy = b(x)$$

è detta equazione integrale di Fredholm. Sia

$$Kf(x) = \int_\Omega g(x,y)f(y).$$

Il suo aggiunto è

$$K^*f(x) = \int_\Omega g(y,x)f(y)$$

Il nucleo g è **separabile** se

$$g(x,y) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x)q_i(y)$$

con p_i e q_i in $L^2(\Omega)$. In tal caso

$$Kf(x) = \sum_{i=1}^{n} (q_i, f)p_i(x)$$

è di rango finito, quindi per l'equazione

$$(\mathbf{I} - K)f = b$$

valgono le conclusioni descritte prima.

Nella dimostrazione del teorema dell'alternativa per gli operatori di rango finito, abbiamo proiettato su M che contiene il range di K e di K^*. Nella pratica si procede esplicitamente, limitandosi a proiettare sul range di K^*. Come esempio userò operatori integrali a nucleo separabile, ma la teoria è del tutto generale.
Consideriamo il problema di trovare soluzioni all'equazione di Fredholm $f - Kf = b$ per un nucleo separabile g. Allora

$$Kf(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x) \int_\Omega q_i(y)f(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{n} p_i(x)(q_i, f)$$

Siano $A_{ij} = \int_\Omega q_i(x)p_j(x)\,\mathrm{d}x$. Moltiplichiamo scalarmente l'equazione per q_i:

$$(q_i, f) - \sum_{j=1}^{n} (q_i, p_j)(q_j, f) = (q_i, b)$$

Indichiamo con $f_i = (q_i, f)$ e $b_i = (q_i, b)$. Si ottiene il sistema

$$f_i - \sum_{j=1}^{n} A_{ij} f_j = b_i \quad i = 1 \dots n$$

Se la matrice $\mathbf{I} - A$ è invertibile, il sistema ha sempre soluzione, e la soluzione del sistema originario è

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j p_j(x) + b(x)$$

(si noti che sull'ortogonale ai p_j la funzione f coincide con b). Se la matrice non è invertibile, il sistema ha soluzione se e solo il vettore $(b_1, \dots b_n)$ è ortogonale al nucleo della matrice $\mathbf{I} - A^*$. Consideriamo l'equazione aggiunta

$$h(x) - \sum_{j=1}^{n} q_j(x) \int_{\Omega} p_j(y) h(y) = 0$$

e moltiplicliamola scalarmente per p_j indicando con $h_i = (p_i, h)$. Si ottiene l'equazione omogenea aggiunta

$$h_i - \sum_{j=1}^{n} A_{ji} h_j = 0$$

Se questo sistema lineare ha soluzioni non banali, il kernel di $\mathbf{I} - K^*$ è dato dalle funzioni h tali che

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i q_i(x)$$

La condizione di ortogonalità di un vettore b a queste soluzioni è

$$(b, h) = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} h_i (q_i, b) = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} h_i b_i = 0$$

cioè esattamente l'ortogonalità del vettore $(b_1, \dots b_n)$ ai vettori $(g_1, \dots g_n)$ nel nucleo della matrice $\mathbf{I} - A^*$.

Esercizio 18. Un'equazione di Fredholm a nucleo separabile

Mostra che l'equazione

$$f(x) - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x y^3 f(y) \, \mathrm{d}y = b(x)$$

ha sempre soluzione, e determinala.

Questo esercizio si risove così: si ha

$$f(x) - \frac{x}{2} \int_{-1}^{1} y^3 f(y) \, \mathrm{d}y = b(x)$$

dunque se fosse noto il valore di

$$C_f = \int_{-1}^{1} y^3 f(y)$$

la soluzione sarebbe semplicemente

$$f(x) = b(x) + \frac{1}{2} C_f x$$

Moltiplicando per x^3 l'equazione e integrando, si ottiene un equazione per C_f:

$$\int_{-1}^{1} x^3 f(x) \, \mathrm{d}x - C_f \int_{-1}^{1} \frac{x^4}{2} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^3 b(x) \, \mathrm{d}x$$

Cioè

$$C_f - \frac{1}{5} C_f = \int_{-1}^{1} x^3 b(x) \, \mathrm{d}x$$

che ha sempre soluzione:
$$C_f = \frac{5}{4}\int_{-1}^{1} x^3 b(x)\,\mathrm{d}x$$
Dunque l'equazione di partenza è sempre risolubile. Noto infine che le soluzioni dell'omogenea si ottengono per $b = 0$ e sia ha $C_f = 0$ e dunque $f = 0$, cioè il nucleo è banale.

Esercizio 19. Un'altra equazione di Fredholm a nucleo separabile
Sia ora
$$f(x) - \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} xy^3 f(y)\,\mathrm{d}y = b(x)$$
Mostra che ha soluzione se $b(x) = x^2$, ma non se $b(x) = x$.

Procedendo come sopra, definisco
$$C_f = \int_{-1}^{1} y^3 f(y)\,\mathrm{d}y$$
moltiplico l'equazione per x^3 e integro, ottenendo
$$C_f - C_f = \int_{-1}^{1} x^3 b(x)\,\mathrm{d}x$$
che non ha soluzione se $\int_{-1}^{1} x^3 b(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$, e in tal caso l'equazione di partenza non ha soluzione. Invece, se $\int_{-1}^{1} x^3 b(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$, l'equazione per C_f è risolta da qualunque C_f dunque la soluzione è data da
$$f(x) = c\frac{5}{2}x + b(x)$$
Nota che $\{cx\}_{c\in\mathbb{R}}$ è il sottospazio delle soluzioni dell'omogenea, mentre $\{cx^3\}_{c\in\mathbb{R}}$ è il sottospazio delle soluzioni dell'omogenea del problema aggiunto.

9.5 Piccole perturbazioni

Estendiamo la teoria fatta per $I - T$ con T di rango finito. La teoria di questa estensione è iniziata con lo sviluppo in serie di polinomi dei nuclei integrali regolari, che evidentemente dà un'approssimazione di rango finito all'operatore integrale. Qui presento direttamente la versione astratta dei risultati.

9.6 Operatori piccoli e serie di Neumann

In dimensione finita, se A è una matrice invertibile e B una matrice qualunque, per continuità del determinante,
$$\text{se } |\varepsilon| \text{ è suff. piccolo, allora } \det(A - \varepsilon B) \neq 0$$
e dunque $A - \varepsilon B$ è invertibile. L'uso della norma operatoriale permette di chiarire meglio il valore di ε. Consideriamo per semplicità $A = \mathbf{I}$. Ricordando che
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k\in\mathbb{N}} x^k$$

vorremmo provare che

$$(\mathbf{I}-B)^{-1}=\sum_{k\in\mathbb{N}}B^k$$

La serie a destra (detta serie di Neumann) è totalmente limitata se $\|B\|<1$ infatti

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\|B^k\|\leq\sum_{k\in\mathbb{N}}\|B\|^k=\frac{1}{1-\|B\|}$$

dunque converge in norma ad operatore limitato. Per la convergenza totale, possiamo moltiplicare a sinistra termine a termine per $I-B$ e ottenere

$$(\mathbf{I}-B)\sum_{k\in\mathbb{N}}B^k=\sum_{k\in\mathbb{N}}(B^k-B^{k+1})=\sum_{k=0}^{+\infty}B^k-\sum_{k=0}^{+\infty}B^k=B^0=\mathbf{I}$$

e, poiché B commuta con tutte le sue potenze, lo stesso si ottiene moltiplicando a destra. Dunque la serie di Neumann effettivamente definisce l'inverso di $\mathbf{I}-B$.

Se A è invertibile, allora, formalmente,

$$(A-B)^{-1}=(\mathbf{I}-A^{-1}B)^{-1}A^{-1}=\sum_{k\in\mathbb{N}}(A^{-1}B)^kA^{-1}$$

e analogamente

$$(A-B)^{-1}=A^{-1}\sum_{k\in\mathbb{N}}(BA^{-1})^k$$

Le serie convergono se $\|A^{-1}B\|<1$ $\|BA^{-1}\|<1$. Poiché e $\|A^{-1}B\|$ e $\|BA^{-1}\|$ sono maggiorate da $\|A^{-1}\|\,\|B\|$, ne segue che per la convergenza è sufficiente che $\|B\|\leq 1/\|A^{-1}\|$. Ne segue che il sottoinsieme degli operatori invertibili è un aperto nella topologia data dalla norma operatoriale.

9.7 Equazioni integrali di Volterra

Un'equazione del tipo

$$f(x)-\int_0^x g(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y=b(x)$$

Si chiama equazione di Volterra. Nota che se vuoi trovare una soluzione dell'equazione differenziale ordinaria lineare non omogenea

$$\dot{f}(t)=a(t)f(t)+g(t),$$

integrando da 0 a t ottieni

$$f(t)-\int_0^t a(s)f(s)\,\mathrm{d}s=f(0)+\int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s$$

e questa è un'equazione di Volterra. (in generale le equazioni differenziali ordinare si possono trasformare in equazioni integrali).
Nota anche che questo è un caso particolare di equazione di Fredholm.

Tornando all'equazione di Volterra, considero funzioni in $\Omega = [0, \ell]$, e assumo che il nucleo sia una funzione continua e limitata $|g(x, y)| \leq M$. Indico con

$$
\begin{aligned}
K_F f &= \int_0^\ell g(x, y) f(y)\, \mathrm{d}y \\
K_V f &= \int_0^x g(x, y) f(y)\, \mathrm{d}y = \int_0^\ell g(x, y) \mathcal{X}\{y < x\}\, f(y)\, \mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

Considero le due equazioni di Fredholm e Volterra corrispondenti, con μ numero reale.

$$f - \mu K_F f = b \qquad f - \mu K_V f = b$$

È facile provare che

$$|K_F f(x)| \leq M\ell \|f\|_\infty$$

e che la stessa stima vale per $K_V f$. Dunque, per μ abbastanza piccolo, cioè se $|\mu|\, M\ell\|f\|_\infty < 1$, entrambe le equazioni sono risolte dalla serie di Neumann applicata a b, sommata in L_∞. In particolare, nel caso di Fredholm, si riconosce la serie di Neumann dentro la seguente espressione di f in funzione di b, ottenuta iterando l'equazione:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^n \int_{\Omega^n} g(x, y_1) g(y_1, y_2) \ldots g(y_{n-1}, y_n) b(y_n)\, \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n$$

In realtà, l'equazione di Volterra è risolubile per ogni μ, come è facile provare. Infatti si può fare una stima migliore $K_V^n b$:

$$
\begin{aligned}
|K_V^n b| &\leq \left| \int_0^x \mathrm{d}y_1 k(x, y_1) \int_0^{y_1} \mathrm{d}y_2 k(y_1, y_2) \cdots \int_0^{y_{n-1}} \mathrm{d}y_n k(y_{n-1}, y_n) b(y_n) \right| \leq \\
&\leq M^n \int_0^x \mathrm{d}y_1 \int_0^{y_1} \mathrm{d}y_2 \cdots \int_0^{y_{n-1}} |b(y_n)|)\, \mathrm{d}y_n \leq \|b\|_\infty M^n \ell^n / n!
\end{aligned}
$$

dunque la serie di $\mu^n K_V^n b$ converge per qualunque μ.

Esercizio 20. Equazioni di Fredholm e di Volterra per nuclei L^2

Mostra che se $g \in L^2((0, \ell))^2$ allora K_F e K_v sono due operatori limitati, e dunque per μ piccolo le equazioni

$$f - \mu K_F f = b \quad \text{e} \quad f - \mu K_V f = b$$

hanno soluzione per ogni b,

Assumi che $|g(x, y)| \leq p(x) q(y)$ con $p, q \in L^2((0, \ell)$, che puoi assumere, per comodità, più grandi di 1. Mostra iterativamente che puoi stimare $K_V^n b$ con

$$\|K_V^n b\|^2 \leq \ell^{n-1} \|b\|\, \|p\| \left(\int_0^x \mathrm{d}y_1 \int_0^{y_1} \mathrm{d}y_2 \cdots \int_0^{y_{n-1}} \mathrm{d}y_n q^2(y_1) p^2(y_1) \cdots q^2(y_n) p^2(y_n) \right)^{1/2}.$$

Usa il fatto che, se $\alpha(y_1 \ldots y_n)$ è positiva e simmetrica per permutazioni delle variabili, allora

$$\int_0^x \mathrm{d}y_1 \int_0^{y_1} \mathrm{d}y_2 \cdots \int_0^{y_{n-1}} \mathrm{d}y_n \alpha(y_1, \ldots y_n) = \frac{1}{n!} \int_{[0,x]^n} \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n \alpha(y_1, \ldots y_n)$$

per concludere che

$$\|K_V^n\| \leq \frac{(c\ell)^{n-1}}{\sqrt{n!}}$$

e che dunque $f - \mu K_V f = b$ ha sempre soluzione.

Passo ora a piccole perturbazioni di operatori di rango finito. Premetto un'osservazione, facile da dimostrazione: sia A è un operatore di rango finito, e sia B un operatore limitato, allora

$$AB \text{ e } BA \text{ sono di rango finito.}$$

Teorema 9.2. Piccole perturbazioni di operatori di rango finito
Sia K un operatore di rango finito, R un operatore con $\|R\| < 1$, $T = R + K$. Per l'operatore $I - T$ vale il teorema dell'alternativa di Fredholm.

Dimostrazione. Dimostrazione. Definendo $A = I - R$ e notando che A è invertibile (in serie di Neumann) perché $\|R\| < 1$, riscrivo

$$I - T = (I - R) - K = A - K = A(I - A^{-1}K) = A(I - S)$$

con $S = A^{-1}K$ operatore di rango finito, perché K ha rango finito. Passando all'aggiunto

$$I - T^* = (I - S^*)A^*$$

Per la teoria svolta sugli operatori di rango finito,

$$\dim \operatorname{Ker}(I - S) = \dim \operatorname{Ker}(I - S^*)$$

Inoltre

$$\operatorname{Ker}(I - T) = \operatorname{Ker}(A(I - S)) = \operatorname{Ker}(I - S)$$

perché A è una biiezione, e

$$\operatorname{Ker}(I - T^*) = \operatorname{Ker}((I - S^*)A^*) = A^{*-1}\operatorname{Ker}(I - S^*)$$

perché A^* è una biiezione. Quest'ultima identità implica che

$$\dim \operatorname{Ker}(I - T^*) = \dim \operatorname{Ker}(I - S^*) = \dim \operatorname{Ker}(I - S) = \dim \operatorname{Ker}(I - T) < +\infty$$

Controllo la chiusura delle immagini

$$\operatorname{Range}(I - T) = \operatorname{Range}(A(I - S)) = A \operatorname{Range}(I - S)$$

e dunque è chiusa, perchè $I - S$ ha immagine chiusa e A è un omeomorfismo.

$$\operatorname{Range}(I - T^*) = \operatorname{Range}((I - S^*)A^*) = \operatorname{Range}(I - S^*)$$

che è chiusa. □

9.8 Convergenza debole

Nello studio dell'equazione delle onde e nella meccanica quantistica è essenziale studiare il problema agli autovalori

$$Tx = \lambda x \text{ cioè } (\lambda \mathbf{I} - T)x = 0$$

Il risultato perturbativo del capitolo precedente si può applicare a questa equazione solo se la perturbazione R ha norma più piccola di λ. Dunque se vogliamo usare il teorema dell'alternativa per studiare il problema agli autovalori per ogni λ, dobbiamo considerare operatori che sono di rango finito a meno di una perturbazione arbitrariamente piccola. Dobbiamo cioè identificare quali sono gli operatori che sono limite di operatori di rango finito. Mostrerò che si ottiene un sottospazio più grande di quello degli operatori di rango finito.

L'estensione dei teoremi dell'alternativa a una classe di operatori più ampia di quella degli operatori di rango finito è un argomento ha a che fare con la compattezza in spazi di Hilbert. Osservo innanzi tutto che i chiusi e limitati in spazi di Hilbert infinito dimensionali non sono compatti. L'esempio più semplice è quello costituito dalla successione di una base ortonormale: sono tutti vettori di norma 1, ma sono a due a due ortogonali, dunque $\|e_k - e_h\| = \sqrt{2}$ e la successione non può convergere.
D'altra parte, se K è un operatore di rango finito, l'immagine mediante K di un insieme limitato è un limitato in un sottospazio finito dimensione e dunque è precompatto. Mostrerò che questa è esattamente la proprietà conservata da operatori che sono limite di operatori di rango finito.

Però è più semplice formulare questa parte di teoria in termini di successioni **debolmente convergenti**: in termini fisici, si tratta di spostare lo sguardo dalla successione agli osservabili, cioè ai prodotti scalari con altri vettori.

Definizione.
La successione f_n **converge debolmente** a f e si indica con

$$f_n \rightharpoonup f, \iff \forall g \in H \ (g, f_n) \to (g, f)$$

Non è difficile provare che il limite debole è unico, e che se $f_n \to f$ in norma, allora $f_n \rightharpoonup f$. Inoltre in spazi di dimensione finita $f_n \rightharpoonup f$ se e solo se $f_n \to f$ in norma (lo si dimostri per esercizio). In dimensione infinita l'equivalenza è falsa, come mostra questo esempio.

Esempio 9.3. Convergenza debole a 0 di vettori ortonormali
Sia $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sistema ortonormale infinito, allora

$$e_n \rightharpoonup 0$$

infatti,

$$(e_n, g) = \hat{g}_n \to 0 \text{ perché } \sum_n |\hat{g}_n|^2 \le \|g\|^2$$

per la disuguaglianza di Bessel. D'altra parte $\|e_n\| = 1$, dunque e_n non converge a 0 in norma. Chiamerò spesso **convergenza forte** la convergenza in norma.

Proposizione 9.1. Condizioni equivalenti di convergenza debole
Sono equivalenti:

(a) *f^n converge debolmente a f*

(b) *f^n è limitata ed esiste un sottospazio denso W tale che per ogni w in W la successione (w, f^n) converge a (w, f)*

(c) *f^n è limitata, e data una base $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, per ogni k si ha $(e_k, f^n) \to (e_k, f)$*

Inoltre, se f^n è limitata e (e_k, f^n) converge per ogni k, allora esiste $f \in H$ tale che $f^n \rightharpoonup f$.

Dimostrazione. Che la (a) implichi (b) e (c) è ovvio.
Proviamo che (b) implica (a). Sia $g \in H$. Poiché W è denso, dato ε esiste $g_\varepsilon \in W$ tale che $\|g - g_\varepsilon\| < \varepsilon$. Dunque

$$|(g, f^n) - (g, f)| \le |(g - g_\varepsilon, f^n - f)| + |(g_\varepsilon, f^n - f)| \le (\|f\| + \sup \|f^n\|)\varepsilon + |(g_\varepsilon, f^n - f)|$$

e il secondo membro tende a 0 in n a ε fissato. Dunque $(g, f^n) \to (g, f)$.
Proviamo che (c) implica (b). Sia W =span$\{e_k\}k \in \mathbb{N}$. È immediato verificare che per ogni $w \in W$, si ha che $(w, f^n) \to (w, f)$, infatti w è una combinazione lineare finita di vettori e_k.

Per provare l'ultima asserzione, supponiamo che $(e_k, f^n) \to z_k$. Per il lemma di Fatou

$$\sum_k |z_k|^2 = \sum_k \lim_n |(e_k, f^n)|^2 \le \liminf_n \sum_k |(e_k, f^n)|^2 = \liminf_n \|f^n\|^2 < +\infty$$

Dunque $f = \sum e_k z_k \in H$, e vale $(e_k, f^n) \to (e_k, f)$. A questo punto si conclude usando (c). $\square$

Esercizio 21. Un controesempio
Come controesempio all'impicazione (c) $\Rightarrow$ (a), considera la successione non limitata

$$f^n = \sum_{i=n+1}^{2n} e_i.$$

Prova che per ogni e_k vale $(e_k, f^n) \to 0$, d'altra parte calcola $\|f^n\|$ e mostra che diverge. Trova $g \in H$ tale che (g, f^n) non tende a 0.

Come mostrato sopra, una successione di vettori ortonormali converge debolmente a 0. Generalizziamo questo esempio.

Proposizione 9.2. *Un esempio utile in ℓ_2*
Sia $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormale, e sia f^n una successione limitata, cioè $\|f^n\| \le C$, con f^n nell'ortogonale di span$\{e_k\}_{k\le n}$. Allora $f^n \rightharpoonup 0$.

Dimostrazione. Infatti, per ogni k, $(f_n, e_k) = 0$ non appena $n > k$. Dunque per il punto (c) del teorema precedente $f_n \rightharpoonup 0$. $\square$

Quelli che seguono sono risultati semplici che però saranno utili nelle applicazioni successive.

Teorema 9.3. *(Convergenza debole, convergenza forte)*
Se $f^n \rightharpoonup f$ e $g^n \to g$ in norma, allora

$$(f^n, g^n) \to (f, g)$$

Dimostrazione. Infatti

$$|(f^n, g^n) - (f, g)| \leq |(f^n, g^n - g)| + |(f^n - f, g)| \leq \|f^n\| \, \|g^n - g\| + |(f^n - f, g)|$$

Il primo termine tende a 0 perché $g^n \to g$ in norma e $\|f^n\|$ è limitata, il secondo tende a 0 perché $f^n \rightharpoonup f$. □

Si noti che se $f^n \rightharpoonup f$ e $g^n \rightharpoonup g$ non è in generale vero che $(f^n, g^n) \to (f, g)$. Per esempio $e_n \rightharpoonup 0$, ma $(e_n, e_n) = 1$

Ci sono alcuni esempi chiave di convergenza debole a 0 che coinvolgono aspetti interessanti della teoria delle funzioni.

Esempio 9.4. Convergenza debole a 0 per oscillazione

Analogamente al caso $l_2(\mathbb{N})$, in $l_2(\mathbb{Z})$ si ha $e_k \rightharpoonup 0$ per $k \to \pm\infty$. Usando l'isometria tra $L^2((-\pi, \pi), \mathbb{C})$ e $l_2(\mathbb{Z})$, si ottiene che la successione $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ converge debolmente a 0 per $k \to \pm\infty$. Questa asserzione è evidentemente un caso particolare del Lemma di Rienmann-Lebesgue, perché equivale a

$$\lim_{k \to \pm\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}x = 0$$

per $f \in L^2((-\pi, \pi), \mathbb{C})$. Si noti che $f \in L^2((-\pi, \pi), \mathbb{C})$. implica $f \in L^1((-\pi, \pi), \mathbb{C})$.

Esempio 9.5. Convergenza debole a 0 per concentrazione e dispersione

Sia g positiva a supporto in $(-M, M)$ e di integrale 1. Come noto,

$$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} g(\frac{x}{\varepsilon}) \to \delta(x)$$

nel senso delle distribuzioni; sia $f_\varepsilon = \sqrt{g_\varepsilon}$. Ovviamente $\|f_\varepsilon\|_{L^2} = 1$, mentre

$$f_\varepsilon \rightharpoonup 0 \text{ per } \varepsilon \to 0$$

infatti se h è una funzione limitata a supporto compatto

$$(h, f_\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}} h(x) \sqrt{g(x/\varepsilon)} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\varepsilon} \int_{-M}^{M} h(\varepsilon x) \sqrt{g(x)} \, \mathrm{d}x$$

che tende a 0. Ricordando che le funzioni limitate a supporto compatto sono dense in $L^2(\mathbb{R})$, si ottiene che $f_\varepsilon \rightharpoonup 0$.

Anche per $\varepsilon \to +\infty$, $f_\varepsilon \rightharpoonup 0$, infatti se h è in L^1,

$$(h, f_\varepsilon) \leq \sqrt{\frac{\|g\|_\infty}{\varepsilon}} \|h\|_1 \to 0$$

Usando la densità delle funzioni $L^1 \cap L^\infty$ in L^2 si ottiene la tesi. In questo caso f_ε tende debolmente a 0 perché la sua norma L^2 si spalma su tutto lo spazio.

Esempio 9.6. Convergenza debole per traslazione all'infinito

Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$, e sia $f_r(x) = f(x - r)$ la sua traslazione a destra di r, che ne conserva la norma L^2. È facile mostrare che $f_r \rightharpoonup 0$ per $r \to +\infty$. Sia infatti $g \in L^2(\mathbb{R})$. Poiché anche f è il $L^2(\mathbb{R})$, dato $\varepsilon > 0$ esiste M tale che

$$\int_{|x|>M} f^2 < \varepsilon \text{ e } \int_{|x|>M} g^2 < \varepsilon$$

Sia ora $n > 2M$

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,|f(x-r)|\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{r/2} |g(x)|\,|f(x-r)| + \int_{r/2}^{+\infty} |g(x)|\,|f(x-r)|$$

Usando Cauchy-Schwartz, il primo termine risulta minore di $\|g\|_{L^2(\mathbb{R})}\,\|f\|_{L^2((-\infty,-r/2))}$, il secondo di $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}\,\|g\|_{L^2((r/2,+\infty))}$, entrambi stimati da costante per ε perché $r/2 > M$.
In pratica, la norma di $f_r(x) = f(x-r)$ si sposta verso $+\infty$, e dunque, integrando f_r contro una funzione g di L^2 che ha necessariamente la norma concentrata al finito, si ottiene una quantità evanescente.

Esempio 9.7. Convergenza debole in trasformata di Fourier
L'isometria data dalla trasformata di Fourier trasforma la convergenza debole per oscillazione (cioè Rienmann-Lebesgue, *vedi* il punto 7.2 a pagina 44) in convergenza debole per traslazione all'infinito e viceversa. Infatti, se $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu x} f(x)\right)(\lambda) = \hat{f}(\lambda - \mu).$$

Usando l'esempio precedente e che $\mathcal{F}$, essendo un'isometria, porta successioni debolmente convergenti in successioni debolmente convergenti, se ne deduce che, per ogni $g \in L^2(\mathbb{R})$;

$$\lim_{\mu \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu x} f(x) g(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Nota che $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ implica che il prodotto è in $L^1(\mathbb{R})$.

In analisi funzionale e nelle applicazioni la convergenza debole è utilissima perché i limitati di uno spazio di Hilbert sono **debolmente precompatti** per successioni (chi è più esperto di analisi funzionale, può confrontare questo risultato con la compattezza $*-$debole dei limitati in uno spazio di Banach, separabile e non.)

Teorema 9.4. Compattezza debole dei limitati
Sia data una successione $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ limitata, cioè $\|f^n\| \le C$ uniformemente in n. Allora esiste una sottosuccessione debolmente convergente.

Dimostrazione. La prova è semplice se si utilizza la decomposizione in una base. Infatti, se e_k sono i vettori di una base, per ogni k fissato la successione $n \to (e_k, f^n)$ è limitata. In particolare lo è (e_0, f^n), da cui dunque posso estrarre una sottosequenza che converge a un numero z_0. Procedendo estraendo da questa sottosuccessione un'opportuna sottosuccessione (che indico ancora con f^n), ottengo anche la convergenza di $(e_1, f^n) \to z_1$. Usando il consueto argomento diagonale, trovo un'unica sottosequenza tale che, per ogni k

$$\lim_{n\to+\infty} (e_k, f^n) \to z_k$$

Usando la proposizione 9.1 si ottiene la tesi. □

Teorema 9.5. Limitatezza delle successioni debolmente convergenti

$$\text{se } f^n \rightharpoonup f \text{ allora } \|f\| \le \liminf_{n\to+\infty} \|f^n\|$$

Inoltre, se f^n converge debolmente, allora f^n è limitata.

Dimostrazione. Il primo punto è di facile dimostrazione:

$$\|f\|^2 = (f, f) = \lim_{n\to+\infty} (f^n, f) \leq \|f\| \liminf_{n\to+\infty} \|f^n\|,$$

e dividendo per $\|f\|$ si ottiene la tesi.
Che $\|f^n\|$ sia una successione limitata è un'altra conseguenza del Lemma di Baire, e non verrà qui dimostrato, anche se è possibile dimostrarlo "a mano". □

Può essere utile rivedere alcuni degli esempi precedenti in termini di convergenza forte e debole di operatori.

9.9 Successioni di operatori

Data la successione $T_n \in \mathcal{L}(H)$ e $T \in \mathcal{L}(H)$

- T_n converge in norma a T se $\|T_n - T\| \to 0$
- T_n converge **fortemente** a T se, per ogni $x \in H$, $T_n x$ converge in norma a Tx, cioè $\|T_n x - Tx\| \to 0$
- T_n converge **debolmente** a T se $T_n x \rightharpoonup T$ cioè per ogni $y \in H$ $(y, T_n x) \to (y, Tx)$

Si osservi che T_n converge debolmente a T se e solo se, per ogni $f \in H$, la successione $T_n f$ converge debolmente a Tf.

Consideriamo alcuni esempi.

Esempio 9.8. Convergenza di sequenze di Proiettori
Data una base, sia P_n il proiettore su span$\{e_k\}_{k\leq n}$ La successione P_n converge fortemente all'identità, infatti dato u

$$\|u - P_n u\|^2 = \sum_{k<n} |\hat{u}_k|^2 \to 0$$

perchè è il resto di una serie convergente (la serie è convergente per la disuguaglianza di Bessel). Equivalentemente, $\mathbf{I} - P_n$, che è il proiettore ortogonale su span$\{e_k\}_{k\geq n+1}$, converge fortemente a 0. D'altra parte $\mathbf{I} - P_n$ è il proiettore sull'ortogonale, dunque ha norma 1 e la convergenza non vale in norma.

Se $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale completo, si può dunque scrivere l'identità

$$\mathbf{I} = \sum_{k\in\mathbb{N}} e_k \otimes e_k,$$

dove la serie converge fortemente ma non in norma.

Esempio 9.9. Convergenza di operatori di traslazione
Sia $S_r \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ definito da

$$S_r f(x) = f(x - r)$$

Abbiamo giá mostrato che $f(x - r)$ tende debolmente a 0, dunque S_r tende debolmente a 0 per $r \to +\infty$, ma non fortemente.

Usando l'isometria data dalla trasformata di Fourier, si ottiene che anche l'operatore di moltiplicazione

$$M_r : f(x) \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}rx} f(x)$$

tende debolmente a 0 (ma non fortemente) per $r \to +\infty$.

Esempio 9.10. Confergenza delle itereate degli shift

Infine, sia $S^n \in \mathcal{L}(\ell_2)$ l'iterato n-esimo dello shift a destra di un posto, cioè lo shift a destra di n posti. Si mostri per esercizio che S^n, che conserva la norma ℓ_2, tende a 0 debolmente ma non fortemente, Si consideri ora il suo aggiunto S^{n*} che è lo shift a sinistra di n posti. Si mostri che ha norma 1, e che tende fortemente a 0, per la disuguaglianza di Bessel.

10 Operatori compatti

Torniamo ai teoremi dell'alternativa.

10.1 Operatori compatti

Definizione: T è un **operatore compatto** se e solo se porta insiemi limitati in insiemi precompatti.
Si provi che T è compatto se e solo se $f_n \rightharpoonup f$ implica $Tf_n \to Tf$, cioè $\|Tf_n - Tf\| \to 0$.

Proposizione 10.1. *Proprietà degli operatori compatti*

oc 1. *Se T è compatto e B è limitato, allora TB e BT sono compatti (per esercizio).*

oc 2. *Gli operatori di rango finito sono compatti (per esercizio).*

oc 3. *Il sottospazio degli operatori compatti è chiuso, cioè se $T_n \to T$ e T_n sono compatti, allora T è compatto.*

oc 4. *Il sottospazio degli operatori di rango finito è denso nel sottospazio degli operatori compatti, cioè T è compatto se e solo se è limite di operatori di rango finito.*

Dimostrazione. Proviamo **oc 3**: sia $f_n \rightharpoonup f$ e sia $T_m \to T$, con T_m compatti. Per ogni n ed m:

$$\|Tf_n - Tf\| \leq \|T - T_m\| \left(\|f_n\| + \|f\|\right) + \|T_m f_n - T_m f\|$$

Per m abbastanza grande, $\|T - T_m\|$ è piccolo, e a m fissato, essendo T_m compatto, $\|T_m f_n - T_m f\| \to 0$ in n. Dunque $\|Tf_n - Tf\|$ va a zero e quindi T è compatto.

Se T_m sono operatori di rango finito, e $T_m \to T$, allora T è compatto per il punto precedente. Proviamo il viceversa, cioè che per ogni T compatto, T è limite di operatori di rango finito. Fissiamo una base e sia P_n il proiettore su $V_n = \text{span}\{e_k\}_{k=0}^n$ e $P_n^\perp$ il proiettore sull'ortogonale. Sia $T_n = TP_n$. Per costruzione T_n è di rango finito e $T - T_n = TP_n^\perp$. Supponiamo per assurdo che $\|T - T_n\| = \|TP_n^\perp\|$ non tenda a 0, dunque passando a una sottosequenza che indico ancora con n, $\|TP_n^\perp\| \geq \ell > 0$. Quindi esiste una successione f_n di vettori di lunghezza 1 tale che $\|TP_n^\perp f_n\| \geq \ell$. Poiché $1 = \|f_n\|^2 = \|P_n f_n\|^2 + \|P_n^\perp f_n\|^2$, scegliendo $g_n = P_n^\perp f_n / \|P_n^\perp f_n\| \in V_n$ che ha norma uno, si ha

$$\|TP_n^\perp g_n\| = \|TP_n^\perp f_n\| / \|P_n^\perp f_n\| \geq \ell.$$

Dunque abbiamo trovato $g_n \notin V_n$ con $\|g_n\| = 1$ tale che

$$\|Tf_g\| = \|TP_n^\perp g_n\| \geq \ell$$

Ma come abbiamo dimostrato nel teorema 9.2, $g_n \rightharpoonup 0$, e dunque, essendo T compatto, $\|Tg_n\| \to 0$, che è assurdo. □

Come abbiamo dimostrato nel teorema 9.2, se un $T = K + R$, K è di rango finito e R ha norma inferiore a 1, allora per T valgono i teoremi dell'alternativa. Questo è proprio il caso degli operatori compatti.

Teorema 10.1. *Teorema dell'alternativa per operatori compatti*
Se T è compatto, per l'operatore $\lambda\mathbf{I} - T$, con $\lambda \neq 0$, valgono i teoremi dell'alternativa. Infatti, T si può approssimare con precisione arbitraria con operatori di rango finito, dunque per $\varepsilon < |\lambda|$, esiste R_ε di norma minore di ε, e K_ε di rango finito tale che

$$\lambda\mathbf{I} - T = (\lambda\mathbf{I} - R_\varepsilon) - K_\varepsilon$$

con $(\lambda\mathbf{I} - R_\varepsilon)$ invertibile. Procedendo come nel teorema 9.2 si dimostra la tesi.

Come corollario, si ottiene il risultato del teorema 9.2 anche per operatori compatti.

Teorema 10.2. *Piccole perturbazioni di operatori compatti*
Sia K un operatore compatto, R un operatore con $\|R\| < 1$, $T = R + K$. Per l'operatore $I - T$ vale il teorema dell'alternativa di Fredholm.

Premetto agli esempi di operatori compatti, qualche osservazioni sulla compattezza in ℓ_2.

Esempio 10.1. Sottoinsiemi compatti in ℓ_2
Sia $\alpha > 0$, e sia

$$W = \{\hat{f} \in l_2| \sum_{k\geq 0}(|1 + |k|^{2\alpha})|\hat{f}_k|^2 \leq c < +\infty\}$$

W è un compatto di ℓ_2. Sia infatti $\hat{f}^n$ una successione in W. Per ogni k,

$$(1 + |k|^{2\alpha})|\hat{f}^n_k|^2 < c$$

dunque per sottosequenze, $\hat{f}^n_k$ converge in n (va usato il solito argomento diagonale; continuo a indicare con $\hat{f}^n$ le varie sottosequenze); chiamo $\hat{z}$ il limite. Per il lemma di Fatou:

$$\sum_{k\geq 0}(|1 + |k|^{2\alpha})|\hat{z}_k|^2 \leq \liminf_{n\to+\infty} \sum_{k\geq 0}(|1 + |k|^{2\alpha})|\hat{f}^n_k| \leq c$$

e dunque $\hat{x} \in W$. Mostro che la convergenza è forte:

$$\sum_{k\geq 0}|\hat{f}^n_k - \hat{z}_k|^2 = \sum_{k=0}^{m}|\hat{f}^n_k - \hat{z}_k|^2 + \sum_{k=m+1}^{+\infty}|\hat{f}^n_k - \hat{z}_k|^2\frac{1 + |k|^{2\alpha}}{1 + |k|^{2\alpha}} \leq \sum_{k=0}^{m}|\hat{f}^n_k - \hat{z}_k|^2 + \frac{2c}{1 + m^{2\alpha}}$$

Scegliendo m abbastanza grande, il secondo termine può essere reso piccolo a piacere, mentre il primo, a m fissato, tende a 0.

Come applicazione, si osservi che se $f \in L^2((-\pi,\pi),\mathbb{C})$ è derivabile e la derivata è in L^2, allora

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1 + |k|^2)|\hat{f}_k|^2 < +\infty$$

Dunque avere derivata limitata in norma L^2 è una condizione sufficiente per la compattezza

Approfondisco questo esempio. Si chiama **spazio di Sobolev** H^m lo spazio delle funzioni L^2 con derivate fino all'emmesima in L^2:

$$H^m = \{f : \int |D^i f|^2 < +\infty,\, i \in 0\ldots m\}$$

È uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare

$$(f, g)_m = \sum_{i=0}^{m} (D^i f, D^k g)$$

dove il prodotti a destra sono in L^2. In serie di Fourier, H^m si identifica con

$$h^m = \{\hat{f} : \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2 + \dots |k|^{2m}) |\hat{f}_k\|^2 < +\infty\}$$

L'esempio precedente mostra come i limitati di h^m sono compatti in ℓ^2, dunque i limitati di H^m sono compatti in L^2. In altri termini, l'immersione naturale di H^m in L^2 è un operatore compatto.

Esercizio 22.
Generalizza l'esempio mostrando che se α_k è una successione positiva divergente, l'insieme

$$W = \{\hat{f} \in \ell_2 | \sum_{k \geq 0} \alpha_k^2 |\hat{f}_k|^2 \leq c\}$$

è compatto.

Come complemento a questo esempio, dimostra che l'insieme $\{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \int (1 + |x|^2) |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leq c\}$ non è compatto (costruisci un controesempio con le funzioni a supporto in D compatto di $\mathbb{R}^n$, per le quali la limitatezza dell'integrale proposto non dà nessuna informazione aggiuntiva oltre alla limitatezza della norma).

Esempio 10.2. Compattezza degli operatori di moltiplicazione in ℓ_2
Sia β_k una successione in $\mathbb{C}$. L'operatore

$$(T\hat{f})_k = \beta_k \hat{f}_k$$

è continuo se β_k è limitata e

$$T = \sup_k |\beta_k|.$$

Sia ora $T_n = TP_n$, dove P_n è il proiettore sulle prime $n+1$ componenti, cioé $(T_n\hat{f})_k$ è zero se $k > n$, mentre e $\beta_k \hat{f}_k$ per $k \leq n$. Questo operatore è di rango finito. Vediamo sotto quali condizioni c'è convergenza in norma a T. Anche l'operatore $T - T_n$ è un operatore di moltiplicazione, dunque

$$\|T - T_n\| = \sup_{k > n} |\beta_k|$$

Si ha convergenza in norma se e solo se $\beta_k \to 0$ per $k \to +\infty$.
Ne segue che se β_k è infinitesima, l'operatore di moltiplicazione T è compatto.

Come conseguenza, sia α_k una successione positiva divergente. L'operatore T che moltiplica per $1/\alpha_k$ è compatto, dunque è compatto l'insieme

$$T(\left\{\hat{f} : \|\hat{f}\| \leq 1\right\}) = \left\{\{\hat{f}_k/\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}} : \sum_k \hat{|} f_k|^2 \leq 1\right\}$$

che, indicando con $\hat{x}_k = \hat{f}_k/\alpha_k$ è l'insieme

$$\left\{ \{\hat{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}} : \sum_k |\alpha_k|^2 |\hat{x}_k|^2 \leq 1 \right\}$$

In questo modo abbiamo ritrovato la compattezza in ℓ_2 delle successioni che hanno maggiore sommabilità.

Esempio 10.3. Compattezza degli operatori integrali con nucleo in L^2

Ricordo che se $\varphi_i(x)$ è una base per $L^2(\Omega)$ allora $\varphi_i(x)\varphi_j(y)$ è una base per $L^2(\Omega\times\Omega)$ (*vedi* 2.5). Sia dunque $g(x,y) \in L^2(\Omega\times\Omega)$. Per quanto detto sopra, g è il limite in L^2 di $\sum_{i,j\leq m} \hat{g}_{ij}\varphi_i(x)\varphi_j(y)$ per opportuni $\hat{g}_{ij}$. Dunque l'operatore associato a g è limite di operatori di rango finito (verificare per esercizio questa affermazione, usando che la norma dell'operatore è stimata dalla norma $L^2(\Omega\times\Omega)$ del nucleo, *vedi 6*). Ne segue che è compatto.

Esempio 10.4. Compattezza degli operatori in ℓ_2 con nucleo $\ell_2(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$

Analogamente, sia $g_{ij} \in \ell_2(\mathbb{N}^2)$, cioè

$$\sum_{ij} |g_{ij}|^2 < +\infty$$

Allora l'operatore

$$(K\hat{f})_i = \sum_j g_{ij}\hat{f}_j$$

è compatto, infatti se ne ottengono approssimazioni di rango finito troncando la serie, e il resto tende a zero in ℓ_2 per l'ipotesi di sommabilità dei coefficienti g_{ij}. In dettaglio, sia P_m l'operatore di proiezione sulle prime m componenti, e sia $K_m = KP_m$, cioè l'operatore che ha come elementi di matrice

$$g_{ij}\mathcal{X}\{j \leq m\}$$

Ora

$$\|K - K_m\| = \|KP_m^\perp\|$$

Dunque è sufficiente provare che se $g \in \ell_2(\mathbb{N}^2)$ allora $\|KP_m^\perp\| \to 0$, per ottenere che $K_m \to K$ in norma. Procediamo esplicitamente:

$$|(KP_m^\perp\hat{f})_i| \leq \sum_{j\geq m+1} |g_{ij}|\,|\hat{f}_j| \leq \left(\sum_{j\geq m+1} |g_{ij}|^2\right)^{1/2} \|\hat{f}\|$$

Quadrando e sommando in i, dividendo per $\|f\|$ e passando al sup su $\|f\| = 1$:

$$\|KP_m^\perp\| \leq \sum_{j\geq m+1}\sum_{i\geq 0} |g_{ij}|^2$$

Ma la serie in j è convergente, dunque il suo resto $\sum_{j=m+1}^{+\infty}$ tende a 0 per $m \to +\infty$, e questo prova la tesi.

Esempio 10.5. Compattezza di operatori integrali con nucleo singolare

Sia Ω dominio limitato di $\mathbb{R}^n$, sia $h(x,y)$ una funzione limitata. Considero l'operatore integrale

$$Kf(x) = \int_\Omega \frac{h(x,y)}{|x-y|^\alpha} f(y)\,\mathrm{d}y$$

Mostra che il nucleo è L^2 (e dunque K è continuo e compatto) se $\alpha < n/2$.

Si può provare che K è compatto per $\alpha < n$. Intanto osserviamo che per $\alpha < n$ è continuo. Ricordando le condizioni di continuità discusse in 6, è sufficiente provare la limitatezza di

$$M = \max\left(\sup_{z_1\in\Omega}\int_\Omega \mathrm{d}z_2 \frac{|h(z_1,z_2)|}{|z_1-z_2|^\alpha},\ \sup_{z_2\in\Omega}\int_\Omega \mathrm{d}z_1 \frac{|h(z_1,z_2)|}{|z_1-z_2|^\alpha},\ \right)$$

Si ottiene

$$M \leq \|h\|_\infty \sup_{y\in\Omega}\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

Sia $L = $diam$(\Omega)$. L'integrale si stima con

$$\int_{|z|\leq L}\frac{1}{|z|^\alpha}\,\mathrm{d}z = c_n\int_0^L \frac{\rho^{n-1}}{\rho^\alpha}\,\mathrm{d}\rho = \frac{c_n}{n-\alpha}L^{n-\alpha}$$

se $\alpha < n$, dove c_n è la misura del bordo della sfera unitaria in $\mathbb{R}^n$.
Mostriamo che sotto questa stessa condizione sufficiente per la limitatezza, si ha che K è compatto. Infatti, sia K_ε l'operatore di nucleo g_ε, dove

$$g_\varepsilon = \frac{h(x,y)}{|x-y|^\alpha}\mathcal{X}\{|x-y|>\varepsilon\}$$

Si tratta di un nucleo limitato su $\Omega\times\Omega$, con Ω limitato, dunque è in $L^2(\Omega\times\Omega)$, e quindi K_ε è compatto. Resta da provare che K_ε tende a K in norma per $\varepsilon\to 0$, infatti essendo i K_ε compatti il limite è compatto. Procedendo come sopra,

$$\|K-K_\varepsilon\| \leq M_\varepsilon$$

dove

$$M_\varepsilon \leq \|h\|_\infty \sup_{y\in\Omega}\int_\Omega \frac{\mathcal{X}\{|x-y|\leq\varepsilon\}}{|x-y|^\alpha}\,\mathrm{d}x \leq \frac{c_n}{n-\alpha}\|h\|_\infty \varepsilon^{n-\alpha}$$

che tende a 0 se $\alpha < n$.

Esercizio 23. Operatori di convoluzione in $\ell_2(\mathbb{Z})$

Mostra che se $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|a_k| = \|a\|_{\ell_1}$ è limitata, allora l'operatore

$$(A\hat{x})_k = \sum_{h\in\mathbb{Z}} a_{k-h}\hat{x}_h$$

è continuo.
Mostra che A non è compatto. Infatti, se $e_i = \{\delta_{ki}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sono i vettori della base canonica, $e_i \rightharpoonup 0$ per $i\to\pm\infty$. D'altra parte $(Ae_i)_k = a_{k-i}$, dunque $\|Ae_i\|^2 = \sum_k |a_k|^2 = \|a\|_{\ell_2}$ che è una costante che non può tendere a 0 per $i\to+\infty$

Esercizio 24. Operatori di convoluzione in $\mathbb{R}^n$

Sia $g\in L^1(\mathbb{R}^n)$, mostra che l'operatore di convoluzione

$$f \to g * f$$

che è continuo perché g è sommabile, non è compatto.

Se T è compatto, per l'equazione $(\lambda \mathbf{I} - T)x = b$ valgono i teoremi dell'alternativa. Questo fatto permette di affrontare e risolvere il problema di trovare una base di H di autovettori di T se T è compatto e autoaggiunto.
Premetto qualche definizione, utile in generale nell'affrontare lo studio degli autovalori di un operatore.

10.2 Risolvente e spettro

Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore limitato. Sia $\lambda \in \mathbb{C}$. Si chiama **insieme risolvente** l'insieme dei λ per i quali $\lambda \mathbf{I} - T$ è biettivo (e dunque ha inverso continuo). In tal caso l'operatore $R_\lambda(T) = (\lambda \mathbf{I} - T)^{-1}$ è detto **operatore risolvente**.
Il nome risolvente per $R_\lambda(T)$ è evidentemente dovuto al fatto che questo operatore risolve l'equazione $\lambda f - Tf = b$, per b assegnato.

Si chiama spettro di T l'insieme
$$\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \rho(T)$$
cioè $\lambda \in \sigma(T)$ se e solo se $\lambda \mathbf{I} - T$ non è invertibile. Posso succedere tre cose:

- $\lambda \mathbf{I} - T$ non è iniettivo; ma allora il suo nucleo è non banale, cioè l'equazione agli autovalori $Tf = \lambda f$ ha soluzioni non banali. In tal caso λ è un autovalore e f è un autovettore. L'insieme degli autovalori è detto **spettro puntuale** ed è indicato con $\sigma_p(T)$.
- $\lambda \mathbf{I} - T$ è iniettivo ma non suriettivo, Range $(\lambda \mathbf{I} - T)$ è denso in H ma $(\lambda \mathbf{I} - T)^{-1}$ (che esiste) non è limitato. In tal caso si dice che λ appartiene allo **spettro continuo** $\sigma_C(T)$.
- $\lambda \mathbf{I} - T$ è iniettivo ma non suriettivo, e Range $(\lambda \mathbf{I} - T)$ non è denso. In tal caso si dice che λ appartiene allo **spettro residuo** $\sigma_R(T)$.

Si noti che queste definizioni hanno senso anche per un operatore T illimitato, definito su $D(T)$ sottospazio denso di H. In particolare, notando che $\lambda \mathbf{I} - T$ è definito su $D(T)$ diremo che $\lambda \in \rho(T)$ se l'operatore $\lambda \mathbf{I} - T$ da $D(T)$ in H è iniettivo, Range $(\lambda \mathbf{I} - T) = H$, e l'inverso è continuo, condizione che è equivalente all'esistenza di $c > 0$ tale che
$$\|(\lambda \mathbf{I} - T)x\| \geq c\|x\|$$

Prima di sviluppare la teoria, uso un esempio per illustrare i vari casi possibili, trovando lo spettro dello shift a destra S e dello shift a sinistra S^* su $\ell_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Sarà utile sapere che in generale $\rho(T)$ è un aperto, e dunque che $\sigma(T)$ è un chiuso, e che se T è limitato e $|\lambda| > T$ allora $\lambda \in \rho(T)$.
Studiamo dunque gli operatori di shift.

Esempio 10.6. Lo spettro degli shift su $\ell_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$

Intanto è evidente che l'equazione agli autovalori $S\hat{f} = \lambda \hat{f}$ ha solo la soluzione nulla per qualunque λ, dunque S non ha spettro puntuale. D'altra parte, se $|\lambda| > 1$ allora λ è nel risolvente, perché l'operatore si inverte mediante la serie di Neumann, infatti $\|S\| = 1$.
Considero ora l'aggiunto S^*. È facile provare che ogni λ con $|\lambda| < 1$ è nello spettro puntale: il corrispondente autovettore è $\{\lambda^k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_2$, e la serie dei quadrati è convergente se e solo se $|\lambda| < 1$.

Poiché $\|S^*\| = 1$, i λ di modulo maggiore di uno sono nel risolvente. Poiché lo spettro è chiuso, ne segue che anche il bordo della palla unitaria deve essere nello spettro di S^*. A questo punto uso che

$$\ell_2 = \mathrm{Ker}\,(\bar{\lambda}\,\mathbf{I} - S) \oplus \overline{\mathrm{Range}\,(\lambda\,\mathbf{I} - S^*)}$$

Poiché lo spettro puntale di S è vuoto, o Range $(\lambda\,\mathbf{I} - S^*)$ è bordo della palla unitaria è lo spettro continuo di S^*.
Dunque, poiché

$$\ell_2 = \mathrm{Ker}\,(\bar{\lambda}\,\mathbf{I} - S^*) \oplus \overline{\mathrm{Range}\,(\lambda\,\mathbf{I} - S)}$$

ne segue che Range $(\lambda\,\mathbf{I} - S)$ non è denso in ℓ_2 se $|\lambda| < 1$, e dunque $\lambda < 1$ sono tutti valori nello spettro residuo di S.
Poiché lo spettro è chiuso, anche il bordo della palla unitaria è nello spettro, e, poiché se λ ha modulo 1 il kernel di $\bar{\lambda} - S$ è vuoto, si tratta dello spettro continuo di S.

Esercizio 25. Spettro degli shift
Si provi a mano la non invertibilità di $\lambda - S$ e $\lambda - S^*$, nel caso $|\lambda| = 1$, cioè $\lambda = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.
Suggerimento: si provi a risolvere

$$\lambda x - Sx = e_0 \quad \text{ e } \lambda x - S^* x = e_0$$

dove $e_0 = (1, 0, 0, \dots)$.

Faccio un secondo esempio, determinando lo spettro degli operatori di moltiplicazione.

Esempio 10.7. Lo spettro degli operatori di moltiplicazione
Sia h una funzione reale continua limitata e non costante e sia $(M_h f) = h(x)f(x)$ l'operatore di moltiplicazione associato, che dunque è autoaggiunto.
Se λ è nell'immagine della funzione h, allora λ è nello spettro di M_h perché $\lambda f - M_h f = b$ dovrebbe essere risolta da $f(x) = b(x)/(\lambda - h(x))$ che non è in L^2. Poiché abbiamo assunto che h non è costante, lo spettro puntuale è però vuoto, dunque $\lambda\,\mathbf{I} - M_h$ è sempre iniettivo e l'immagine è sempre densa. D'altra parte, se λ non è nell'immagine di h l'operatore è invertibile.
In conclusione, lo spettro di M_h coincide con lo spettro continuo, ed è l'intervallo reale tra il minimo e il massimo di $h(x)$.

Teorema 10.3. *Proprietà del risolvente*

- *$\rho(T)$ è non vuoto ed è aperto.*

  Infatti, se $|\lambda| > \|T\|$, l'operatore $\lambda\,\mathbf{I} - T$ è invertito dalla sua serie di Neumann:

  $$(\lambda\,\mathbf{I} - T) = \lambda^{-1} \sum_{k \in \mathbb{N}} T^n / \lambda^n$$

  che converge perché $\|T/\lambda\| < 1$. Il risolvente è aperto perché se λ_0 è nel risolvente, posso scrivere

  $$\lambda\,\mathbf{I} - T = \lambda_0\,\mathbf{I} - T - (\lambda_0 - \lambda)\,\mathbf{I}$$

  Poiché esiste $R_{\lambda_0}(T)$, posso scrivere

  $$\lambda\,\mathbf{I} - T = \lambda_0\,\mathbf{I} - T + (\lambda - \lambda_0)\,\mathbf{I} = (\lambda_0\,\mathbf{I} - T)(\mathbf{I} - (\lambda_0 - \lambda)(R_{\lambda_0}(T)))$$

con

$$\mathbf{I} - (\lambda_0 - \lambda)R_{\lambda_0}(T)$$

invertibile se $\lambda_0 - \lambda$ è sufficientemente piccolo.

- *La funzione $\rho(T) \ni \lambda \to R_\lambda(T) \in \mathcal{L}(H)$ è* **analitica**, *nel senso che è sviluppabile in serie di potenze intorno a ogni $\lambda_0 \in \rho(T)$.*

  Infatti, segue dal punto precedente che

  $$(\lambda\mathbf{I} - T)^{-1} = \sum_{k\in\mathbb{N}}(\lambda_0 - \lambda)^k R_{\lambda_0}(T)^{k+1}$$

  In particolare, date $f, g \in H$, la funzione

  $$\rho(T) \ni \lambda \to (f, R_\lambda(T)g) \in \mathbb{C}$$

  è una funzione olomorfa (cioè analitica complessa) da un aperto di $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$, perché sviluppabile in serie di potenze intorno a ogni punto del dominio.

- *Lo spettro è chiuso ed è contenuto in* $\{\lambda : \ |\lambda| \leq \|T\|\}$

  come segue dal punto precedente.

- *Lo spettro è non vuoto.*

  Infatti se $\sigma(T) = \emptyset$, $\rho(T) = \mathbb{C}$, ma allora per ogni $f, g \in H$ la funzione $\lambda \to (f, R_\lambda(T)g)$ è una funzione **intera**, cioè analitica definita da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$. D'altra parte, per $|\lambda| > \|T\|$,

  $$\|R_\lambda(T)\| \leq |\lambda^{-1}| \sum_{k\in\mathbb{N}}(\|T\|/|\lambda|)^k = 1/(|\lambda| - \|T\|)$$

  che tende a 0 per $|\lambda \to +\infty$ (non è strano: per $|\lambda|$ grande $\lambda\mathbf{I} - T$ è praticamente $\lambda\mathbf{I}$, il cui inverso è $\mathbf{I}/\lambda$). Ma allora la funzione $\lambda \to (f, R_\lambda(T)g)$ è intera e limitata, dunque per il teorema di Liouville è costante, e poiché tende a 0 all'infinito è proprio nulla. Ne segue che $R_\lambda(T)$ dovrebbe essere l'operatore nullo, assurdo in quanto invertibile.

- *Per ogni λ e μ, $R_\lambda(T)$ e $R_\mu(T)$ commutano, e vale l'***identità del risolvente***:*

  $$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu$$

  Questa uguaglianza è la versione operatoriale dell'identità

  $$\frac{1}{\lambda - t} - \frac{1}{\mu - t} = \frac{\mu - t - \lambda + t}{(\lambda - t)(\mu - t)} = \frac{\mu - \lambda}{(\lambda - t)(\mu - t)}$$

  Infatti, essendo $\mathbf{I} = R_\lambda(T)(\lambda\mathbf{I} - T) = (\mu\mathbf{I} - T)R_\mu(T)$,

  $$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = R_\lambda(T)(\mu\mathbf{I} - T)R_\mu(T) - R_\lambda(T)(\lambda\mathbf{I} - T)R_\mu(T) = (\mu - \lambda)R_\lambda(T)R_\mu(T)$$

  da cui segue la commutativià, infatti

  $$(\mu - \lambda)R_\lambda(T)R_\mu(T) = -(R_\mu(T) - R_\lambda(T)) = -(\lambda - \mu)R_\mu(T)R_\lambda(T)$$

  e dividendo per $\lambda - \mu$ si ha la tesi.

Prima di discutere del caso di operatori compatti autoaggiunti, descrivo alcune proprietà particolari degli operatori autoaggiunti, indipendentemente dalla compattezza.

10.3 Spettro degli operatori autoaggiunti

Proposizione 10.2. *Spettro di un operatore autoaggiunto*
Se A àutoaggiunto

- *gli autovalori sono reali;*
- *gli autospazi relativi a autovalori distinti sono ortogonali;*
- *lo spettro è reale.*

Dimostrazione. Le prime due affermazioni si dimostrano esattamente come nel caso finito-dimensionale. Se u è un autovettore di autovalore λ, allora

$$\lambda\|u\|^2 = (u, u) = (u, \lambda u) = (u, Av) = (A^*u, u) = (\lambda u, u) = \overline{\lambda}\|u\|^2$$

dunque λ è reale. Siano μ e λ due autovalori (reali) distinti, e v e u due corrispondenti autovettori.

$$\lambda(v, u) = (v, Au) = (Av, u) = \mu(v, u)$$

dunque $(v.u) = 0$.
Resta da provare la realtà di tutto lo spettro. Dimostrerò che se A è autoaggiunto, allora $A + \mathrm{i}$ è invertibile. Questa affermazione implica che a $A + z$ è invertibile per ogni $z \in \mathbb{C}$ con parte immaginaria non nulla. Infatti, se A è autoaggiunto allora $(A + \alpha)/\beta$ è autoaggiunto per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\beta \neq 0$, e dunque $(A+\alpha)/\beta+\mathrm{i}$ è invertibile, cioè $(A+\alpha+\beta\mathrm{i})/\beta$ è invertibile e quindi $A + \alpha + \beta\mathrm{i}$ è invertibile
Mi concentro dunque su $A + \mathrm{i}$. Poichè lo spettro puntuale di A è reale, $\mathrm{Ker}\,(A - \mathrm{i}) = \{0\}$, e dunque

$$H = \overline{\mathrm{Range}\,(A + \mathrm{i})}$$

Quindi è sufficiente provare che il range è chiuso. L'osservazione chiave è la seguente:

$$\|(A + \mathrm{i})f\|^2 = (Af + \mathrm{i}f, Af + \mathrm{i}f) = \|Af\|^2 + \|f\|^2$$

(da cui si ottiene, tra l'altro, $\|A + \mathrm{i}\|^2 = \|A\|^2 + 1$). Affermare che l'immagine è chiusa equivale a dire che ogni successione convergente appartenente all'immagine ha il limite che è un elemento dell'immagine. Sia allora f_n una successione tale che

$$(A + \mathrm{i})f_n \to g$$

Voglio provare che esiste f tale che $g = (A + \mathrm{i})f$. Poichè converge, $(A + \mathrm{i})f_n$ è di Cauchy, dunque dato $\varepsilon > 0$, per n, m sufficientemente grandi,

$$\varepsilon > \|(A + \mathrm{i}(f_n - f_m))\|^2 = \|A(f_n - f_m)\|^2 + \|f_n - f_m\|^2 \geq \|f_n - f_m\|^2$$

Quindi f_n è di Cauchy; sia f il suo limite, per continuità $(A + \mathrm{i})f = g$, come volevamo dimostrare. □

Usando un procedimento analogo, studiamo lo spettro degli operatori autoaggiunti positivi.

Esercizio 26. Spettro di un operatore positivo

Sia A autoaggiunto e positivo, cioè $(v, Av) \geq 0$ per ogni v. Mostra che gli autovalori sono positivi e poi mostra che lo spettro è contenuto in $\mathbb{R}^+$.

Mostra che se A è coercivo, cioè se esiste $\alpha > 0$ tale che $(v, Av) \geq \alpha \|v\|^2$, allora lo spettro è nella semiretta $[\alpha, +\infty)$.

Un altro aspetto importante per l'analisi dello spettro di un operatore autoaggiunto è lo studio della forma quadratica associata. Ad ogni operatore lineare T si associa naturalmente la forma quadratica (f, Tf). Questa relazione non è iniettiva, (si pensi al caso finito dimensionale, in cui è evidente che la forma quadratica associata non dipende dalla parte antisimmetrica della matrice). Nel caso di A autoaggiunto, invece, l'operatore e la forma quadratica contengono le stesse informazioni, ed è utile studiare questi operatori attraverso lo forma quadratica associata.

Esercizio 27. Decomposizione polare di una forma quadratica

Il prodotto hermitiano tra due vettori si può scrivere come combinazione di quadrati mediante l'identità di polarizzazione (6.1). Si dimostri che se A è autoaggiunto,

$$4(\mathbf{u}, A\mathbf{v}) = (\mathbf{u}+\mathbf{v}, A(\mathbf{u}+\mathbf{v})) - (\mathbf{u}-\mathbf{v}, A(\mathbf{u}-\mathbf{v})) - \mathrm{i}(\mathbf{u}+\mathrm{i}\mathbf{v}, A(\mathbf{u}+\mathrm{i}\mathbf{v})) + \mathrm{i}(\mathbf{u}-\mathrm{i}\mathbf{v}, A(\mathbf{u}-\mathrm{i}\mathbf{v})) \quad (10.1)$$

Teorema 10.4. *Forma quadratica associata ad un operatore autoaggiunto*
Se T è autoaggiunto, la sua norma operatoriale coincide con l'estremo superiore sulla sfera unitaria della forma quadratica associata, cioè

$$\|T\| = \sup_{\|f\|=1} |(f, Tf)|$$

Dimostrazione. Sia $\gamma = \sup_{\|f\|=1} |(f, Tf)|$; è immediato che $\gamma \leq \|T\|$. Dimostro il viceversa: per cominciare, usando l'autoaggiunzione di T,

$$(f+g, T(f+g)) - (f-g, T(f-g)) = 2(g, Tf) + 2(f, Tg) = 2(g, Tf) + 2(Tf, g)$$

Il membro di sinistra è stimato in modulo da

$$\gamma(\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2) = 2\gamma(\|f\|^2 + \|g\|^2)$$

Sia ora $\|f\| = 1$, e sia $g = Tf/\|Tf\|$, che dunque è di modulo 1. Il membro di destra diventa

$$2\|Tf\| + 2\|Tf\|$$

Quindi:

$$4\|Tf\| \leq 2\gamma(\|f\|^2 + \|g\|^2) = 4\gamma$$

Passando al sup su f di modulo 1, si ottiene

$$T = \sup_{\|f\|=1} |(f, Tf)|.$$

$\square$

Se T è un operatore autoaggiunto e lo spazio è finito-dimensionale, i punti stazionari di (f, Tf) sulla sfera unitaria $\|f\|^2$ sono esattamente gli autovettori di f di norma 1. Infatti, consideriamo i punti stazionari della forma quadratica vincolata

$$f \to (f, Tf) - \lambda((f, f) - 1)$$

dove λ è il moltiplicatore di Lagrange. Derivando in f, si ottiene la condizione di stazionarietà:

$$2Tf - 2\lambda f = 0 \text{ cioè } Tf = \lambda f$$

Dunque f è autovettore, e il moltiplicatore di Lagrange è un autovalore.

Questa fatto vale anche per operatori compatti autoaggiunti, come seguirà dal teorema spettrale. Qui dimostro il seguente caso particolare.

Teorema 10.5. *Se T è compatto autoaggiunto, $\|T\|$ o $-\|T\|$ è autovalore*
Sia T autoaggiunto, e sia

$$M = \sup_{\|f\|=1} (f, Tf), \qquad e \quad m = \inf_{\|f\|=1} (f, Tf)$$

Se $M > 0$ allora M è autovalore, e il sup è raggiunto sui corrispondenti autovettori; se $m < 0$ allora m è autovalore, e l'inf è raggiunto sui corrispondenti autovettori. In particolare, ricordando che se T è autoaggiunto allora $\|T\| = \sup_{\|f\|=1} |(f, Tf)|$, ne segue che o $M = \|T\|$ o $m = -\|T\|$, dunque o $\|T\|$ o $-\|T\|$ è autovalore di T.

Dimostrazione. Dimostro che se $M > 0$ allora M è autovalore (il caso $m < 0$ si dimostra con la stessa tecnica). Per definizione, esiste una sequenza $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $\|f_k\| = 1$, tale che

$$M = \lim_{k\to+\infty} (f_k, Tf_k)$$

Per limitatezza, $f_k \rightharpoonup f$ per sottosequenze, con $\|f\| \leq \liminf_{k\to+\infty} \|f_k\| = 1$. Poiché T è compatto, $Tf_k \to Tf$ in norma, e dunque

$$(f, Tf) = \lim_{k\to+\infty} (f_k, Tf_k) = M.$$

La norma di $\|f\|$ deve essere 1, in caso contrario:

$$(f/\|f\|, T(f/\|f\|)) = M/\|f\|^2 > M$$

e dunque M non sarebbe il sup. Sia ora $\|g\| = 1$, e consideriamo la funzione

$$\phi(\alpha) = (f + \alpha g, T(f + \alpha g)) - M\|f + \alpha g\|^2$$

Per definizione di M, $\phi(\alpha)$ è minore di zero per ogni α. Risulta, per α reale,

$$\phi(\alpha) = (f+\alpha g, (T-M)(f+\alpha g)) = (f, (T-M)f) + 2\alpha\Re(g, (T-M)f) + \alpha^2(g, (T-M)g) \leq 0$$

D'altra parte, se $\alpha = \mathrm{i}\beta$ con β reale

$$\phi(\mathrm{i}\beta) == (f, (T-M)f) - 2\beta\Im(g, (T-M)f) + \beta^2(g, (T-M)g) \leq 0$$

Poiché in zero queste due funzioni hanno massimo, la derivata prima in zero deve essere nulla, dunque

$$\Re(g, (T-M)f) = 0 = \Im(g, (T-M)f) = 0, \text{ e dunque } (g, (T-M)f) = 0$$

Per l'arbitrarietà di g, ne segue che $TF = Mf$. cioè M è autovalore. □

Sia dato un operatore, si definisce **raggio spettrale** il numero

$$r(T) = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|.$$

Naturalmente se T è limitato $r(T) \leq \|T\|$, perché se $|\lambda| > \|T\|$ allora $\lambda \in \rho(T)$. Se T è compatto e autoaggiunto, o $\|T\|$ o $-\|T\|$ è un autovalore di T, dunque $r(T) = \|T\|$.

10.4 Teorema spettrale per operatori compatti autoaggiunti

Se T è compatto autoaggiunto, per ogni $\lambda \neq 0$ l'operatore $\lambda \mathbf{I} - T$ verifica i teoremi dell'alternativa, dunque o λ è nel risolvente, o λ è un autovalore e l'autospazio $\mathrm{Ker}\,(\lambda \mathbf{I} - T)$ ha dimensione finita.
Per l'analisi già svolta, sappiamo che gli autovalori sono reali, e ad autovalori diversi corrispondono autospazi ortogonali. Ora sappiamo anche che la dimensione degli autospazi è finita. Dunque lo spettro di T, ad esclusione dello 0, è fatto da autovalori che sono al più numerabili (se così non fosse, lo spazio H, ammetterebbe un sistema non numerabile di vettori ortonormali, in contrasto con la separabilità).
Inoltre, gli autovalori possono accumulare solo in 0. Consideriamo una (sotto) successione di autovalori distinti λ_k, e sia e_k un autovettore di norma 1, di autovalore λ_k, cioè

$$Te_k = \lambda_k e_k$$

Essendo una sequenza ortonormale, $e_k \rightharpoonup 0$. Per compattezza di T, $Te_k \to 0$ in norma. Ma allora $|\lambda_k| = \|T_e k\| \to 0$, dunque la (sotto) successione converge a 0.

Resta da interrogarsi sul ruolo di 0. Se 0 non è un autovalore, poiché T è autoaggiunto,

$$H = \mathrm{Ker}\, T \oplus \overline{\mathrm{Range}\, T} = \overline{\mathrm{Range}\, T}$$

Cioè $\mathrm{Range}\, T$ è denso. Mostriamo che non può essere tutto H, cioè che T non può essere invertibile. Se lo fosse, sia $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormale e sia f_k tale che $f_k = T^{-1}e_k$. Per continuità dell'inverso, $\|f_k\| \leq \|T^{-1}\|$, dunque per sottosequenze $f_k \rightharpoonup f$. Per compattezza di T, $e_k = Tf_k \to Tf$ in norma, ma questo è impossibile perché i vettori e_k sono ortonormali e dunque non possono convergere fortemente.
In conclusione, se 0 non è un autovalore, allora $0 \in \sigma_c(T)$.

Teorema 10.6. *teorema spettrale per operatori compatti autoaggiunti*
Se T è compatto e autoaggiunto, H ha una base di autovettori di T.

Dimostrazione. Sia M il sottospazio di H

$$M = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T)} \mathrm{Ker}\,(\lambda \mathbf{I} - T)$$

Ricordo che è una somma al più numerabile di sottospazi finito dimensionali (a parte eventualmente $\mathrm{Ker}\, T$ che può essere infinito), e la somma è diretta perché i sottospazi sono a due a due ortogonali.
Mostriamo che M è denso in H. Supponiamo per assurdo che $M^{\perp}$ sia un sottospazio (chiuso) non vuoto di H. L'operatore T ristretto a $M^{\perp}$ ha immagine in $M^{\perp}$, in quanto autoaggiunto. Infatti, se f è ortogonale a $\mathrm{Ker}\, \lambda \mathbf{I} - T$, con $\lambda \neq 0$, allora

$$(f, g) = 0 \text{ per ogni } g : \; Tg = \lambda g$$

Ne segue

$$(Tf, g) = (f, Tg) = \lambda(f, g) = 0 \text{ per ogni } g \in \mathrm{Ker}\,(\lambda \mathbf{I} - T)$$

cioè T mappa l'ortogonale al $\mathrm{Ker}\,(\lambda \mathbf{I} - T)$ in sé. Infine, poiché T è autoaggiunto,

$$H = \mathrm{Ker}\, T \oplus \overline{\mathrm{Range}\, T}$$

cioè Range T è comunque nell'ortogonale al nucleo.
D'altra parte, T ristretto a $M^\perp$ è autoaggiunto, dunque ha almeno un autovalore di modulo pari alla sua norma. Ma questo è assurdo perché Mrt è ortogonale allo spazio di tutti gli autovettori. □

Esercizio 28. Dimensione finita del nucleo

La dimostrazione dei teoremi dell'alternativa per $\lambda\mathbf{I} - T$ con $\lambda \neq 0$, usa l'approssimazione con operatori di rango finito, e dunque si ottiene immediatamente che la dimensione $\operatorname{Ker}(\lambda\mathbf{I} - T)$ è finita.
D'altra parte è anche una facile conseguenza della definizione di operatore compatto. Sia dunque T compatto, e supponi che $\operatorname{Ker}(\lambda\mathbf{I} - T)$ è non banale per un qualche $\lambda \neq 0$, prova che ha dimensione finita.

Esercizio 29. Stazionarietà degli autovettori

Sia T compatto autoaggiunto, e sia $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una base ortonormale di autovettori per T. Allora

$$Tf = \sum_k \lambda_k f_k e_k$$

Prova 'a mano' che $\|T\| = \max_k |\lambda_k|$ (questo fatto è già stato mostrato a proposito del raggio spettrale degli operatori compatti autoaggiunti).
Nella base,

$$(f, Tf) = \sum_k \lambda_k |f_k|^2$$

Prova che per ogni k, e_k è un punto stazionario per la forma quadratica, vincolata a $\|f\|^2 = 1$.

Sia T compatto autoaggiunto, e sia $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ la base di autovettori in cui si decompone:

$$T = \sum_k \lambda_k e_k \otimes e_k$$

(mostra che la serie convergenza in norma). Sia $\lambda \in \rho(T)$, e consideriamo l'equazione seguente, con b assegnato:

$$\lambda f - Tf = b$$

Moltiplicandola scalarmente per e_k, si ottiene

$$\lambda \hat{f}_k - \lambda_k \hat{f}_k = \hat{b}_k$$

che è risolta da

$$\hat{f}_k = \hat{b}_k / (\lambda - \lambda_k)$$

Poiché se $\lambda \in \rho(T)$ allora λ ha distanza finita dallo spettro puntuale, il denominatore è in modulo maggiore di una costante, dunque si può scrivere

$$R_\lambda(T) = \sum_k \frac{1}{\lambda - \lambda_k} e_k \otimes e_k$$

In questo caso la serie converge in senso forte, perchè $|\lambda - \lambda_k| \geq \delta > 0$ per un qualche δ, ma la convergenza non è in norma perché $1/|\lambda - \lambda_k|$ non va a 0 in k.

Osserva che se $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua, si può definire l'operatore

$$\phi(T) = \sum_k \phi(\lambda_k) e_k \otimes e_k$$

(mostra che in effetti la serie converge in senso forte). Questa possibilità è uno degli scopi dell'analisi spettrale, che si estende agli operatori autoaggiunti (ma compare lo spettro continuo) e ad alcuni operatori illimitati (*vedi* [RS] capitoli VII e VIII).

Concludo il capitolo con qualche considerazione sullo spettro degli operatori compatti, anche non autoaggiunti.

Teorema 10.7. *Spettro di un operatore compatto*

- *Se* $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \rho(T)$ *o* $\lambda \in \sigma_p(T)$.
- 0 *è nello spettro (cioè* T *non è invertibile).*
- *Se* $\lambda \neq 0$ *è un autovalore, allora è un autovalore isolato, cioè non è punto di accumulazione per* $\sigma(T)$.

Dimostrazione. La dimostrazione nel caso autoaggiunto sfrutta il fatto che se v_k è una sequenza di vettori di norma uno, con $Tv_k = \lambda v_k$, e i λ_k sono distinti, allora $v_k \rightharpoonup 0$, perché sono un sistema ortonormale, e dunque per compattezza di T, $Tv_k \to 0$, da cui $\lambda_k = (v_k, \lambda_k v_k) = (v_k, Tv_k) \to 0$.
Anche nel caso autoaggiunto $v_k \rightharpoonup 0$. Infatti, la dimensione del nucleo di $T - \lambda_k I$ è uguale alla dimensione del nucleo dell'aggiunto $T^* - \overline{\lambda_k}$ che dunque è non vuoto. Inoltre, se $T^* w_n = \overline{\lambda_n} w_n$, allora

$$\lambda_k (w_n, v_k) = (w_n, \lambda_k v_k) = (w_n, Tv_k) = (T^* w_n, v_k) = (\overline{\lambda_n} w_n, v_k) = \lambda_n (w_n, v_k)$$

da cui segue che $(w_n, v_k) = 0$ se $\lambda_n \neq \lambda_m$. Sia M_k il sottospazio generato dagli autovettori w_i di T^* di autovalori $\overline{\lambda_i}$, con $i \leq k$. Poiché gli autovalori sono distinti, M_{k+1} contiene strettamente M_k. Il vettore v_k è ortogonale a M_{k-1}, dunque, procedendo come nel teorema 9.2, $v_k \rightharpoonup 0$ (per provarlo, mostra che esiste un sistema ortonormale z_i, tale che M_k è generato da $\{z_i\}_{i=1}^k$, etc...). $\square$

Esercizio 30. Operatori di Hilbert-Schmidt

T è un operatore di Hilbert-Schmidt se per una qualche base $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$,

$$\text{tr } T^*T = \sum_k (T^*Te_k, e_k) = \sum_k \|Te_k\|^2 < +\infty$$

Nota che questo numero è la **traccia** della matrice infinita associata a T^*T.
Sia U un operatore unitario, mostra che tr $U^*AU =$ tr A. Oppure, equivalentemente, mostra che la traccia di un operatore non dipende dalla base scelta.

Mostra che $T \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$ è di Hilbert-Schmidt se e solo se è un operatore integrale con nucleo in L^2.
Mostra che T autoaggiunto è di Hilbert-Schmidt se e solo se

$$\sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} |\lambda_k|^2 < +\infty$$

Esercizio 31. Operatori diagonali

Sia T un operatore diagonale in una base $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, cioè

$$Te_k = \lambda_k e_k$$

e supponi che i λ_k siano reali (nota che T è dunque un operatore di moltiplicazione).

Mostra che T è limitato se e solo se $\sup_k |\lambda_k|$ è finito, e che

$$\|T\| = \sup_{k\in\lambda_k} |\lambda_k|$$

Mostra che T è autoaggiunto.

Mostra che se $\dim \operatorname{Ker}(\lambda_k \mathbf{I} - T)$ è finita per ogni k con $\lambda_k \neq 0$, e 0 è l'unico punto di accumulazione dei λ_k non nulli, allora T è compatto. Suggerimento: riscrivi T come

$$T = \sum_n \lambda_n P_n$$

dove i λ_n sono distinti, e P_n è il proiettore sul sottospazio finito dimensionale di autovalore λ_n. Concludi mostrando che se $\lambda_n \to 0$ (o se sono in numero finito), allora T è limite di operatori di rango finito e dunque compatto.

Nota che non è necessaria nessuna ipotesi sulla sommabilità degli autovalori; in particolare esistono operatori compatti che non sono di Hilbert-Schmidt.

11 Introduzione agli operatori illimitati

Nei capitoli precedenti abbiamo mostrato come si diagonalizza il laplaciano, applicando la teoria degli operatori compatti autoaggiunti all'inverso del laplaciano. È però possibile dimostrare un teorema di decomposizione spettrale direttamente per operatori autoaggiunti, anche illimitati. È una teoria più "sottile" di quella discussa fino ad ora, e in questo capitolo mi limiterò ad alcune considerazioni introduttive sugli operatori illimitati.

11.1 Dominio, estensioni, aggiunto

Ricordo come prima cosa che per definire un operatore illimitato A è necessario definire il sottospazio lineare su cui è definito, che indicherò con $\mathcal{D}(A)$, che pretenderemo sia denso in H. Uno "stesso" operatore può avere domini differenti. Per esempio, se Ω è un dominio di $\mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{l} \triangle_D : \mathrm{C}_0^\infty \to L^2(\Omega) \\ \triangle_N : \{f \in \mathrm{C}^\infty : \int_\Omega = 0,\ \partial_n f = 0 \text{ su } \partial\Omega\} \to L^2(\Omega) \\ \triangle_\infty : \mathrm{C}^\infty \to L^2(\Omega) \end{array}$$

sono tre operatori differenti perché i tre domini sono differenti. Questa differenza non è solo formale: nei capitoli precedenti abbiamo invertito $\triangle_D$ (cioè il laplaciano con condizioni di Dirichlet omogenee) e $\triangle_N$ (cioè il laplaciano con condizioni di Neumann omogenee), ottenendo degli operatori compatti con due sistemi di autofunzioni e autovalori differenti (si pensi al caso unidimensionale).

Definizione
A su $\mathcal{D}(A)$ è **simmetrico** se

$$\forall f, g \in \mathcal{D}(A) \quad (g, Af) = (Ag, f)$$

Poichè per funzioni C^∞ su Ω con bordo regolare vale

$$\int_\Omega g\triangle f = \int_\Omega \div(g\nabla f) - \int_\Omega \nabla g \cdot \nabla f = \int_{\partial\Omega} g\,\partial_n f - \int_\Omega \nabla g \cdot \nabla f$$

risulta che $\triangle_D$ e $\triangle_N$ sono operatori simmetrici, $\triangle_\infty$ no!

Definizione
B su $\mathcal{D}(B)$ è una **estensione** A su $\mathcal{D}(A)$ se $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ e

$$B|_{\mathcal{D}(A)} = A$$

Risulta che $\triangle_\infty$ estende $\triangle_D$ e $\triangle_N$, e $\triangle_D$ e $\triangle_N$ non sono l'uno un'estensione dell'altro.

Esempio 11.1. Operatori di moltiplicazione illimitati
Sia h una funzione non limitata e sia M_h l'operatore di moltiplicazione per h. Un ragionevole dominio di definizione di M_h è

$$\mathcal{D}(M_h) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \int_\mathbb{R} |f|^2|h| < +\infty\}$$

Analogamente, sia $\{\lambda_k\}$ una successione non limitata, definisco M_z l'operatore di moltiplicazione su $\ell_2(\mathbb{N})$ dato da

$$(M\hat{x})_k = \lambda_k x_k$$

con dominio

$$\mathcal{D}(M) = \{\hat{x} : \sum_k |x_k|^2 |\lambda_k| < +\infty\}$$

Evidentemente λ_k sono autovettori di M

L'aggiunto di un operatore limitato T si definisce attraverso il teorema di rappresentazione di Riesz, notando che

$$g \to (g, Tf)$$

è un funzionale lineare continuo in g, dunque esiste T^*g tale che

$$(T^*g, f) = (g, Tf)$$

Nel caso illimitato c'è qualche complicazione.

Definizione
Dato T, $\mathcal{D}(T)$, il dominio dell'operatore aggiunto è

$$\mathcal{D}(T^*) = \{g \in H : \ g \to (g, Tf) \text{ è un funzionale limitato per ogni } f \in \mathcal{D}(T)\}$$

Se $g \in CalD(T^*)$, poiché $\mathcal{D}(T)$ è denso in H, il funzionale lineare limitato (g, Tf) si estende a $f \in H$, e dunque, sempre per il teorema di rappresentazione di Riesz, esiste T^*g tale che, per ogni $f \in \mathcal{D}(T)$ si ha

$$(T^*g, f) = (g, Tf)$$

Osservazioni
1. Mentre c'è "libertà" di scelta per il dominio di un operatore illimitato, a seconda delle necessità, il dominio dell'operatore aggiunto è e determinato dal dominio dell'operatore.
2. Se A è simmetrico, A^* è una estensione di A, infatti, per ogni $g \in \mathcal{D}(A)$ risulta

$$(g, Af) = (Ag, f)$$

e dunque $g \to (g, Af)$ è limitato perché $|(g, Af)| \leq \|A^*g\|\|f\|$. Inoltre A^* ristretto a $\mathcal{D}(A)$ coincide evidentemente con A.

Definizione
A è autoaggiunto se è simmetrico e $\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A)$.

Esercizio 32. Operatori di moltiplicazione autoaggiunti
Provare che gli operatori M_h e M, definiti con h funzione reale e α_k successione reale, sono autoaggiunti.

11.2 Operatori chiusi

In questo paragrafo descrivo alcuni aspetti topologici degli operatori illimitati. Osservo innanzi tutto che la non limitatezza ha complicazioni di difficile gestione. Per esempio, se $f_k \to 0$, non è detto che $Af_k \to 0$. In particolare $\ker A$ potrebbe non essere chiuso, e lo stesso vale per $\ker(A - \lambda)$, con gravi conseguenze sulla possibilitià di analizzare le equazioni lineari-

Esercizio 33. La δ

Si consideri in $L^2([-1,1])$ il funzionale lineare δ definito sulle funzioni continue, che a f assegna la funzione costante $f(0)$.
Si determini il suo ker e si mostri che non è chiuso.
Si consideri ora l'operatore definito sulle funzioni continue che a f assegna la funzione costante $f(0)$.
Si determini il suo ker e si noti che non è chiuso.

Definizione

Un operatore T è **chiuso** se il suo grafico

$$\mathcal{G} = \{(f, Tf) : \ f \in \mathcal{D}(T)\}$$

è chiuso nella metrica di $H \times H$, cioè se $f_k \to f$ e $Tf_k \to g$, allora $f \in \mathcal{D}(T)$ e $Tf = g$.

Teorema 11.1. *Operatori chiusi*
Se T è chiuso, $\ker(T-\lambda)$ è chiuso per ogni λ

Dimostrazione. Noto preliminarmente che se T è chiuso lo è anche $T-\lambda$. Infatti il dominio di questo operatore è lo stesso di T, e se $f_k \to f$ e $(T-\lambda)f_k \to g$, allora $Tf_k \to \lambda f + g$, dunque per la chiusura di T segue che $f \in \mathcal{D}(T)$, e che $Tf = \lambda f + g$, cioè $Tf - \lambda f = g$. È dunque sufficiente dimostrare che il ker di T è chiuso.
Sia ora f_k una successione convergente a f tale che $Tf_k = 0$. Allora, per la chiusura di T, f è nel dominio e $Tf = 0$, cioè $f \in \ker T$. □

Teorema 11.2. *Chiusura dell'aggiunto*
T^* è chiuso

Dimostrazione. Sia $f_k \in \mathcal{D}(T^*)$ e $f_k \to f$, e sia $T^* f \to g$. Sia $h \in \mathcal{D}(T)$. Per definizione di aggiunto

$$(T^* f_k, h) = (f_k, Th)$$

Il primo membro tende a (g, h), il secondo a (f, Th), dunque

$$(g, h) = (f, Th)$$

da cui segue che il funzionale lineare che a h assegna (f, Th) è limitato in h (da $\|g\|$), dunque $f \in \mathcal{D}(T^*)$. Quindi $(f, Th) = (T^* f, h)$ e dunque, per densità di $\mathcal{D}(T)$, $g = Tf$. □

Una conseguenza facile di questo teorema è che gli operatori autoaggiunti sono chiusi. Dunque è possibile definire senza problemi risolvente e spettro, come nel caso degli operatori limitati.

Teorema 11.3. *Operatori autoaggiunti*
A simmetrico è autoaggiunto se e solo se

$$\mathrm{Range}\,(A + \mathrm{i}) = H = \mathrm{Range}\,(A - \mathrm{i})$$

Dimostrazione. Se A è autoaggiunto, è chiuso, dunque $\ker(A \pm \mathrm{i})$ è chiuso, e dunque vale

$$\ker(A + \mathrm{i}) \oplus \overline{\mathrm{Range}\,(A - \mathrm{i})} = H = \ker(A - \mathrm{i}) \oplus \overline{\mathrm{Range}\,(A + \mathrm{i})}$$

(lo si verifichi per esercizio). Inoltre si prova facilmente che A può solo avere autovalori reali. Resta dunque da provare che $\mathrm{Range}\,(A \pm i)$ sono chiusi. Come nel caso limitato,

$$\|(A + \mathrm{i})(f_n - f_m)\|^2 = \|A(f_n - f_m)\|^2 + \|f_n - f_m\|^2$$

e tende a zero per ipotesi, dunque f_n converge a una f perché è di Cauchy. Inoltre, $A+\mathrm{i}$ è chiuso, dunque f è nel dominio e $A+\mathrm{i}f=g$, cioè $g \in \mathrm{Range}\,(A+\mathrm{i})$.

Per dimostrare l'implicazione inversa, noto che se A è simmetrico, A^* è una sua estensione. Dunque si tratta di mostrare solo che $\mathcal{D}(A^*) \subset \mathcal{D}(A)$. Sia $f \in \mathcal{D}(A^*)$. Esiste $g \in \mathcal{D}(A)$ tale che

$$(A^*+\mathrm{i})f = (A+\mathrm{i})g$$

Infatti, il membro di destra è ben definito perché $f \in CalD(A^*)$ e dunque è un elemento di H, e g esiste perché $A+\mathrm{i}$ ha per immagine tutto H. Sia ora $h \in \mathcal{D}(A)$. Moltiplico per h e ottengo

$$(h,(A^*+\mathrm{i})f) = (h, A+\mathrm{i}f)$$

Il primo membro è uguale a $((A-\mathrm{i})h,f)$ per definizione di aggiunto, il secondo è uguale a $((A-\mathrm{i})h,f)$ per simmetria di A. Dunque, raccogliendo

$$((A-\mathrm{i})h, f-g) = 0$$

Poiché $\mathrm{Range}\,(A-\mathrm{i}) = H$, al variare di $h \in \mathcal{D}(A)$ il primo termine ricopre tutti gli elementi di H, e dunque $f=g$, cioé $f \in CalD(A)$. □

Questo risultato è un primo passo nella direzione del teorema spettrale per operatori autoaggiunti. A differenza del caso limitato, però, l'operatore può avere spettro continuo e la decomposizione spettrale ne tiene conto. Si veda [RS], [T] per una teoria completa.

Esempio 11.2. Operatori di moltiplicazione autoaggiunti

Sia $h(x)$ reale, continua e non limitata, sia M_h l'operatore di moltiplicazione per h. Come nel caso limitato, è facile provare che M_h non ha spettro puntuale a meno che h non abbia tratti costanti, e lo spettro di M_h è solo continuo ed è l'immagine di h.

Nei testi di fisica teorica non troppo matematizzati, si osserva che definendo $g(x)=\delta(x-x_0)$, si ha

$$(M_h g)(x) = h(x)\delta(x-x_0) = h(x_0)\delta(x-x_0) = h(x_0)g(x)$$

In questo senso $\delta(x-x_0)$ è autofunzione di autovalore $h(x_0)$. Però evidentemente non è il L^2 e se ne conclude che $h(x_0)$ è nello spettro continuo.

Esempio 11.3. Il laplaciano in $\mathbb{R}$

Consideriamo l'operatore $\triangle$, definito su un qualche sottospazio denso di $L^2(\mathbb{R})$. In trasformata di Fourier,

$$\mathcal{F}(\triangle f) = -\lambda^2 \mathcal{F}(f)$$

dunque è un operatore di moltiplicazione. Il suo naturale dominio di definizione è

$$\{f \in L^2 : \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2 \lambda^4 \,\mathrm{d}\lambda < +\infty$$

(che è lo spazio H^2), e in questo dominio è simmetrico, e dunque autoaggiunto.
Nei testi elementari di fisica teorica, si nota che

$$\triangle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_0 x} = -\lambda_0^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_0 x}$$

e questa identità viene interpretata dicendo che $-\lambda_0^2$ appartiene allo spettro continuo, perché l'autofunzione $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_0 x}$ non appartiene a L^2.

Si tratta della stessa osservazione che abbiamo fatto a proposito degli operatori di moltiplicazione, riletta in termini di laplaciano usando la trasformata di Fourier, infatti l'antitrasformata di $\delta(\lambda-\lambda_0)$ è proprio $e^{ix\lambda_0}$, a meno di costanti.

Nei due esempi precedenti ho mostrato come i valori dello spettro continuo siano legati a soluzioni dell'equazione agli autovalori, ma con soluzioni che non sono funzioni L^2. Si può dare un quadro rigoroso in cui rileggere questi esempi, in termini di "quasi autovettori", dette successioni di Weyl.

Teorema 11.4. *Successioni di Weyl*
Dato A autoaggiunto, $\lambda \in \mathbb{R}$ è nello spettro se e solo se esiste una successione di Weyl, cioè una successione f_n, con $\|f_n\| = 1$, tale che

$$\|(A-\lambda)f_n\| \to 0$$

Dimostrazione. Supponiamo che esista una successione si Weyl per il valore λ. Se λ non fosse un valore dello spettro, allora sarebbe un punto del risolvente, dunque $(A-\lambda)^{-1}$ è un operatore continuo da H nel dominio di A. Quindi

$$1 = \|f_n\| = \|(A-\lambda)^{-1}(A-\lambda)f_n\| \leq \|(A-\lambda)^{-1}\|\, \|(A-\lambda)f_n\| \to 0$$

ma ciò è impossibile.
Mostro il viceversa. Sia $\lambda \in \sigma(A)$. Poiché A è autoaggiunto, $\lambda + \mathrm{i}/n \in \rho(A)$. D'altra parte, la norma di $R_{\lambda+\mathrm{i}/n}(A)$ deve divergere per $n \to +\infty$, infatti

$$A - \lambda = A - \left(\lambda + \frac{\mathrm{i}}{n}\right) + -\frac{\mathrm{i}}{n} == \left(A - \left(\lambda + \frac{\mathrm{i}}{n}\right)\right)\left(\mathbf{I} + \frac{\mathrm{i}}{n}R_{\lambda+\mathrm{i}/n}\right)$$

dunque se $\|R_{\lambda+\mathrm{i}/n}(A)\| \leq c$, per n piccolo il secondo fattore sarebbe invertibile in serie di Neumann, mentre il primo è invertibile per ogni n.
Sia dunque g_n con $\|g_n\| = 1$ tale che

$$\|R_{\lambda+\mathrm{i}/n}(A)g_n\| > n$$

Sia $f_n = R_{\lambda+\mathrm{i}/n}(A)g_n/\|R_{\lambda+\mathrm{i}/n}(A)g_n\|$, che ha norma 1. Valutiamo come agisce $A-\lambda$ su questi vettori:

$$(A-\lambda)f_n = \left(A - \lambda - \frac{\mathrm{i}}{n}\right)f_n + \frac{\mathrm{i}}{n}f_n = \frac{1}{\|R_{\lambda+\mathrm{i}/n}(A)g_n\|}g_n + \frac{\mathrm{i}}{n}f_n$$

In primo addendo tende a zero in norma perchè il numeratore diverge mentre $\|g_n\| = 1$, il secondo tende evidentemente a zero. □

Esercizio 34. Successioni di Weyl per operatori di moltiplicazione
Sia h continua e reale, costruire una successione di Weyl per l'operatore M_h, per il punto dello spettro $h(x_0)$.
Suggerimento: usare le approssimazioni della $\delta(x-x_0)$.

12 Il problema di Poisson

La teoria svolta nella parte iniziale di questo capitolo ha scopi puramente didattici, ed è rivolta a chi non conosce gli spazi di Sobolev e il loro uso per la ricerca della soluzione dell'equazione di Poisson.
In particolare, per il problema in un intervallo limitato, sia la serie di Fourier che il metodo della funzione di Green ci dicono tutto sulle soluzioni di $u'' = -f$ in un intervallo $[a, b]$. D'altra parte la semplicità di questo caso rende possibile introdurre facilmente gli strumenti più sofisticati che saranno necessari per il caso in dimensioni più alte. Darò comunque le definizioni principali direttamente in $\mathbb{R}^n$.

Richiamo alcune definizioni che riguardano gli spazi di Sobolev. Come già fatto introducendo le distribuzioni, allarghiamo la nozione di derivata definendola attraverso l'**effetto** che ha sulle funzioni test. Indicherò con $\mathcal{D}(\Omega)$ le funzioni $C^\infty(\Omega)$ a supporto compatto in Ω (ricordo che Ω è aperto, dunque il supporto non tocca il bordo). Sia f una funzione regolare definita su Ω, e sia $\mathbf{w} \in \mathcal{D}(\Omega)$ un campo vettoriale. Per il teorema della divergenza

$$\int_\Omega \nabla f \cdot \mathbf{w} = -\int_\Omega f \, \nabla \cdot \mathbf{w}$$

Si noti che il termine di bordo è zero perché $\mathbf{w}$ ha supporto compatto in Ω. Se ∇f è in $L^2(\Omega)$ allora

$$\left| \int_\Omega f \, \nabla \cdot \mathbf{w} \right| \leq \|\nabla f\| \, \|\mathbf{w}\|$$

Dunque l'esistenza del gradiente di f permette di integrare il prodotto tra f e la divergenza di un campo regolare, stimando il risultato con la norma del campo. Usando questa osservazione, diamo la definizione di gradiente debole. Sia $f \in L^2(\Omega)$. Diremo che f ha **gradiente debole** in $L^2(\Omega)$ se esiste una funzione vettoriale $\mathbf{u}$ tale che, per ogni campo vettoriale $\mathbf{w} \in \mathcal{D}(\Omega)$ vale

$$-\int_\Omega f \nabla \cdot \mathbf{w} = \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$$

Se esiste, il gradiente debole di f è unico, e, se f è regolare, ovviamente $\mathbf{u} = \nabla f$.

Si chiama **spazio di Sobolev** H^1 lo spazio delle funzioni $u \in L^2(\Omega)$ con gradiente debole $\nabla u \in L^2(\Omega)$. Il prodotto scalare su H^1 è

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2}$$

dove, naturalmente

$$(\nabla u, \nabla v)_{L^2} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v.$$

Si dimostra che H^1 è effettivamente uno spazio di Hilbert, e che

$$\overline{C^\infty(\Omega)}^{H^1} = H^1$$

cioè H^1 coincide con la chiusura topologica delle funzioni $C^\infty(\Omega)$ rispetto alla norma H^1.

12.1 Il problema di Poisson-Neumann in $[a, b]$

Definizione di $H^1(a, b)$
Lo spazio $H^1(a, b)$ è lo spazio delle funzioni quadro sommabili con derivata debole quadro sommabile. Dimostro che avere la derivata in L^2 dà anche regolarità puntale alla funzione. Sia $f \in C^\infty(a, b)$ e $\|f\| + H^1 < +\infty$. Indico con L la lunghezza dell'intervallo $L = b - a$.

1.
$$|f(x) - f(y)| \leq \int_x^y |f'| \leq \sqrt{|x - y|}\|f'\|$$
e dunque f si estende per continuità agli estremi dell'intervallo e la stima vale anche per a e b

2. Sia $m_f = 1/L \int_a^b f$ la media di f.
$$|m_f| \leq \frac{1}{L} \int_a^b |f| \leq \frac{1}{\sqrt{L}}\|f\|$$

3. Poiché f è continua in $[a, b]$, esiste un punto $\bar{x}$ tale che $m_f = \bar{x}$. Dunque,
$$|f(x) - m_f| \leq \sqrt{L}\|f'\|$$

4. Usando i punti precedenti
$$|f(x)| \leq |f(x) - m_f| + |m_f| \leq \sqrt{L}\|f'\| + \|f\|/\sqrt{L}$$

Queste affermazioni valgono anche per $f \in H^1$, per densità. Infatti, se $f \in H^1$ esiste $f_n \in C^\infty(a, b)$ che converge a f in norma H^1, dunque $\|f_n\|_{H^1} \leq c$. Dalle stime precedenti segue che f_n sono equilimitate e equi-hölderiane, dunque per Ascoli-Arzelà ogni sottosequenza di f_n ha una sottosequenza convergente nella norma del sup. Ma $f_n \to f$ in L^2, dunque tutte le sottosequenze convergono uniformemente a f. A questo punto si può passare al limite ottenendo la tesi.

Si provi per esercizio, senza invocare il teorema di Ascoli-Arzelà, che f_n è di Cauchy nella norma del sup.

Procedendo come sopra, è immediato dimostrare che i chiusi e limitati di H^1 sono compatti rispetto alla convergenza uniforme. Infatti la limitatezza della norma garantisce equilimitatezza e equicontinuità, e dunque si può invocare il teorema di Ascoli-Arzelà. Poiché la convergenza in norma L^∞ implica quella in norma L^2, ne segue che i limitati di H^1 sono precompatti in L^2. Si dice dunque che H^1 si **immerge compatto** il L^2.

La disuguaglianza
$$|f(x) - m_f| \leq \sqrt{L}\|f'\|$$
rientra nella classe delle disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger e questo tipo di disuguaglianza ha un ruolo chiave nelle applicazioni degli spazi di Sobolev. Prima di mostrarne una, diamone la sua versione in L^2, che si ottiene integrando in x.

Teorema 12.1. *Disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger in dimensione 1*

$$\|f - m_f\|_2^2 \leq \int_a^b \mathrm{d}x \leq L\|f'\|_2^2 = L^2\|f'\|_2^2$$

e dunque

$$\|f - m_f\|_2 \leq L\|f'\|_{L^2} \tag{12.1}$$

Consideriamo di nuovo il problema di Poisson $u'' = -f$ con condizioni di Neumann omogenee. Sappiamo che f deve essere a media nulla, e che possiamo cercare la soluzione tra le funzioni a media nulla perché u è definita a meno di una costante.
Integrando contro una funzione test $\phi \in C^\infty(a, b)$, l'equazione data diventa

$$\int_a^b u'\phi' = \int_a^b f\phi$$

(il termine di bordo si annulla perché u' è 0 al bordo). Poiché ogni funzione $g \in H^1$ è limite di funzioni regolari nella norma H^1, l'uguaglianza precedente deve valere anche se $\phi \in H^1$. Chiamerò **soluzione debole** in H^1 una funzione u in H^1 per cui valga l'uguaglianza precedente per ogni $\phi \in H^1$. Noto che se $\phi = 1$, l'uguaglianza è soddisfatta per qualunque u, dunque la formulazione debole ha senso per funzioni ϕ ortogonali alle costanti. Mostriamo che u esiste unica se f è a media nulla, nel sottospazio $H_m^1 = g \in H^1 : \int_a^b g = 0$, che è proprio il sottospazio ortogonale alle costanti.

Il passaggio chiave è la disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger, che assicura che se $f \in H_m^1$, allora

$$\|f\|_2 \leq L\|f'\|_2$$

Da questa disuguaglianza, infatti, segue che

$$\|f\|_{H_m^1} = \sqrt{\|f\|_2 + \|f'\|_2} \text{ e } \|f'\|_2$$

sono **norme equivalenti** in H_m^1, su cui dunque posso considerare come prodotto scalare la forma

$$(f, g)_m = \int_a^b f'g'$$

Allora, assegnata f in L_m^2 (lo spazio delle funzioni L^2 a media nulla) il funzionale

$$\phi \to \int_a^b fg$$

è lineare continuo su H_m^1 perchè

$$\left|\int_a^b f\phi\right| \leq \|\phi\|_2\|f\|_2 \leq \sqrt{L}\|\phi\|_{H_m^1}$$

Per il teorema di rappresentazione di Riesz, esiste unica $u \in H_m^1$ tale che, per ogni $g \in H_m^1$:

$$\int_a^b fg = (u, g)_m = \int_a^b u'g'.$$

In questo modo abbiamo trovato $u \in H_m^1$, e abbiamo anche l'unicità.

Una osservazione sulla regolarità: dalla definizione stessa di soluzione debole, scegliendo $\phi \in \mathcal{D}(a,b)$, si ottiene che f è la derivata debole di u', ed è in L^2. Dunque $u \in H^2$, che è lo spazio delle funzioni con derivata prima e seconda il L^2. Dal fatto che le funzioni di H^1 sono Hölder continue, segue facilmente che le funzioni di H^2 hanno derivata prima Hölder continua. Quindi se u è soluzione debole con $f \in L^2_m$, allora $u \in C^{1,1/2}$. Inoltre, la derivata di u si estende fino al bordo perché è hölderiana.

Se f è continua, $u \in C^2((a,b)) \cap C^1([a,b])$ e la soluzione è forte.

Teorema 12.2. *Sia T l'operatore che a $f \in L^2_m$ associa $u \in H^1_m$ soluzione dell'equazione di Poisson in forma debole. Considerandolo come operatore da L^2_m a L^2_m, T è autoaggiunto e compatto.*

Dimostrazione. Per ogni $v \in H^1_m$,

$$\int_a^b (Tf)'v' = \int_a^b fv$$

Scegliendo $g \in L^2_m$ e $v = Tg \in H^1_m$ si ha

$$\int_a^b (Tf)'(Tg)' = \int_a^b f\,Tg$$

Dunque T è autoaggiunto. La compattezza di T segue dal fatto che l'immagine di un limitato è un limitato in H^1, che si immerge compatto in L^2. □

Posso applicare la teoria degli operatori compatti autoaggiunti, e dedurre che T ammette una base di autofunzioni ϕ_k, con autovalori μ_k positivi che tendono a zero (sono positivi perchè $-\partial_x^2$ è un operatore positivo). Ricordo che $Tf = u$ con $f \in L^2_m$ e $u \in H^1_m$ è equivalente al fatto che u è soluzione debole del problema di Poisson. Dunque ϕ_k è soluzione debole del problema di Poisson con $f = \lambda_k \phi_k$, con $\lambda_k = 1/\mu_k$. Poiché $\phi_k \in L^2$, per l'analisi della regolarità che abbiano fatto al punto precedente, si ottiene che $\phi_k \in H^2$ e dunque è $C^{1,1/2}$. Usando di nuovo l'equazione, si ottiene che ϕ_k è C^2 quindi vale

$$\phi_k'' = -\lambda_k \phi_k$$

da cui segue che ϕ_k sono funzioni $C^\infty([a,b])$

12.2 Il problema di Poisson-Dirichlet in $[a,b]$

Lo scopo di questa sezione è adattare la teoria svolta per le condizioni di Neumann al caso di condizioni di Dirichlet. Darò però le definizioni e alcuni teoremi direttamente per Ω dominio limitato di $\mathbb{R}^n$, anche se la teoria per questo caso è svolta nel paragrafo successivo.

Per trattare il caso di condizioni di Dirichlet omogenee, bisogna ambientare il problema in uno spazio che tenga conto delle condizioni al contorno. In una dimensione è particolarmente semplice, perché

$$H^1_0(a,b) = \{f \in H_1(a,b) : \ f(a) = 0 = f(b)\}$$

è un sottospazio chiuso di H^1 (ricordo che le funzioni di H^1 sono $C^{1/2}$). D'altra parte in dimensione maggiore le funzioni di H^1 non sono necessariamente continue, dunque è necessario operare un modo differente.

Definizione.
Si indica con H_0^1 il sottospazio chiuso di H^1 che si ottiene come

$$\overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1} = H_0^1.$$

La definizione di questo spazio include in qualche senso la condizione al contorno omogenea di Dirichlet, infatti se $f \in H_0^1$ è regolare, allora è nulla al bordo. D'altra parte non è evidente cosa vuol dire "valore al bordo" per una funzione non regolare (per approfondimenti, *vedi* i teoremi di traccia su [S] par 7.7).
In questo spazio si ambienta perfettamente il problema di Poisson-Dirichlet. Ma prima bisogna premettere un'importante disuguaglianza.

Teorema 12.3. *Disuguaglianza di Poincaré in* $H_0^1((a,b))$
Sia $f(x) \in H_0^1$. *Allora*

$$\|f\|_2 \leq 2(b-a)\|f'\|_2$$

Dimostrazione. Lo dimostro prima per $f \in C_0^\infty([a,b])$. Poiché $f(a) = 0$

$$f^2(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f^2(y)\,\mathrm{d}y = 2\int_a^x f(y)\,f'(y)\,\mathrm{d}y \leq 2\left(\int_a^b f^2\right)^{1/2}\left(\int_a^b f'^2\right)^{1/2}$$

per Cauchy-Schwartz. Integrando in x:

$$\|f\|_2^2 \leq 2(b-a)\|f\|_2\,\|f'\|_2$$

da cui

$$\|f\|_2 \leq 2L\|f'\|_2$$

Questa conclusione si estende facilmente a $f \in H_0^1$ per densità delle funzioni C_0^∞ in H_0^1. □

Teorema 12.4. *Disuguaglianza di Poincaré in* $H_0^1(\Omega)$
Se $f \in H_0^1(\Omega)$ *vale la disuguaglianza di Poincaré*

$$\|f\|_2^2 \leq c\|\nabla f\|_2^2 \tag{12.2}$$

Dimostrazione. Sia $f \in C_0^\infty(\Omega)$, Prolungando f a zero in un dominio rettangolare di spigoli di lunghezza L opportuna, e usando il caso unidimensionale, è facile mostrare che Usando la densità di $C_0^\infty(\Omega)$ in H_0^1 si mostra che la disuguaglianza di Poincaré (12.2) vale per ogni f in H_0^1 (lo lascio per esercizio: sia $f_n \in C_0^\infty(\Omega)$ con $f_n \to f$ nella norma H^1; ne segue che $f_n \to f$ in L^2 e $\nabla f_n \to \nabla f$ in L^2 ...).
Si osservi infine che la disuguaglianza di Poincaré non è verificata da $f = 1$ (e della costanti in generale). Questo fatto prova che H_0^1 è un sottospazio proprio di H_1. □

Esercizio 35. * L'ortogonale di H_0^1
Trova l'ortogonale di $H_0^1(-1,1)$ in $H^1((-1,1)$.

Esercizio 36. * δ su funzioni $H^1(a,b)$
Sia $x_0 \in [a,b]$ e sia $Tf(x) = f(x_0)$. Prova che T è un funzionale lineare e continuo in H^1. Dunque per il teorema di Riesz esiste $\delta \in H^1$ tale che $(\delta, f)_{H^1} = f(x_0)$. Trova l'espressione esplicita di δ.

Risolvi lo stesso problema in H_0^1 e H_m^1, con il prodotto scalare dato dal prodotto L^2 delle derivate.

Esercizio 37. Poisson-Dirichlet nel caso unidimensionale

Consideriamo di nuovo il problema di Poisson $u'' = -f$, ma stavolta con condizioni di Dirichlet omogenee. Integrando contro una funzione test $\phi \in \mathcal{D}(a,b)$, l'equazione data diventa

$$\int_a^b u'\phi' = \int_a^b f\phi$$

Questa volta il termine di bordo si annulla perché ϕ è nulla al bordo. Per densità delle funzioni di $\mathcal{D}(a,b)$ in H_0^1, l'uguaglianza precedente deve valere anche se $\phi \in H_0^1$. Chiamerò soluzione debole in H_0^1 una funzione u in H_0^1 per cui valga l'uguaglianza precedente per ogni $\phi \in H_0^1$.
Il fatto che in H_0^1 valga la disuguaglianza di Poincaré permette di trattare questo problema nello stesso modo del caso delle condizioni di Neumann. Dalla disuguaglianza segue infatti che

$$\sqrt{\|f\|_2 + \|f'\|_2} \text{ e } \|f'\|_2$$

sono **norme equivalenti** in H_0^1, su cui dunque posso considerare come prodotto scalare la forma bilineare

$$(f,g)_m = \int_a^b f'g'$$

Allora, assegnata $f \in L^2$, il funzionale

$$\phi \to \int_a^b fg$$

è lineare continuo su H_0^1 perchè

$$\left| \int_a^b f\phi \right| \leq \|\phi\|_2 \|f\|_2 \leq \sqrt{L} \|\phi\|_{H_0^1}$$

Per il teorema di rappresentazione di Riesz, esiste unica $u \in H_0^1$ tale che, per ogni $g \in H_0^1$:

$$\int_a^b fg = (u,g)_m = \int_a^b u'g'.$$

In questo modo abbiamo trovato $u \in H_0^1$, e abbiamo anche l'unicità.
L'analisi della regolarità è identica al caso delle condizioni di Neumann omogenee.

Esercizio 38. La base per ∂_x^2 con condizioni di Dirichlet omogenee

Per esercizio, mimando il caso di condizioni di Neumann omogenee, provare che $L^2(a,b)$ ha una base di autofunzioni della derivata seconda, che sono $C^\infty[a,b]$, e gli autovalori sono una sequenza positiva che tende a infinito.

*Esercizio 39. **

Provare ad adattare questa teoria all'equazione

$$((1-x^2)u')' = -f$$

Possibile traccia f deve essere a media nulla, la spazio da considerare deve essere quello delle funzioni a media nulla con $\int_{-1}^1 (1-x^2)u'^2$ limitato. Serve però una disuguaglianza di Poincaré che assicuri la continuità in questa norma del funzionale $g \to \int gf$ con f in L^2.

12.3 Il Problema di Poisson in Ω

Per il problema di Poisson con condizioni di Dirichlet omogenee abbiamo già tutti gli strumenti per ottenere un'unica soluzione debole. Resta però da discutere la regolarità, su cui richiamerò qualche teorema. Per il problema di Poisson-Neumann manca invece l'opportuna disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger, che si dimostra sotto opportune condizioni di regolarità del bordo di Ω.

Sia Ω un dominio di $\mathbb{R}^n$ (cioè un aperto connesso e limitato). L'equazione di Poisson con condizioni di Dirichlet omogenee al bordo è

$$\begin{cases} \triangle u = -f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{12.3}$$

e può essere vista come il problema della determinazione del potenziale elettrostatico u data la densità di carica f, assumendo u nullo al bordo. La stessa equazione si ottiene se si cercano le soluzioni di equilibrio per l'equazione delle onde (o del calore) con forzante f, con condizioni di Dirichlet nulle al bordo.
Poiché l'equazione delle onde con forzante viene da una lagrangiana (*vedi* il capitolp 1.1), l'equazione dell'equilibrio sarà anche l'equazione per la determinazione dei minimi dell'energia potenziale. Sia dunque $E[u]$ il funzionale che esprime l'energia

$$E[u] = \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u - \int_\Omega fu$$

La variazione prima di E si ottiene come al solito da

$$\delta E = \mathrm{d}t\varepsilon|_{\varepsilon=0} E[u+\varepsilon v] = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - fv)$$

Imponendo che v sia nulla al bordo (in accordo con le condizioni al contorno assunte su u), si ottiene che i punti u stazionari per $E[u]$ (e in particolare il punto di minimo), devono soddisfare l'equazione

$$\int_\Omega (-\triangle u - f)v = 0 \quad \forall v \text{ regolare e nulla al bordo}$$

Infatti

$$\nabla u \cdot \nabla v = \nabla \cdot (v\nabla u) - \triangle uv$$

e, usando il teorema della divergenza e il fatto che v è nulla al bordo,

$$\int_\Omega \nabla \cdot (v\nabla u) = \int_{\partial\Omega} v\,\partial_n u = 0.$$

Definizione $u \in H_0^1$ è una **soluzione debole** del problema di Poisson-Dirichlet (12.3) se per ogni $v \in H_0^1$ vale

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega vf$$

La disuguaglianza di Poincaré permette di risolvere immediatamente il problema dell'esistenza di u. Infatti, come nel caso unidimensionale, la norma di H^1 è equivalente, in H_0^1, alla norma data dal prodotto scalare

$$(u,v)_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

Data $f \in L^2$, per ogni $v \in H_0^1$ vale

$$\left| \int_\Omega fv \right| \leq \|f\| \, \|v\| \leq c\|f\| \|v\|_{H_0^1}.$$

Questa disuguaglianza implica che $v \to \int_\Omega fv$ è lineare continuo in H_0^1 e dunque per il teorema di Riesz esiste u che lo rappresenta mediante prodotto scalare, cioè u è soluzione debole dell'equazione di Poisson.
Risulta cosí definito

$$T : L^2 \to H_0^1 : \quad Tf = u \iff \int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega fv \quad \forall \, v \in H_0^1$$

Esercizio 40.
Mostra che 0 non è un autovalore per T.

Teorema 12.5. *T è autoaggiunto*
T è autoaggiunto.

Dimostrazione. Data $f \in L^2(\Omega)$, per ogni $v \in H_0^1$ si ha che

$$(Tf, v)_1 = (f, v)$$

Sia $g \in L^2(\Omega)$, scegliamo $v = Tg \in H_0^1$. Si ottiene

$$(Tf, Tf)_1 = (f, Tg)$$

Scambiando f con g nei vari passaggi, si ottiene infine

$$(f.Tg) = (Tf.Tg)_1 = (g, Tf)$$

□

Teorema 12.6. *Compattezza di T*
$H_0^1(\Omega)$ si immerge compatto in $L^2(\Omega)$. Dunque T è compatto.

Dimostrazione. In dimensione 1 è stato molto semplice mostrare la compattezza in L^2 dei chiusi limitati di H^1. In dimensione maggiore è necessario qualche sforzo e qualche cautela in più.
Sia L tale che $\Omega \subset J^n$, con $J = [-L/2, L/2]^n$. Poichè se $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, allora la funzione che si ottiene prolungandola in tutto J^n con 0 è in $\subset \mathcal{D}(J^n)$, si può identificare ogni funzione di $H_0^1(\Omega)$ con una funzione di $H^1(J^n)$ periodica.
Ricordo che i coefficienti di Fourier sono definiti da

$$\hat{f}_k = \frac{1}{(2L)^{n/2}} \int_J^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi x/L} f(x) \, \mathrm{d}x$$

e che se f è regolare

$$\widehat{\nabla f}_k = \mathrm{i}k\frac{\pi}{L}.$$

Dunque la chiusura in H^1 delle funzioni C^∞ periodiche sono date in Fourier da $\hat{f}_k$ tali che

$$\|f\|_{H^1}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left((1 + |k|^2 \frac{\pi^2}{L^2} \right) |\hat{f}_k|^2 < +\infty$$

Come dimostrato nel punto 10.1, i limitati in questa norma sono compatti il $\ell_2(\mathbb{Z})$, e dunque compatti in $L^2(J^n)$. Ne segue che $H_0^1(\Omega)$ si immerge compatto in $L^2(\Omega)$. $\square$

La simmetria e la compattezza di T garantiscono che esiste una base di autofunzioni ϕ_k con autovalori μ_k decrescenti che tendono a 0 (0 non è autovalore dunque, essendo T compatto, gli autovalori sono infiniti e accumulano in 0). Dunque

$$T\phi_k = \mu_k \phi_k$$

Si noti che si può dimostrare che le autofunzioni sono $C^\infty(\Omega)$.

Rimane da considerare il problema di Poisson-Neumann in Ω, per il quale enuncerò i risultati, senza le dimostrazioni (che avete fatto nel corso di Istituzioni di Analisi Superiore). Per trattarlo sarà necessario discutere della regolarità del bordo di un dominio.

12.4 Il problema di Poisson-Neumann in Ω

Definizione Un dominio Ω è di classe C^k se $\partial\Omega$ è, in ogni suo punto, localmente grafico di una funzione di classe C^k.
La definizione rigorosa è la seguente. Si richiede che per ogni $x \in \partial\Omega$, esista una palla B di centro x, un sistema di coordinate cartesiane (z, y), con $z \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $y \in \mathbb{R}$, con origine in x, un intorno U di 0 in $\mathbb{R}^{n-1}$ ed una funzione $\Phi \in C^k(U, \mathbb{R})$ tali che

- $\partial\Omega \cap B = \{(z, \Phi(z)) |\, z \in U\}$
- $\Omega \cap B = \{(z, y) \in B |\, z \in U, y < \Phi(z)\}$

Si dice che Ω è lipschitziano se Φ è lipschitziana. Noto che per il teorema di Rademacher, una funzione lipschitziana ha gradiente quasi ovunque, e dunque per quasi ogni $x \in \partial\Omega$, esiste l'iperpiano tangente a $\partial\Omega$ in x e quindi la derivata normale esterna (per questo serve la seconda condizione data sopra, che afferma che distinguo localmente interno ed esterno).

Noto infine che se Ω è limitato, Ω è unione finita di grafici di funzioni lipschitziane (uso la compattezza).

La condizione di lipschitizanità è quella minima che permette di dimostrare il teorema della divergenza, e permette anche di costruire un operatore di prolungamento per H^1

Teorema 12.7. *Teorema di prolungamento Sia Ω limitato e lipschitziano. Esiste un dominio limitato Ω_0 che contiene compattamente Ω e un operatore lineare E da $H^1(\Omega)$ a $H_0^1(\Omega_0)$, tale che.*

$$\|Ef\| \leq c\|f\| \quad e \quad Ef|_\Omega = f$$

Per la dimostrazione vedi [S] o [G]. Questo teorema asserisce che ogni funzione di $H^1(\Omega)$ è prolungabile a una funzione a supporto compatto, in un dominio più grande.

Abbiamo già usato un caso facile di teorema di prolungamento: sia Ω_0 un dominio che contiene Ω, e sia

$$Ef(x) = f(x) \text{ per } x \in \Omega,\ 0 \text{ altrimenti}$$

E è un'isometria (non suriettiva) da $H_0^1(\Omega)$ a $H_0^1(\Omega_0)$. Nel caso di funzioni solo $H^1(\Omega)$ non si può invece prolungare ponendo $f = 0$ fuori da Ω, perchè la funzione che si ottiene non è in H^1.
Il teorema di prolungamento è alla base di due importanti risultati.

Teorema 12.8. *Immersione compatta di $H^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$*
Se Ω è lipschitziano, $H^1(\Omega)$ si immerge compattamente in $L^2(\Omega)$.

La dimostrazione la lascio per esercizio, perché è identica al caso di H^1, a parte la necessità di usare le estensioni delle funzioni di H^1.

Teorema 12.9. *Teorema di Poincaré-Wirtinger*
Se Ω è lipschitziano, esiste una costante c tale che per ogni $u \in H^1$

$$\|u - u_m\| \leq c\|\nabla u\|$$

Dimostrazione. La dimostrazione si può fare facilmente per assurdo: sia u_n a media nulla e normalizzata

$$\|u_n\|_{H^1}^2 = \|u_n\|^2 + \|\nabla u_n\|^2 = 1$$

tale che

$$\|u_n\| \geq n\|\nabla u_n\|.$$

Per la limitatezza di $\|u_n\|$ segue che $\|\nabla u_n\| \to 0$, e dunque, usando la normalizzazione, $\|u_n\| \to 1$. Poiché $\|u_n\|_{H^1}$ è limitata, u_n converge debole in H^1 a $u \in H^1$, e dunque $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$, e $u_n \to u$ in L^2, per la compattezza dell'immersione di H^1 in L^2. Quindi

$$\|\nabla u\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|gradu_n\| = 0$$

Ma allora u è una costante (ha gradiente nullo), di media nulla, e dunque è nulla, invece, poiché u_n converge a u il L^2, $\|u\| = \lim_{n\to+\infty} \|u_n\| = 1$, che è assurdo. □

Esercizio 41. Il problema di Poisson-Neumann

Come facile esercizio, si provi l'esistenza e unicità di una soluzione debole in $H_m^1(\Omega)$ (lo spazio delle funzioni H^1 a media nulla) dell'equazione

$$\triangle u = -f$$

con condizioni di Neumann omogenee, secondo le seguenti linee.

a. Mostra che può esistere una soluzione regolare del problema solo se vale la condizione di compatibilità

$$\int_\Omega f = 0$$

(usa il teorema della divergenza, o, se preferisci, la prima identità di Green)

b. Mostra che se u è soluzione, allora $u + c$ è soluzione per ogni costante c.

c. Mostra che se u è una soluzione regolare, per ogni v in $H^1(\Omega)$ vale

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega fv \tag{12.4}$$

(dimostralo prima per $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ e concludi per densità).

d. Nota che poiché f è a media nulla, questa identità vale se e solo se vale per $v \in H_m^1$, il sottospazio di $H^1(\Omega)$ delle funzioni a media nulla.

e. Dimostra che H^1_m è un sottospazio chiuso di H^1 e che il suo ortogonale in H^1 è il sottospazio delle funzioni costanti.

f. Usando la disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger, mostra che in H^1_m, $\|gradu\|$ è una norma equivalente a quella di H^1, che dunque puoi considerare dotato del prodotto scalare

$$(u,v)_{H^1_m} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

g. Usa il teorema di Riesz per dimostrare l'esistenza e unicità di una soluzione debole in H^1_m

h. Mostra che l'operatore $T : L^2_m \to H^1_m$ che dà la soluzione è autoaggiunto e compatto.

12.5 Le costanti ottimali per le disuguaglianze di Poincaré

Considero di nuovo il problema di Poisson-Dirichlet, in $H^1_0(\Omega)$, con $T : L^(\Omega) \to H^1_0(\Omega)$, dato da

$$Tf = u \quad \Longleftrightarrow \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega fv$$

Siano ϕ_k le autofunzioni di T, e siano μ_k gli autovalori.

A meno della questione della regolarià fino al bordo, le funzioni ϕ_k soddisfano per per ogni $v \in H^1_0$

$$\mu_k(\phi_k, v) = (T\phi_k, v)_1 = (\phi_k, v)$$

Scegliendo $v = T\phi_h$ ho

$$\mu_k(\phi_k, \phi_h)_1 = (\phi_k, \phi_h) = \|\phi_k\|\delta_{kh}$$

Scegliendo ϕ_k normalizzate in L^2, sia ottiene dunque

$$(\phi_k, \phi_h)_1 = \delta_{kh}\mu_k$$

Quindi ϕ_k è un sistema ortogonale anche nella norma H^1_0.

Questa uguaglianza ci permette di analizzare meglio la disuguaglianza di Poincaré. Infatti, data $u \in H^1_0(\Omega)$

$$u = \sum_k \hat{u}_k\phi_k \quad \text{da cui } \|u\|_2 = \sum_k |\hat{u}_k|^2.$$

Inoltre

$$\|u\|^2_{H^1_0} = (\nabla u, \nabla u) = \sum_k \frac{1}{\mu_k}|\hat{u}_k|^2$$

Dunque la migliore costante γ per la disuguaglianza di Poincaré deve soddisfare

$$\sum_k |\hat{u}_k|^2 \leq \gamma^2 \sum_k \frac{1}{\mu_k}|\hat{u}_k|^2$$

Dunque $\gamma^2 = \sup_k \mu_k$, ma i μ_k sono decrescenti, quindi $\gamma^2 = \mu_0$. cioè γ è la radice del reciproco del più piccolo autovalore del laplaciano.
Lo stessa conclusione, naturalmente, vale per il caso delle condizioni di Neumann omogenee.

13 Lo spettro della trasformata di Fourier

In questo paragrafo determino lo spettro della trasformata di Fourier. Non è un argomento importante in sé, ma per un motivo che spiegheró questo spettro è lo stesso dell'operatore illimitato

$$-\frac{1}{2}\triangle + \frac{1}{2}x^2$$

che è anche l'operatore hamiltoniano per un oscillatore armonico quantistico. Dunque il calcolo degli autovalori di $\mathcal{F}$ ci permetterà di determinare i livelli di energia di un oscillatore armonico quantistico. Lo farò con una tecnica algebrica tipica dei problemi di meccanica quantistica.

Esercizio 42. Idempotenza della trasformata di Fourier
La trasformata di Fourier $\mathcal{F}$ è un operatore unitario. Mostra che $\mathcal{F}^2 f(x) = f(-x)$, e dunque che $\mathcal{F}^4 = \mathbf{I}$.
Deduci da questo fatto che i soli autovalori possibili sono ± 1 e $\pm \mathrm{i}$.
Mostra che se $\mathcal{F}f = \pm 1 f$ allora f è pari, se $\mathcal{F}f = \pm \mathrm{i} f$ allora f è dispari.

D'ora in poi, per evitare confusioni, racchiudo in partentesi quadre l'argomento della trasformata. Ricordo che la trasformata di Fourier trasforma derivate in moltiplicazioni e viceversa:

$$\mathcal{F}[\partial_x f](\lambda) = \mathrm{i}\lambda \mathcal{F}[f](\lambda)$$
$$\mathcal{F}[xf](\lambda) = \mathrm{i}\,\partial_\lambda \mathcal{F}[f](\lambda)$$

Dunque

$$\mathcal{F}[(x + \partial_x)f](\lambda) = \mathrm{i}(\lambda + \partial_\lambda)\mathcal{F}[f](\lambda)$$
$$\mathcal{F}[(x - \partial)f](\lambda) = -\mathrm{i}(\lambda - \partial_\lambda)\mathcal{F}[f](\lambda)$$

Inoltre

$$\mathcal{F}[(x^2 - \partial_x^2)f](\lambda) = (\lambda^2 - \partial_\lambda^2)\mathcal{F}[f](\lambda)$$

Definisco

$$\hat{H}f = -\frac{1}{2}\,\partial_x^2 f + \frac{1}{2}x^2 f$$

e noto che è un operatore simmetrico. Il suo commutatore con $\mathcal{F}$ è nullo

$$[\mathcal{F}, \hat{H}] = \mathcal{F}\hat{H} - \hat{H}\mathcal{F} = 0$$

Come è noto dall'algebra lineare, se due operatori simmetrici commutato, hanno gli stessi autospazi. Dunque per trovare le autofunzioni di $\mathcal{F}$ può essere utile cercare le autofunzioni di $\hat{H}$. Definisco altri due operatori che ci saranno utili.

$$af = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \partial_x)f \quad \text{e } a^\dagger f = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + \partial_x)f$$

Noto che, formalmente, $a^\dagger f$ è l'aggiunto di a. Chiameremo a operatore di **creazione** e $a^\dagger$ operatore di distruzione.
Valgono le seguenti semplici identità (verificarle per esercizio)

- $a^\dagger a f = \hat{H}f + f/2$
- $a a^\dagger f = \hat{H}f - f/2$

- $[a^\dagger, a] = \mathbf{I}/2$

Dalla seconda relazione, si ottiene che $\hat{H}f = \lambda f$ se e solo se $aa^\dagger f = (\lambda - 1/2)f$. Osserviamo che $a^\dagger$ ha un nucleo non banale di facile determinazione. Infatti

$$a^\dagger f = 0 \iff f' = -fx \iff \partial_x \ln f = -x$$

e dunque, integrando e esponenziando, si ottiene che

$$\phi_0(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$$

è nel kernel di $a^\dagger$, dunque

$$\hat{H}\phi_0 = \frac{1}{2}\phi_0$$

Osserviamo anche che, sempre dalla seconda relazione

$$(f, \hat{H}f) = (f, aa^\dagger f) + (f, f)/2 = (a^\dagger f, a^\dagger f) + (f, f)/2$$

Dunque $(f, \hat{H}f) \geq \frac{1}{2}(f, f)$, e quindi $1/2$ è il minimo autovalore, che è raggiunto proprio in ϕ_0 che è nel $\ker a^\dagger$

Calcolo ora i commutatori di $\hat{H}$ con a e $a^\dagger$:

$$[\hat{H}, a] = \hat{H}a - a\hat{H} = (aa^\dagger + 1/2)a - a(a^\dagger a - 1/2) = a$$

$$[\hat{H}, a^\dagger] = \hat{H}a^\dagger - a^\dagger \hat{H} = (a^\dagger a - 1/2)a^\dagger - a^\dagger(aa^\dagger + 1/2) = -a^\dagger$$

Dunque se $\hat{H}f = \lambda f$ si ha

$$\hat{H}af = [\hat{H}, a]f + a\hat{H}f = af + \lambda af = (\lambda + 1)af$$

e

$$\hat{H}a^\dagger f = [\hat{H}, a^\dagger]f + a^\dagger \hat{H}f = -a^\dagger f + \lambda a^\dagger f = (\lambda - 1)a^\dagger f$$

Quindi, l'operatore di creazione porta un autofunzione di autovalore λ in una autofunzione di autovalore $\lambda + 1$. Al contrario, l'operatore di distruzione abbassa di uno l'autovalore. Sia allora

$$\phi_k = a^k \phi_0$$

Questa funzione, se non è nulla, è autofunzione di autovalore $k + 1/2$. Vediamo come è fatta. È evidente che è del tipo $P_k(x)\mathrm{e}^{-x^2/2}$, dove $P_k(x)$ è un polinomio in x. È facile notare che se $Q(x)$ è polinomio di grado n, allora $a(Q(x)\mathrm{e}^{-x^2/2})$ è un polinomi di grado $n+1$. Dunque P_k è un polinomio non nullo di grado k. Poichè $\hat{H}$ è simmetrico, ϕ_k è ortogonale a ϕ_h se $k \neq h$, cioè

$$\int P_k(x)P_h(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 0$$

Ma da questa relazione segue che P_k sono, a meno di costanti moltiplicative, i polinomi di Hermite h_k.

Poiché $h_k\mathrm{e}^{-x^2/2}$ è un sistema ortogonale completo in $L^2(\mathbb{R})$, l'operatore H non ha altre autofunzioni. Restano da determinare gli autospazi di $\mathcal{F}$. Notando che $\mathcal{F}\phi_0 = \phi_0$, e che

$$\mathcal{F}a = -\mathrm{i}a\mathcal{F}$$

si ottiene che ϕ_k è autofunzione per $\mathcal{F}$, e l'autovalore è $(-\mathrm{i})^k$.

In questo esempio ho indentificato subito le autofunzioni con i polinomi di Hermite, e questo permette di ottenere che non esistono altri autovalori. È possibile ottenere questo risultato senza usare la completezza dei polinomi di Hermite, ma usando solo le relazioni algebriche verificate dagli operatori di creazione e distruzione. Per approfondimenti si veda il testo di Teta [T], capitolo 7.

Abbiamo ottenuto che lo spettro di $\hat{H}$ è solo puntuale e gli autovalori divergono, esattamente come il caso degli autovalori del laplaciano in un dominio limitato con opportune condizioni al contorno. In quel caso, questo risultato si otteneva invertendo il laplaciano e dimostrando la compattezza dell'inverso. Anche in questo caso è così. Lo mostro con un esercizio che permetterà di capire il ruolo della trasformata di Fourier.

Esercizio 43. Inverso di $\hat{H}$

Sia $H_o = \{f \in L^2 : \| \partial_x f\|^2, \|xf\|^2 < +\infty\}$ Per le relazioni mostrate prima,

$$\| \partial_x f\|^2 = \|\lambda \hat{f}\|^2$$

e viceversa, dunque posso dotare H_o del prodotto scalare

$$(f,g)_o = \int x^2 \bar{f} g + \int \lambda^2 \bar{\hat{f}} \hat{g}$$

Equivalente a

$$(f,g)_o = (f', g')_{L^2} + (\partial_\lambda \hat{f}, \partial_\lambda g)_{L^2}$$

Si tratta quindi di uno spazio di Sobolev.
Si mostri la "disuguaglianza di Poincaré"

$$\|f\|^2 \leq c\|f\|_o$$

Suggerimento:

$$\int |f|^2 \leq \|f\|_\infty \|f\|_1$$

e

$$\|f\|_1 = \int |f| \frac{\sqrt{\gamma^2 + x^2}}{\sqrt{\gamma^2 + x^2}} \leq c/\sqrt{\gamma}(\gamma\|f\| + \|xf\|)$$

e

$$\|f\|_\infty \leq x\|\hat{f}\|_1 \leq c/\sqrt{\gamma}(\gamma\|f\| + \|\lambda \hat{f}\|)$$

Mettendo insieme le due stime si ottiene

$$\|f\|^2 \leq \frac{c}{\gamma}(\gamma^2\|f\|^2 + \|f\|_o^2)$$

e per γ abbastanza piccolo si ottiene la tesi.

Data $f \in L^2$, si mostri che esiste $Tf = u \in H_o$ tale che, per ogni $h \in H_o$, sia ha

$$(h,u)_o = (h,f)$$

(si usi il teorema di Riesz e la disuguaglianza di Poincaré).

Si riconosca che si tratta dell'equazione

$$-\partial_x^2 u + x^2 u = f$$

in forma debole. Si mostri che l'operatore che associa u a f, pensato a valori in L^2, è autoaggiunto. Si mostri che H_o si immerge compatto in L^2.

Si noti infine che il prodotto in H_o è invariante per trasformata di Fourier. Dunque questa invarianza si deve estendere all'operatore T.

14 Il problema di Laplace

Ci sono vari metodi per trovare una funzione armonica in un dominio, con condizioni di Dirichlet o Neumann al bordo. Si può usare il teorema di Lax-Milgram, introducendo lo spazio $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ delle tracce delle funzioni $H^1(\Omega)$, per domini con bordi lipschitziani (vedi per esempio il Salsa); oppure si può invocare il metodo di Perron, che costruisce elegantemente la soluzione mediante funzioni sub e super armoniche (sul Salsa non trovate questo risultato ma l'analogo per il caso discreto, molto semplice e istruttivo).
In questo capitolo invece utilizzerò il metodo dei potenziali di singolo e doppio strato, di maggior interesse fisico-matematico, che permette di trasformare il problema di Laplace in un'equazione integrale per un operatore compatto, la cui soluzione sarà determinata mediante i teoremi dell'alternativa.
In ogni caso tutti questi approcci sono piuttosto sottili, perché devono comunque affrontare il problema della regolarità al bordo (le risposte più complete sono date dal metodo di Perron).

14.1 Funzione di Green, dipoli, andamento asintotico

Ricordo che la funzione di Green per il problema di Poisson in $\mathbb{R}^n$ è data da

$$G_n(\mathbf{x}) = \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x}| & n = 2 \\ \frac{1}{(n-2)\,|\,\partial S^n|} \frac{1}{|\mathbf{x}|^{n-2}} & n \geq 3 \end{array} \right\}$$

dove $|\,\partial S_n|$ è la misura del bordo della sfera unitaria in $\mathbb{R}^n$. In particolare $G_3 = 1/(4\pi|\mathbf{x}|)$.
La funzione di Green verifica, nel senso delle distribuzioni,

$$\triangle G = -\delta$$

cioè G è il potenziale generato da una carica puntiforme nell'origine.
Assegnata una distribuzione di carica f, il potenziale generato (che d'ora in poi chiamerò **potenziale di volume**) è

$$V[f](\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} G_n(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y})\, \mathrm{d}\mathbf{y}$$

Poiché la singolarità è sommabile, questa funzione è ben definita, limitata e continua in $\mathbf{x}$ se f è limitata e sommabile (vedi il teorema 14.11).
Riassumo gli andamenti in $|\mathbf{x}|$ di G_n e delle sue derivate

La funzione	va come	
$G_2(\mathbf{x})$	$\ln|\mathbf{x}|$	sommabile intorno a 0, divergente a infinito
$G_n(\mathbf{x})$, $n > 2$	$1/|\mathbf{x}|^{n-2}$	sommabile intorno a 0
$\nabla G_n(\mathbf{x})$	$1/|\mathbf{x}|^{n-1}$	sommabile intorno a 0
$\partial^2 G_n(\mathbf{x})$	$1/|\mathbf{x}|^n$	non sommabile intorno a 0

In questo paragrafo determineremo l'andamento asintotico per $\mathbf{x}$ divergente della funzione di Green, sia perché è una questione interessante in sé, sia perché sarà utile per discutere alcune importanti questioni di unicità. Per questo scopo è però importante descrive il potenziale generato da un **dipolo**.
Fisicamente, un dipolo è una coppia di cariche di segno opposto, vicine. Sia $\mathbf{n}$ un versore, sia $\varepsilon > 0$ una lunghezza, e consideriamo la seguente distribuzione formata da due cariche opposte a distanza ε lungo $\mathbf{n}$ (la carica positiva è in $\varepsilon\mathbf{n}/2$, quella negativa nel punto opposto)

$$\mu_\varepsilon = \delta(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{n}/2) - \delta(\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{n}/2)$$

Nel limite $\varepsilon \to 0$, va a zero nel senso delle distribuzioni. Se invece dividiamo per la distanza e passiamo al limite, nel senso delle distribuzioni si ottiene

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\mu_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(\delta(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{n}/2) - \delta(\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{n}/2)\right) = -\mathbf{n} \cdot \nabla\delta$$

che è l'espressione matematica del dipolo. In questo contesto, $\mathbf{n}$ è il **momento di dipolo**. Il potenziale generato da $\mu_\varepsilon/\varepsilon$ è

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(G(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{n}/2) - G(\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{n}/2)\right)$$

che tende a

$$-\mathbf{n} \cdot \nabla G(\mathbf{x})$$

che dunque è il potenziale generato dal dipolo di momento di dipolo $\mathbf{n}$. In generale, il momento di dipolo di due cariche di segno opposte C, poste in $\mathbf{b}^+$ e $\mathbf{b}^-$ è il vettore

$$\mathbf{d} = C(\mathbf{b}^+ - \mathbf{b}^-)$$

(nel caso precedente si ottiene esattamente $\mathbf{n}$). Per una distribuzione non atomica $f(\mathbf{x})$, complessivamente neutra, cioè tale che

$$\int f = 0$$

il momento di dipolo è dato da

$$\mathbf{d} = \int \mathbf{x} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Infatti, siano f^+ e f^- le distribuzioni della carica positiva e di quella negativa, cioè

$$f^+ = \max(f, 0) \quad f^- = \max(-f, 0)$$

e quindi $f = f^+ - f^-$. Sia $C = \int f^+ = \int f^-$. Si ha

$$\int \mathbf{x} f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = C\left(\frac{1}{C}\int \mathbf{x} f^+(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} - \frac{1}{C}\int \mathbf{x} f^-(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right) = C(\mathbf{b}^+ - \mathbf{b}^-)$$

dove

$$\mathbf{b}^\pm = \frac{1}{C}\int \mathbf{x} f^\pm(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

sono i baricentri della parte positiva e negativa.

Teorema 14.1. *Andamento asintotico del potenziale*
Sia f limitata e a supporto compatto. Per $|\mathbf{x}| \to +\infty$:

$$V(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} - \nabla G(\mathbf{x}) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{y} f(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} + O(|\mathbf{x}|^{-n})$$

Dunque al primo ordine significativo il potenziale è pari a quello generato da tutta la carica concentrata nell'origine e il termine successivo è un dipolo. Se la carica totale è nulla il primo termine significativo è quello di dipolo.

Dimostrazione. La dimostrazione è semplice, la faccio nel caso tridimensionale, e si ottiene mediante uno sviluppo con Taylor. Sia $|\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|$; allora

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) &= \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} = \frac{1}{|\mathbf{x}|}\frac{1}{|\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{y}/|\mathbf{x}||} \\ &= \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\frac{1}{\sqrt{1-2\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{y}/|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|^2/|\mathbf{x}|^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\left(1+\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{y}\frac{1}{|\mathbf{x}|}+O\left(\frac{|\mathbf{y}|^2}{|\mathbf{x}|^2}\right)\right) \\ &= G(\mathbf{x})-\nabla G(\mathbf{x})\cdot\mathbf{y}+O\left(\frac{|\mathbf{y}|^2}{|\mathbf{x}|^3}\right) \end{aligned}$$

Poichè f è a supporto compatto, per $|\mathbf{x}|$ abbastanza grande questo sviluppo è verificato per ogni $\mathbf{y}$ nel supporto di f. Inserendolo nell'espressione di V si ottiene la tesi. □

Esercizio 44. Andamento asintotico nel caso di momento secondo finito

Dimostrare la validità dell'andamento asintotico anche se f non ha supporto compatto, ma nell'ipotesi che il momento secondo di f sia limitato, cioè che

$$\int_{\mathbb{R}}^{3} |\mathbf{y}|^2|f(\mathbf{y})|\,\mathrm{d}\mathbf{y} < +\infty$$

Esercizio 45. Multipoli

Nell'integrale che definisce il potenziale di volume compare $\frac{1}{\rho}G\left(\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{y}/\rho\right)$ dove $\rho = |\mathbf{x}|$. Lo sviluppo a ordine n dà il termine di multipolo di ordine n del potenziale:

$$(-1)^n\frac{1}{\rho^{n+1}}\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=n}\frac{n!}{\boldsymbol{\alpha}!}\frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}G}{\partial\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}}(\hat{\mathbf{x}})\int_{\mathbb{R}}\mathbf{y}^{\boldsymbol{\alpha}}f(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}$$

dove $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n$, e

$$\begin{aligned} l|\boldsymbol{\alpha}| &= \alpha_1+\cdots+\alpha_n \\ \boldsymbol{\alpha}! &= \alpha_1!\cdots\alpha_n! \\ \mathbf{y}^{\boldsymbol{\alpha}} &= y_1^{\alpha_1}\cdots y_n^{\alpha_n} \\ \partial\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} &= \partial x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n} \end{aligned}$$

Si noti che si tratta di una funzione armonica in $\mathbf{x}$ di grado $-(n+1)$. Si dimostri che per $\rho = 1$ si ottengono armoniche sferiche di autovalore $-n(n+1)$.

14.2 I potenziali di singolo e doppio strato

In questo paragrafo rivisito la II e la III identità di Green, introducendo i potenziali di singolo e doppio strato. In quello che segue assumerò, per semplicità, che Ω sia un dominio limitato con bordo regolare quanto serve.

Teorema 14.2. *II identità di Green*
Siano u e v due funzioni $C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$. Allora

$$\int_{\Omega}(u\triangle v - v\triangle u) = \int_{\partial\Omega}(u\,\partial_n v - v\,\partial_n u)$$

Questa identità vale anche se u, v sono solo $C^1(\Omega)$ ma esistono i limiti da dentro di u, v e delle derivate normali.

Dimostrazione. La dimostrazione è una conseguenza del teorema della divergenza, infatti

$$u\triangle v = \mathrm{div}\,(\mathrm{u}\nabla\mathrm{v}) - \nabla\mathrm{u}\cdot\nabla\mathrm{v}$$
$$v\triangle u = \mathrm{div}\,(\mathrm{v}\nabla\mathrm{u}) - \nabla\mathrm{u}\cdot\nabla\mathrm{v}$$

dunque

$$u\triangle v - v\triangle u = \mathrm{div}\,(\mathrm{u}\nabla\mathrm{v}) - \mathrm{div}\,(\mathrm{v}\nabla\mathrm{u})$$

Integrando in Ω e usando il teorema della divergenza si ottiene la tesi. Nel caso u, v e le loro derivate prime e seconde esistano limitate (o eventualmente divergenti ma in modo sommabile) solo all'interno di Ω, si consideri Ω_ε ottenuto allargando di ε il complementare di Ω:

$$\Omega_\varepsilon = \{\mathbf{x} :\ d(x, \Omega^c) < \varepsilon\}$$

Usando il teorema appena dimostrato nel caso di Ω_ε, e passando al limite, si ottiene

$$\int_\Omega (u\triangle v - v\triangle u) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\Omega_\varepsilon}(u\,\partial_n v - v\,\partial_n u)$$

Se u, v e le loro derivate normali hanno limiti regolari da dentro, si ottiene l'integrale al bordo dei loro limiti. □

La III identità di Green si ottiene considerando $u(\mathbf{y})$ e la funzione di Green $G(\mathbf{x}-\mathbf{y})$, e mette in relazione u, con il potenziale generato da $\triangle u$ e due funzioni di bordo. Prima di mostrare come si ricava, introduco qualche notazione. Sia $x \notin \partial\Omega$. Se scelgo $v(\mathbf{y}) = G(\mathbf{x}-\mathbf{y})$, nel membro di destra ottengo

$$D_{\partial\Omega}[u] - S_{\partial\Omega}[\partial_n u]$$

dove

$$S_{\partial\Omega}[\alpha] = \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}-\mathbf{y})\alpha(\mathbf{y})\sigma(\mathrm{d}\mathbf{y})$$

è detto **potenziale di singolo strato** generato da α, e

$$D_{\partial\Omega}[\alpha] = \int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} G(\mathbf{x}-\mathbf{y})\alpha(\mathbf{y})\sigma(\mathrm{d}\mathbf{y})$$

è detto **potenziale di doppio strato** generato da α. Il motivo di questi nomi è che $S_{\partial\Omega}$ è il potenziale generato dalla distribuzione di carica α sulla superficie $\partial\Omega$, mentre $D_{\partial\Omega}$ è il potenziale generato dalla distribuzione di dipolo $\mathbf{n}\alpha$ sulla superficie. Poiché il dipolo si ottiene da due cariche uguali e opposte vicine, il potenziale di dipolo è quello generato da due distribuzioni opposte su due "strati" vicini alla superficie.

Proposizione 14.1. *Continuità del potenziale di singolo strato*
Il nucleo $G(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ è sommabile in $\mathbf{y} \in \partial\Omega$ per ogni $\mathbf{x}$; se $\alpha \in C(\partial\Omega)$ il potenziale di singolo strato $S_{\partial\Omega}[\alpha](\mathbf{x})$ è continuo in $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
Al variare di $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, risulta definito l'operatore

$$S^0\alpha(\mathbf{x}) = S_{\partial\Omega}[\alpha](\mathbf{x})$$

che è compatto e autoaggiunto in $\mathcal{L}(L^2(\partial\Omega))$.

Dimostrazione. In dimensione 3, $G(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ ha singolarità $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-1}$ che è sommabile in dimensione 2. Seguirò uno schema di dimostrazione che mi sarà utile anche nel seguito.
Premetto un'osservazione su $\partial\Omega$. Sia C_δ il cilindro $C_\delta = B_\delta \times [-\delta, \delta]$, dove $B_\delta \subset \mathbb{R}^2$ centrata nell'origine e di raggio δ. Assumendo $\partial\Omega$ regolare, per ogni $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ esiste la normale esterna, dunque su può scegliere un sistema di coordinate ortogonali con origine in $\mathbf{x}$ e l'asse verticale orientato come la normale esterna, e per δ sufficientemente piccolo, esiste un intorno cilindrico $C_\delta(\mathbf{x})$ di $\mathbf{x}$ tale che $\partial\Omega \cap C_\delta(\mathbf{x})$ è grafico di una funzione regolare, cioè esiste una funzione Φ da B_δ in $\mathbb{R}^2$ a valori in $\mathbb{R}$ tale che

$$
\begin{aligned}
l\, \partial\Omega \cap C_\delta(\mathbf{x}) &= \{(\mathbf{w}, \Phi(\mathbf{w})) : |\mathbf{w}| < \delta\} \\
\Omega \cap C_\delta(\mathbf{x}) &= \{(\mathbf{w}, z) : |\mathbf{w}| < \delta,\ z < \Phi(\mathbf{w})\}
\end{aligned}
$$

Per compattezza di $\partial\Omega$, esiste un δ positivo per cui questa proprietà è verificata per tutti i punti del bordo.
Ricordo che $S[\alpha]$ è una funzione armonica fuori da $\partial\Omega$ (il nucleo $G(\mathbf{x})$ è armonico lontano dall'origine). Dunque l'unica cosa da verificare è la continuità al bordo. Sia dunque $\mathbf{x}$ distante meno di $\delta/2$ da $\partial\Omega$, e sia $\mathbf{x}_0$ la sua proiezione su $\partial\Omega$, cioè il punto di $\partial\Omega$ che realizza la minima distanza. Definisco

$$
\begin{aligned}
l S_\delta[\alpha](\mathbf{x}) &= \int_{\partial\Omega \cap C_\delta(\mathbf{x}_0)} G(\mathbf{x}-\mathbf{y})\alpha(\mathbf{y})\sigma(\mathrm{d}\mathbf{y}) \\
S_\delta^c[\alpha](\mathbf{x}) &= \int_{\partial\Omega \setminus C_\delta(\mathbf{x}_0)} G(\mathbf{x}-\mathbf{y})\alpha(\mathbf{y})\sigma(\mathrm{d}\mathbf{y})
\end{aligned}
$$

così che $S = S_\delta + S_\delta^c$ (ricordo che $\mathbf{x}_0$ è una funzione di $\mathbf{x}$). Osservo che il nucleo integrale di S_δ^c è

$$
\mathcal{X}\{\mathbf{y} \in C_\delta(\mathbf{x}_0)\} G(\mathbf{x}-\mathbf{y})
$$

uniformemente limitato da c/δ, dunque

$$
|S_\delta^c[\alpha](\mathbf{x})| \le \frac{c}{\delta^2}\|\alpha\|
$$

Inoltre è continua in $\mathbf{x}$ (si usi la convergenza dominata, come per la dimostrazione del teorema 14.11).
Studio ora S_δ, usando il sistema di coordinate locali dato da Φ. Per definizione di $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + z\mathbf{n}$, dove $\mathbf{n}$ è la normale in $\mathbf{x}_0$ e $z \in (-\delta/2, \delta/2)$.
Per usare le coordinate locali date da $\mathbf{w}$, è necessario calcolare $\mathrm{d}\sigma(\mathrm{d}\mathbf{y})$. A questo scopo. derivando Φ si ottengono i vettori tangenti alla superficie

$$
\partial_{w_1}\begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \Phi(\mathbf{w}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_1\Phi \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \partial_{w_1}\begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \Phi(\mathbf{w}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_2\Phi \end{pmatrix}
$$

Dunque la normale esterna in $\mathbf{y} = (\mathbf{w}, \Phi(\mathbf{w}))$ è

$$
\mathbf{n}_y = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\Phi|^2}}\begin{pmatrix} -\partial_1\Phi \\ -\partial_2\Phi \\ 1 \end{pmatrix}
$$

e l'elemento di misura della superficie è

$$
\sigma(\mathrm{d}y) = \sqrt{1+|\nabla\Phi|^2}\,\mathrm{d}\mathbf{w}
$$

Dunque

$$S_\delta[\alpha](\mathbf{x}) = \int_{|\mathbf{w}|<\delta} \sqrt{1+|\nabla\Phi(\mathbf{w})|^2}\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{w}|^2+(z-\Phi(\mathbf{w}))^2}}\alpha(\mathbf{y}(\mathbf{w}))\,\mathrm{d}\mathbf{w}$$

dove $\mathbf{y}(\mathbf{w})$ è il punto su $\partial\Omega$ di coordinate locali $(\mathbf{w},\Phi(\mathbf{w})$ intorno a $\mathbf{x}_0$. Si osservi che nell'espressione di S_δ le funzioni $\mathbf{y}(\mathbf{w})$ e $\Phi(\mathbf{w})$, dipendono da $\mathbf{x}$, ma per semplicità di notazione questa dipendenza non è indicata.
È semplice questo punto stimare S_δ, notando che, per costruzione, Φ vale 0 in $\mathbf{0}$ e $\nabla\Phi(\mathbf{0})=\mathbf{0}$, perché la normale al grafico di Φ deve essere l'asse verticale. Dunque, sviluppando con Taylor e usando che δ è piccolo,

$$|\Phi(\mathbf{w})| \le c|\mathbf{w}|^2, \quad \text{e} \quad |\nabla\Phi(\mathbf{w})| \le c|\mathbf{w}|$$

Posso scegliere le costanti uniformemente in $\mathbf{x}$, usando la compattezza di $\partial\Omega$. Dunque, scrivendo $\rho||\mathbf{w}|$ e stimando il denominatore con

$$\sqrt{|\mathbf{w}|^2+(z-\Phi(\mathbf{w}))^2} \ge |\mathbf{w}| = \rho$$

si ha

$$|S_\delta[\alpha](\mathbf{x})| \le c\|\alpha\|_\infty \int_0^\delta \mathrm{d}\rho\,\rho\sqrt{1+c\rho^4}\,\frac{1}{\rho} \le c\|\alpha\|_\infty\delta \tag{14.1}$$

Poiché

$$|S[\alpha](\mathbf{x}) - S^c_\delta[\alpha](\mathbf{x})| \le c\delta\|\alpha\|_\infty$$

ne segue che $S[\alpha](\mathbf{x})$ è limite uniforme di funzioni continue, dunque è continua.

Studio in particolare l'operatore S^0. Per simmetria di $G(\mathbf{x}-\mathbf{y})$, è evidentemente autoaggiunto. La compattezza segue perché la singolarità del nucleo ha ordine inferiore alla dimensione dello spazio su cui si integra (vedi esempio 10.5). Purtroppo c'è qualche dettaglio da sistemare, dovuto al fatto che il bordo non è rettilineo, ma la sostanza della prova è la stessa. L'operatore S^c_δ è compatto perché ha nucleo limitato. Mostro che S^0_δ è piccolo in norma L^2, dunque passando al limite si ottiene che S^0 è compatto.
Come abbiamo visto nell'esempio 6.8, il quadrato della norma L^2 dell'operatore S_δ è stimato dal prodotto di

$$\sup_{\mathbf{x}\in\partial\Omega}\int_{\partial\Omega}|G(\mathbf{x}-\mathbf{y})|\,\mathcal{X}\{\mathbf{y}\in C_\delta(\mathbf{x})\}\sigma(\mathrm{d}\mathbf{y}) \quad \text{e} \quad \sup_{\mathbf{y}\in\partial\Omega}\int_{\partial\Omega}|G(\mathbf{x}-\mathbf{y})|\,\mathcal{X}\{\mathbf{y}\in C_\delta(\mathbf{x})\}\sigma(\mathrm{d}\mathbf{x})$$

Si noti che, per un $\delta' = \delta+$ correzioni di ordine δ^2, sicuramente

$$\mathcal{X}\{\mathbf{y}\in C_\delta(\mathbf{x})\} \le \mathcal{X}\{\mathbf{x}\in C'_\delta(\mathbf{y})\}$$

Dunque è sufficiente stimare il primo dei due integrali, perché il secondo da un termine dello stesso ordine. Abbiamo già fatto questa stima per ottenere la (14.1). Dunque possiamo concludere la prova perché

$$\|S^0_\delta\| \le c\delta$$

□

Osservazione

Questa dimostrazione e le seguenti non funzionano nel caso in cui $\partial\Omega$ abbia punti di non regolarità. Infatti per ogni $\mathbf{x}$ abbiamo scelto un differente intorno C_δ, che esiste se esiste la normale. In caso di $\partial\Omega$ con punti di non regolarità è necessario usare coordinate locali costruite intorno ai punti di regolarità, e quindi controllare integrali in coordinate locali in cui $\mathbf{x}$ non è fisso. Naturalmente i risultati continuano a valere ma richiedo maggiore cura nei dettagli.

Studiamo ora il più delicato potenziale di doppio strato. Premetto una definizione, dando un nome particolare al potenziale di doppio strato calcolato sui punti di $\partial\Omega$.
Se $\mathbf{x} \in \partial\Omega$,

$$K\alpha(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} G(\mathbf{x}-\mathbf{y})\alpha(\mathbf{y})\sigma(\mathrm{d}\mathbf{y})$$

Teorema 14.3. *Proprietà di K*
K è un operatore integrale di nucleo

$$\partial_{n_y} G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathbf{n}_y \cdot \nabla_y (G(\mathbf{x}-\mathbf{y})) = -\mathbf{n}_y \cdot \nabla G(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

Il suo aggiunto K^* ha nucleo

$$\partial_{n_x} G(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

L'operatore K è compatto in $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$, ed è limitato come operatore da $L^\infty(\Omega)$ in sé.

Dimostrazione. Il nucleo di K è

$$\partial_{n_y} G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathbf{n}_y \cdot \nabla_y (G(\mathbf{x}-\mathbf{y})) = -\mathbf{n}_y \cdot \nabla G(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

Il nucleo dell'aggiunto si ottiene scambiando $\mathbf{x}$ con $\mathbf{y}$, e dunque, ricordando che ∇G è dispari, è dato da

$$-\mathbf{n}_x \cdot \nabla G(\mathbf{y}-\mathbf{x}) = \mathbf{n}_x \cdot \nabla G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \partial_{n_x} G(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

Dimostro la compattezza. Dato $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, sia C_δ l'intorno cilindrico che lo contiene. Decompongo

$$K = K_\delta + K_\delta^c$$

dove

$$K_\delta\alpha(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega\cap C_\delta} \partial_{n_y} G(\mathbf{x}-\mathbf{y})\alpha(\mathbf{y})\sigma(\mathrm{d}\mathbf{y})$$
$$K_\delta^c\alpha(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega\setminus C_\delta} \partial_{n_y} G(\mathbf{x}-\mathbf{y})\alpha(\mathbf{y})\sigma(\mathrm{d}\mathbf{y})$$

L'operatore K_δ^c ha nucleo limitato da c/δ^2 dunque è compatto. Mostro che l'operatore K_δ ha norma che va a 0 in δ. Come abbiamo visto nell'esempio 6.8, la sua norma quadro è stimata dal prodotto delle costanti

$$\sup_{\mathbf{x}\in\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} |\,\partial_{n_y} G(\mathbf{x}-\mathbf{y})|\,\mathcal{X}\{\mathbf{y} \in C_\delta(\mathbf{x})\}\sigma(\mathrm{d}\mathbf{y}), \quad \text{e} \quad \sup_{\mathbf{y}\in\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} |\,\partial_{n_y} G(\mathbf{x}-\mathbf{y})|\,\mathcal{X}\{\mathbf{y} \in C_\delta(\mathbf{x})\}\sigma(\mathrm{d}\mathbf{x})$$

Come abbiamo già notato, per un $\delta' = \delta +$ correzioni di ordine δ^2, sicuramente

$$\mathcal{X}\{\mathbf{y} \in C_\delta(\mathbf{x})\} \leq \mathcal{X}\{\mathbf{x} \in C'_\delta(\mathbf{y})\}$$

Dunque, scambiando i nomi di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, la seconda costante è stimata da

$$\sup_{\mathbf{x}\in\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} |\,\partial_{n_x} G(\mathbf{x}-\mathbf{y})|\,\mathcal{X}\{\mathbf{y}\in C'_\delta(\mathbf{x})\}\sigma(\mathrm{d}\mathbf{y})$$

L'unica differenza con la prima, a parte δ' invece di δ, è la normale in $\mathbf{x}$ al posto di quella in $\mathbf{y}$. In coordinate locali

$$\sigma(\mathrm{d}y)\,\mathbf{n}_y\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \sqrt{1+|\nabla\Phi|^2}\,\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\Phi|^2}}\begin{pmatrix}-\,\partial_1\Phi\\-\,\partial_2\Phi\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-w_1\\-w_2\\-\Phi\end{pmatrix}\mathrm{d}\mathbf{w} = -\Phi(\mathbf{w})+\mathbf{w}\cdot\nabla\Phi(\mathbf{w})$$

mentre $\mathbf{n}_x = (0,0,1)$. Dunque la prima costante è stimata da

$$\int_{|\mathbf{w}|<\delta}\frac{|-\Phi(\mathbf{w})+\mathbf{w}\cdot\nabla\Phi(\mathbf{w})|}{(|\mathbf{w}|^2+|\Phi(\mathbf{w})|^2)^{3/2}}$$

Stimando Φ e il suo gradiente come abbiamo fatto per la dimostrazione del teorema 14.1, e stimando il denominatore con $|\mathbf{w}|^3$, si ottiene

$$c\int_{|\mathbf{w}|<\delta}\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} = c\int_0^\delta \mathrm{d}\rho = c\delta$$

La stima dell'altro termine è identica, l'unica differenza è la permanenza di $\sqrt{1+|\nabla\Phi|^2}$ che è stimato da una costate.
Infine K è limito in L^∞, perché

$$|K^c_\delta(\mathbf{x})| \le c\|\alpha\|_\infty/\delta^2$$
$$|K_\delta\alpha(\mathbf{x})| \le c\|\alpha\|_\infty\delta$$

La prima disuguaglianza segue dalla limitatezza del nucleo, la seconda è vera perché

$$|K_\delta\alpha(\mathbf{x})| \le c\|\alpha\|_\infty\int_{|\mathbf{w}|<\delta}\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} = c\delta\|\alpha\|_\infty$$

□

Passo ora a dimostrare una importante proprietà di sommabilità per il nucleo del potenziale di doppio strato, anche nel caso in cui $\mathbf{x}\notin\partial\Omega$.

Proposizione 14.2. *Sommabilità locale del nucleo del potenziale di doppio strato*
Sia $\mathbf{x}$ a a distanza inferiore a $\delta/2$ da $\partial\Omega$, e sia $\mathbf{x}_0\in\partial\Omega$ il punto di minima distanza. Allora

$$\int_{\partial\Omega\cap C_\delta(\mathbf{x}_0)} |\,\partial_{n_y}G(\mathbf{x}-\mathbf{y})|\sigma(\mathrm{d}y) \le c_\delta$$

uniformemente in $\mathbf{x}$.

Si noti che nulla stiamo affermando sulla continuità in $\mathbf{x}_0$.

Dimostrazione. Ricordando che $\nabla G(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$, e che $\mathbf{x}$ in coordinate locali intorno a $\mathbf{x}_0$ si esprime come $(\mathbf{0}, z)$, si ha

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega\cap C_\delta} |\,\partial_{n_y} G(\mathbf{x}-\mathbf{y})| &= c\int_{B_\delta} \frac{|(z-\Phi(\mathbf{w}))+\mathbf{w}\cdot\nabla\Phi(\mathbf{w})|}{(|\mathbf{w}|^2+|z-\Phi(\mathbf{w})|^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}w \leq \\ &= c\int_{B_\delta} \frac{|z|}{(|\mathbf{w}|^2+|z-\Phi(\mathbf{w})|^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}w + \int_{B_\delta} \frac{|-\Phi(\mathbf{w})+\mathbf{w}\cdot\nabla\Phi(\mathbf{w})|}{(|\mathbf{w}|^2+|z-\Phi(\mathbf{w})|^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}\mathbf{z}\end{aligned}$$

Stimando come sempre

$$|\Phi(\mathbf{w})| \leq c|\mathbf{w}|^2 \quad \text{e} \quad |\nabla\Phi(\mathbf{w})| \leq c|\mathbf{w}|$$

e eliminando al denominatore il termine $|z-\Phi|$:

$$\frac{|-\Phi(\mathbf{w})+\mathbf{w}\cdot\nabla\Phi(\mathbf{w})|}{(|\mathbf{w}|^2+|z-\Phi(\mathbf{w})|^2)^{3/2}} \leq c\frac{|\mathbf{w}|^2}{|\mathbf{w}|^3} = c\frac{1}{|\mathbf{w}|}$$

che è sommabile.
L'altro termine è un po' più delicato. Distinguo due casi:

$|z| \leq 2|\Phi(\mathbf{w})|$: in questo caso procedo esattamente come prima

$|z| \geq 2|\Phi(\mathbf{w})|$: in questo caso

$$|z-\Phi(\mathbf{w})| \geq |z| - |\Phi(\mathbf{w})| \geq |z| - |z|/2 = |z|/2$$

Dunque il termine è stimato da

$$\int_{B_\delta} \frac{|z|}{(|\mathbf{w}|^2+z^2/4)^{3/2}}\,\mathrm{d}w = 2\pi|z|\int_0^\delta \frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{(\rho^2+z^2/4)^{3/2}} = \frac{2}{3}\pi|z|\left(\frac{2}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{\delta^2+z^2/4}}\right) \leq c$$

$\square$

Concludo con una osservazione sul termine in $|z|$ che è stimato, a meno di costanti, da

$$1 - \frac{|z|}{\sqrt{4\delta^2+z^2}}$$

Si noti che tende a zero in δ, a z fissato, ma tende a 1 in z a delta fissato. Dunque il nucleo del doppio strato non è sommabile uniformemente in $\mathbf{x} \notin \partial\Omega$ (come invece accade per il nucleo di singolo strato). Questo differenza è dovuta al fatto che il potenziale di doppio strato è discontinuo nell'attraversamento di $\partial\Omega$.

14.3 Discontinuità dei potenziali singolari

Torniamo ora alla III identità di Green. Definisco

$$V_\Omega[f] = \int_\Omega G(\mathbf{x}-\mathbf{y})f(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}$$

potenziale di volume generato da f ristretta a Ω. Come già discusso, si tratta di una funzione $C^1(\mathbb{R}^3)$ se f è limitata (vedi il teorema 14.12.

Sia $x \in \mathbb{R}$, e sia $\bar{B}_\varepsilon$ la palla chiusa di centro $\mathbf{x}$ e raggio ε, con ε sufficientemente piccolo per quello che segue, e sia

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash \bar{B}_\varepsilon$$

Applico la II identità di Green al dominio Ω_ε su cui la funzione $v(\mathbf{y}) = G(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ è armonica, distinguendo i tre casi seguenti.

Caso $x \in \Omega$. Scelgo ε piccolo in modo che $\bar{B}_\varepsilon$ sia dentro Ω. In tal modo, il bordo di $\partial\Omega_\varepsilon$ è fatto dei due bordi disgiunti $\partial\Omega$ e ∂B_ε. Si ottiene

$$-V_{\Omega_\varepsilon}[\triangle u] = D_{\partial\Omega}[u] - S_{\partial\Omega}[\partial_n u] - D_{\partial B_\varepsilon}[u] + S_{\partial B_\varepsilon}[\partial_n u]$$

Il cambio di segno negli ultimi due termini si ha quando si considera su ∂B_ε la normale esterna alla palla $(\mathbf{y}-\mathbf{x})/|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$, che è invece interna a $\partial\Omega_\varepsilon$. Passando al limite, a sinistra si ottiene $-V_\Omega[\triangle u]$. A destra si ha

$$\lim_{\varepsilon\to 0} S_{\partial B_\varepsilon}[\partial_n u] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\partial B_\varepsilon} \sigma(\mathrm{d}y)\, \partial_{n_y} u = 0$$

(infatti l'integrando è regolare e l'integrale è di ordine ε^2). Invece

$$D_{\partial B_\varepsilon}[u] = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon} \sigma(\mathrm{d}y) u(\mathbf{y}) \frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \cdot \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon} \sigma(\mathrm{d}y) u(\mathbf{y})$$

che tende a $-u(\mathbf{x})$, essendo l'opposto della media di u su un dominio che si sta stringendo al punto $\mathbf{x}$.
Riassumendo, se $\mathbf{x} \in \Omega$

$$-V_\Omega[\triangle u](\mathbf{x}) = D_{\partial\Omega}[u](\mathbf{x}) - S_{\partial\Omega}[\partial_n u](\mathbf{x}) + u(\mathbf{x})$$

Caso $\mathbf{x} \notin \overline{\Omega}$. In questo caso $\Omega = \Omega_\varepsilon$, e dunque

$$-V_\Omega[\triangle u](\mathbf{x}) = D_{\partial\Omega}[u](\mathbf{x}) - S_{\partial\Omega}[\partial_n u](\mathbf{x})$$

Caso $\mathbf{x} \in \partial\Omega$. Si ha

$$-V_{\Omega_\varepsilon}[\triangle u] = D_{\partial\Omega\backslash B_\varepsilon}[u] - S_{\partial\Omega\backslash B_\varepsilon}[\partial_n u] - D_{\partial\Omega\cap B_\varepsilon}[u] + S_{\partial\Omega\cap B_\varepsilon}[\partial_n u]$$

È facile verificare che anche in questo caso il termine di singolo strato sulla "mezza sfera" $\partial\Omega \cap B_\varepsilon$ va a zero, mentre il termine di doppio strato va a $u(\mathbf{x})/2$. Inoltre

$$\lim_{\varepsilon\to 0} S_{\partial\Omega\backslash B_\varepsilon}[\partial_n u](\mathbf{x}) = S^0[\partial_n u](\mathbf{x})$$

Mentre

$$\lim_{\varepsilon\to 0} D_{\partial\Omega\backslash B_\varepsilon}[u](\mathbf{x}) = Ku(\mathbf{x})$$

Riassumendo, se $\mathbf{x}$ è sul bordo:

$$-V_\Omega[\triangle u](\mathbf{x}) = Ku(\mathbf{x}) - S_{\partial\Omega}[\partial_n u](\mathbf{x}) + u(\mathbf{x})/2$$

Riscrivo insieme le tre identità precedenti:

$$\begin{aligned} t\mathbf{x} \in \Omega : \quad & -V_\Omega[\triangle u](\mathbf{x}) = Du(\mathbf{x}) - S_{\partial\Omega}[\partial_n u](\mathbf{x}) + u(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x} \in \partial\Omega : \quad & -V_\Omega[\triangle u](\mathbf{x}) = Ku(\mathbf{x}) - S^0[\partial_n u](\mathbf{x}) + u(\mathbf{x})/2 \\ \mathbf{x} \notin \overline{\Omega} : \quad & -V_\Omega[\triangle u](\mathbf{x}) = Du(\mathbf{x}) - S_{\partial\Omega}[\partial_n u](\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Confrontandole nel passaggio di $\mathbf{x}$ da dentro a fuori Ω, si nota che i termini di volume di singolo strato sono continui, dunque il termine di doppio strato deve essere discontinuo. Sia $x_0 \in \partial\Omega$, indico con $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0^\pm$ il limite da fuori e da dentro Ω, rispettivamente. Si ottiene

$$\lim_{\mathbf{x}\to x_0^+} D_{\partial\Omega}[u](\mathbf{x}) = Ku(\mathbf{x}_0) + u(\mathbf{x}_0)/2 = \lim_{\mathbf{x}\to x_0^-} D_{\partial\Omega}[u](\mathbf{x}) + u(\mathbf{x}_0)$$

In altre parole

$$\lim_{\mathbf{x}\to x_0^\pm} D_{\partial\Omega}[u](\mathbf{x}) = \pm\frac{1}{2}u(\mathbf{x}_0) + Ku(\mathbf{x}_0)$$

Teorema 14.4. *Salto del potenziale di doppio strato*
Se μ è una funzione continua su $\partial\Omega$, allora

$$\lim_{\mathbf{x}\to x_0^\pm} D_{\partial\Omega}[\mu](\mathbf{x}) = \pm\frac{1}{2}\mu(\mathbf{x}_0) + K\mu(\mathbf{x}_0)$$

Dimostrazione. Abbiamo dimostrato questo teorema nel caso μ sia la restrizione a $\partial\Omega$ di una funzione di classe C^2. Il caso generale segue dal fatto che se μ è una funzione limitata, allora

$$|D_{\partial\Omega}[\mu](\mathbf{x})| \leq c\|\mu\|_\infty$$

con $\mathbf{x}$ indipendente da $\mathbf{x}$, se $\mathbf{x}$ è sufficientemente vicino a $\partial\Omega$ (meno di $\delta/2$). Infatti, se $\mathbf{x} \in \partial\Omega$,

$$|K\mu(\mathbf{x}) \leq c\|\mu\|_\infty$$

come abbiamo dimostrato nel teorema 14.3. Se $\mathbf{x} \notin \partial\Omega$, e dista meno di $\delta/2$ dal bordo, si ha

$$|D_{\partial\Omega}[\mu_\varepsilon](\mathbf{x})| \leq \|\mu_\varepsilon\|_\infty \left(\int_{\partial\Omega\cap C_\delta} |\,\partial_{n_y} G| + \int_{\partial\Omega\setminus C_\delta} |\,\partial_{n_y} G| \right)$$

Come abbiamo provato in 14.2, il primo termine è stimato da c, mentre il secondo è stimato da c/δ^2.
Sia dunque μ una funzione continua su $\partial\Omega$, e sia ϕ_ε una funzione di classe $C^2(\mathbb{R}^3)$, con

$$\sup_{\mathbf{x}\in\partial\Omega} |\mu(\mathbf{x}) - \phi_\varepsilon(\mathbf{x})| \leq \varepsilon$$

È facile a questo punto mostrare che poichè il teorema vale per ϕ_ε, vale anche per μ. Lascio gli elementari dettagli al lettore. □

Un caso particolare di questo teorema si ottiene scegliendo $u = 1$, per cui $\triangle u = 0$ e $\partial_{n_y} = 0$, dunque in tutte le identità dimostrate a proposito della III identità di Green, i termini di volume $V[\triangle 1]$ e di strato singolo $S[\partial_n 1]$ sono nulli. Si ottiene così il seguente teorema.

Teorema 14.5. *Lemma di Gauss*
Il potenziale di doppio strato generato da 1

$$D_{\partial\Omega}[1] = \int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} G(\mathbf{x}-\mathbf{y})\sigma(\mathrm{d}y)$$

verifica

$$D_{\partial\Omega}[1](x) = \begin{cases} -1 & \textit{se} \;\; x \in \Omega \\ -1/2 & \textit{se} \;\; x \in \partial\Omega \\ 0 & \textit{se} \;\; x \notin \overline{\Omega} \end{cases}$$

Il potenziale di strato singolo è meno singolare di quello di doppio strato, ma la sua derivata normale è singolare esattamente come quello di doppio strato. Come conseguenza, anche la derivata normale del potenziale di singolo strato è discontinua.

Teorema 14.6. *Discontinuità della derivata normale del potenziale di singolo strato*
Indicando con

$$\partial_n^{\pm} S\mu(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon\to 0^{\pm}} \frac{1}{\varepsilon}(S[\mu](\mathbf{x}+\varepsilon\mathbf{n}) - S[\mu](\mathbf{x}))$$

la derivata normale da fuori e da dentro del potenziale di singolo strato, si ha

$$\partial_n^{\pm}\mu(\mathbf{x}) = K^*\mu(\mathbf{x}) \mp \frac{1}{2}\mu(\mathbf{x})$$

Dimostrazione. Questo teorema si può dimostrare a mano, usando le carte locali, ma è più semplice invocare le identità di Green già dimostrate. Sia u una funzione C^2. Calcoliamo il valore di

$$\int_\Omega \triangle u S[\mu]$$

Poiché $S[\mu]$ è armonica fuori da $\partial\Omega$, Usando la seconda identità di Green si ha

$$\int_\Omega \triangle u S[\mu] = \int_\Omega (\triangle u S[\mu] - u\triangle S[\mu]) = \int_{\partial\Omega} \partial_n u S^0\mu - \int_{\partial\Omega} u\, \partial_n S[\mu]$$

D'altra parte

$$\int_\Omega \triangle u S[\mu] = \int_\Omega \mathrm{d}\mathbf{y} \triangle u(\mathbf{y}) \int_{\partial\Omega} \sigma(\mathrm{d}\mathbf{x})\mu(\mathbf{x})G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \int_{\partial\Omega} \sigma(\mathrm{d}\mathbf{x})\mu(\mathbf{x}) \int_\Omega \triangle u(\mathbf{y})G(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y}$$

dove ho usato che G è pari, e che G è sommabile sul bordo, dunque posso scambiare gli ordini di integrazione. Uso adesso la III identità di Green (14.3) per l'integrale in $\mathrm{d}\mathbf{y}$, ricordando che $\mathbf{x} \in \partial\Omega$. Ottengo

$$-\int_{\partial\Omega} \mu \left(Ku - S^0\, \partial_n u + \frac{u}{2}\right)$$

Indico con $(\ ,\ )_\partial$ il prodotto L^2 su $\partial\Omega$. Abbiamo ottenuto

$$(\partial_n u, S^0\mu)_\partial - (u, \partial_n S[\mu])_\partial = -(\mu, Ku)_\partial + (\mu, S^0\, \partial_n u)_\partial - \frac{1}{2}(\mu, u)_\partial$$

Ma S^0 è autoaggiunto, dunque per ogni u

$$(\partial_n S[\mu], u)_\partial + \frac{1}{2}(\mu, u)_\partial + (K^*\mu, u)_\partial$$

In questa identità, $\partial_n S[\mu]$ è per costruzione la derivata normale calcolata da dentro Ω, che chiamerò $\partial_n^+ S\mu$ (anche questo è un operatore dalle funzioni di $\partial\Omega$ in sé). Siccome le funzioni di classe C^2 sul bordo sono dense in $L^2(\partial\Omega)$ e sono prolungabili a funzioni $C^2(\mathbb{R}^3)$, ne segue che

$$\partial_n S^- \mu = \frac{1}{2}\mu + K^*\mu$$

Analogamente, integrando su Ω^c, e riscrivendo la normale esterna al complementare di Ω come l'opposto della normale esterna a Ω, si ottiene

$$\int_\Omega^c \triangle u S[\mu] = -(\partial_n u, S^0\mu)_\partial + (u, \partial_n^+ S\mu)_\partial$$

e

$$\int_\Omega^c \triangle u S[\mu] = (\mu, Ku)_\partial - (\mu, S^0\,\partial_n u)_\partial - \frac{1}{2}(\mu, u)_\partial$$

(si noti che il termine in $u/2$ non cambia segno!). Quindi

$$\partial_n^+ S\mu = K^*\mu - \frac{1}{2}\mu$$

□

Concludo con un ultimo teorema che riguarda il potenziale di doppio strato.

Teorema 14.7. *Continuità della derivata normale del potenziale di doppio strato*
Sia $\mu \in C^2(\partial\Omega)$. Indicando con

$$\partial_n^\pm D\mu(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon\to 0^\pm} \frac{1}{\varepsilon}(D[\mu](\mathbf{x}+\varepsilon\mathbf{n}) - S[\mu](\mathbf{x}))$$

la derivata normale da fuori e da dentro del potenziale di doppio strato, si ha

$$\partial_n^+ D\mu = \partial_n^- D\mu$$

Dimostrazione. La dimostrazione che do si basa sul fatto che il potenziale di volume è una funzione C^1, se la densità di carica è limitata. Dimostriamo la continuità della derivata normale del potenziale di doppio strato generato da una funzione regolare $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$, calcolando la derivata normale da dentro e da fuori delle (14.3):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\in\Omega: &\quad -\partial_n V_\Omega[\triangle u](\mathbf{x}) = \partial_n^- Du(\mathbf{x}) - \partial_n^- S_{\partial\Omega}[\partial_n u](\mathbf{x}) + \partial_n u(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}\notin\overline{\Omega}: &\quad -\partial_n V_\Omega[\triangle u](\mathbf{x}) = \partial_n^+ Du(\mathbf{x}) - \partial_n^+ S_{\partial\Omega}[\partial_n u](\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Inserendo a destra l'informazione sul salto della derivata normale del potenziale di singolo strato $\partial_n^\pm S_{\partial\Omega}[\partial_n u] = K^*u \mp \frac{1}{2}u$ si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\in\Omega: &\quad -\partial_n V_\Omega[\triangle u](\mathbf{x}) = \partial_n^- Du(\mathbf{x}) - K^*\,\partial_n u(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}\,\partial_n u(\mathbf{x}) + \partial_n u(\mathbf{x}) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad = \partial_n^- Du(\mathbf{x}) - K^*\,\partial_n u(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\,\partial_n u(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}\notin\overline{\Omega}: &\quad -\partial_n V_\Omega[\triangle u](\mathbf{x}) = \partial_n^+ Du(\mathbf{x}) - K^*\,\partial_n u(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\,\partial_n u(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

e dunque, essendo $\partial_n V$ continuo, si ha la tesi. □La dimostrazione si estende facilmente al caso $\mu \in C^2(\partial\Omega)$. D'altra parte è abbastanza evidente che se $\mu \in C(\partial\Omega)$, allora

μ si estende a una funzione $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega)$ che è $C(\mathbb{R}^3)$ (si estenda C e poi la si regolarizzi nella direzione parallela a $\partial\Omega$ ...). D'altra parte queste regolarizzazione deve avvenire in modo che il laplaciano della regolarizzata sia limitato. Non indago oltre su questo fatto, ma faccio qualche esempio di non regolarità.

Esercizio 46. Non regolarità della derivata tangente del potenziale di singolo strato
Considera in $\mathbb{R}^2$ il potenziale di singolo strato generato da μ sull'asse delle ascisse: $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (t, 0)$

$$u(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mu(t) \ln \sqrt{(x_1 - t)^2 + x_2^2}\, \mathrm{d}t$$

Per $x_2 \neq 0$, la derivata in x_1 è

$$\partial_1 u(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t \mu(t) \frac{x_1 - t}{(x_1 - t)^2 + x_2^2}$$

Sono interessato al limite per $x_2 \to 0$, dunque scelgo $x_1 = 0$ e $x_2 = \varepsilon$

$$\partial_1 u(0, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t \mu(t) \frac{t}{t^2 + \varepsilon^2}$$

Nota che come valore principale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{t}{t^2 + \varepsilon^2}\, \mathrm{d}t = 0$$

Dunque

$$\partial_1 u(0, \varepsilon)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (\mu(t) - \mu(0)) \frac{t}{t^2 + \varepsilon^2}\, \mathrm{d}t$$

Supponi μ a supporto compatto e hölderiana in 0. Usando che $\frac{|t|}{t^2+\varepsilon^2} \leq \frac{1}{|t|}$, mostra, per convergenza dominata, che $\partial_1 u(0, \varepsilon)$ tende a 0 per $\varepsilon \to 0$.
Considera invece

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t = 0 \\ \operatorname{sgn}(t)\,(1 - 1/\ln|t|) & \text{se } 0 < |t| < 1/\mathrm{e} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Nota che μ è dispari e non è hölderiana in 0. Vale

$$\partial_1 u(0, \varepsilon) = \frac{1}{\pi} \int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{1}{|\ln t|} \frac{t}{t^2 + \varepsilon^2}\, \mathrm{d}t.$$

Usando che se $|\varepsilon| < t$ allora $t^2 + \varepsilon^2 \leq 2t^2$ ottieni

$$|\,\partial_1 u(0, \varepsilon)| \geq \frac{1}{2\pi} \int_{|\varepsilon|}^{1/\mathrm{e}} \frac{1}{t|\ln t|}\, \mathrm{d}t$$

L'integrale è esplicitamente computabile, e diverge come $|\ln|\ln\varepsilon||$ per $\varepsilon \to 0^+$. Dunque il potenziale di singolo strato ha una derivata tangente che può divergete se μ non è almeno hölderiana.

Esercizio 47. Non regolarità della derivata normale del potenziale di doppio strato
Come nell'esercizio precedete, considero il caso piano, con $\partial\Omega$ uguale all'asse orizzontale. Il potenziale di doppio strato generato da μ è

$$u(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mu(t) \frac{x_2}{(x_1 - t)^2 + x_2^2}$$

La sua derivata in x_2, calcolata in $(x_1, x_2) = (0, \varepsilon)$ è

$$\partial_2 u(0,\varepsilon) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mu(t)\frac{t^2-\varepsilon^2}{t^2+\varepsilon^2}$$

Si noti che

$$-\partial_t \frac{t}{t^2+\varepsilon^2} = \frac{t^2-\varepsilon^2}{t^2+\varepsilon^2}$$

Dunque se $\mu \in C^1$, integrando per parti si ha

$$\partial_2 u(0,\varepsilon) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mu'(t)\frac{t}{t^2+\varepsilon^2}\,\mathrm{d}t$$

Procedendo come nell'esercizio precedente, mostra che se μ' è hölderiana in 0 allora il limite per $\varepsilon \to 0$ esiste finito e non dipende dal segno di ε, mentre se μ' non è hölderiana, il limite può divergere.

14.4 Il problema di Laplace - Dirichlet interno

Riassumo le informazioni sulle discontinuità del potenziale di singolo e doppio strato.

$$\begin{array}{l} S^+[\mu] = S^-[\mu] = S^0\mu \\ \partial_n^{\pm} S[\mu] = \mp\frac{1}{2}\mu + K^*\mu \\ D^{\pm}[\mu] = \pm\frac{1}{2}\mu + K\mu \end{array}$$

Inoltre ricordo che $S[\mu]$ e $D[\mu]$ hanno laplaciano nullo fuori da $\partial\Omega$.
Voglio risolvere l'equazione di Laplace per un dominio Ω con condizioni di Dirichlet non omogenee.

$$\begin{cases} \triangle u(x) = 0 & \text{per } x \in \Omega \\ u(x) = f(x) & \text{per } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Questo problema si può trasformare nella ricerca di un potenziale di doppio strato. Infatti, se cerco la soluzione di nella forma $u = D[\mu]$, la condizione al contorno diventa

$$f = D^-[\mu] = -\frac{1}{2}\mu + K\mu \tag{14.2}$$

Quindi posso trovare una soluzione se trovo μ che risolve questa equazione di Fredholm. Ricordo che K è compatto, dunque per avere la risolubilità per qualunque $f \in L^2(\partial\Omega)$ il nucleo dell'operatore aggiunto deve essere banale, cioè

$$-\frac{1}{2}\nu + K^*\nu = 0$$

deve implicare che ν è nullo. Considero a questo scopo il potenziale $S[\nu]$ di singolo strato generato da ν, e osservo che l'equazione appena scritta equivale a

$$\partial_n^+ S[\nu] = 0$$

Ne segue che $S[\nu]$ risolve il problema di Laplace-Neumann omogeneo nel dominio esterno Ω^c. Mostreremo che questa condizione implica che che $\nu = 0$, concludendo, in questo modo, la prova.

Teorema 14.8. *Unicità della soluzione del problema di Laplace-Neumann esterno*
Se $S[\nu]$ risolve il problema di Laplace-Neumann esterno con condizione

$$\partial_n^+ S[\nu] = 0$$

allora

(a) *$S[\nu]$ è nulla in Ω^c*

(b) *ν è nullo*

Dimostrazione. È semplice provare che **(a)** implica **(b)**. Infatti, $S[\nu]$ risolve l'equazione di Laplace anche in Ω, e, essendo continua, se è zero in Ω^c allora è zero anche su $\partial\Omega$. Ma l'unica soluzione dell'equazione di Laplace nulla al bordo è la soluzione nulla. Dunque $S[\nu]$ è nulla anche in Ω. Ne segue che anche $\partial_n^- S[\nu] = 0 = \partial_n^+ S[\nu]$, ma allora $\nu/2 + K^*\nu = -\nu/2 + K^*\nu$ e dunque ν è nulla.
Per dimostrare **(a)**, noto innanzi tutto che $S[\nu]$ risolve anche il problema di Laplace-Neumann interno con condizione

$$\partial_n^- S[\nu] = \frac{\nu}{2} + K^*\nu = \partial_n^+ S[\nu] + \nu = \nu$$

D'altra parte, $S[\nu]$ deve verificare la condizione di compatibilià per l'equazione di Laplace con condizioni di Neumann, cioè

$$\int_{\partial\Omega} \partial_n^- S[\nu] = 0$$

Dunque ν ha integrale nullo, e quindi asintoticamente, conta solo il termine di dipolo. Dunque, in dimensione n,

$$S[\nu] = O(|\mathbf{x}|^{n-1}) \quad \text{e} \quad \nabla S[\nu] = O(|\mathbf{x}|^{n})$$

Ne segue che, se B_R è una sfera di raggio R e centro 0, che contiene Ω. usando il teorema della divergenza,

$$\int_{B_R \setminus \Omega} |\nabla S[\mu]|^2 = \int_{\partial B_R} S[\mu]\, \partial_n S[\mu]$$

(l'integrale sul bordo $\partial\Omega$ è 0 perché abbiamo assunto $\partial_n^+ S[\mu] = 0$). L'integrando va a zero come $1/R^{n-1+n}$, mentre la misura di ∂B_R diverge come R^{n-1}. Dunque il membro di destra tende a 0 per $R \to +\infty$. Ne segue che

$$\int_{B_R \setminus \Omega} |\nabla S[\mu]|^2 = 0,$$

dunque $S[\mu]$ è costante. D'altra parte, $S[\mu] \to 0$ per $|x| \to +\infty$, e dunque è 0. □

Osservazione.
In dimensione $n \geq 3$ non è necessario notare che l'andamento asintotico è governato dal termine di dipolo, infatti il potenziale decade come $1/R^{n-2}$ e il suo gradiente come $1/R^{n-1}$, e l'argomento continua a funzionare. È invece necessario nel caso bidimensionale, in cui il potenziale diverge logaritmicamente, e il suo gradiente va a zero come $1/R$ che viene esattamente compensato dalla misura della circonferenza.

Rimane un ultimo dettaglio da sistemare: tutta questa analisi e anche parte delle dimostrazioni presuppongono che μ sia continua. Dunque è necessario assicurarsi che le eventuali soluzioni delle equazioni di Fredholm per K e K^* sono continue.

Teorema 14.9. *Regolarità delle soluzioni*
Data $f \in C(\Omega)$, sia $\mu \in L^2(\partial\Omega)$ soluzione di

$$K\mu - \mu = f$$

Allora μ è una funzione continua.
Lo stesso risultato vale se $K\mu \pm \frac{1}{2}\mu = f$ oppure se $K^*\mu \pm \frac{1}{2}\mu = f$.

Dimostrazione. Decomponiamo come sempre K nella somma di due operatori integrali, K_δ e K_δ^c. Abbiamo provato che

$$\|K_\delta\|_{infty} \leq c\delta, \quad \|K_\delta^c\|_\infty \leq c/\delta^2$$

e inoltre che

$$|K_\delta\| \leq c\delta$$

Inoltre, il nucleo di K_δ^c è non è singolare, dunque se $\mu \in L^2(\partial\Omega)$ allora $K_\delta^c\mu$ è una funzione continua. Infatti, sia

$$g_\delta^c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \partial_{n_y} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathcal{X}\{\mathbf{y} \notin C_\delta(\mathbf{x})$$

il nucleo di K_δ^c. Si ha

$$|K_\delta^c\mu(\mathbf{x}_1) - K_\delta^c\mu(\mathbf{x})| \leq \int_{\partial\Omega} |g_\delta^c(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) - g_\delta^c(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \, |\mu(\mathbf{y})| \sigma(\mathrm{d}\mathbf{y})$$

Per Cauchy-Schwartz,

$$|K_\delta^c\mu(\mathbf{x}_1) - K_\delta^c\mu(\mathbf{x}_2)|^2 \leq \|\mu\| \int_{\partial\Omega} |g_\delta^c(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) - g_\delta^c(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 \sigma(\mathrm{d}y)$$

Per convergenza dominata, l'integrale tende a 0.
Sia ora μ soluzione di $K\mu - \mu = f$. Allora

$$(\mathbf{I} - K_\delta)\mu = K_\delta^c\mu - f$$

L'operatore $\mathbf{I} - K_\delta$ è invertibile in serie di Neumann per δ sufficientemente piccolo sia in L^2 che in L^∞. Inoltre il membro di destra è una funzione continua. Dunque

$$\mu = \sum_n K_\delta^n (K_\delta^c\mu - f)$$

da cui

$$\|\mu\|_\infty \leq \|K_\delta^c\mu - f\|_\infty \sum (c\delta)^n$$

Dunque μ è L^∞. Sia ora δ' piccolo:

$$\|\mu - K_{\delta'}\mu + f\|_\infty \leq \|K_{\delta'}\mu\|_\infty \leq c\delta'\|\mu\|_\infty.$$

Dunque per $\delta' \to 0$ la successione di funzioni continue $K_{\delta'}\mu - f$ converge uniformemente μ, che quindi è continua. □

Riassumo in un teorema i risultati ottenuti in questo paragrafo.

Teorema 14.10. *Problema di Laplace-Dirichlet interno*
Se f è una funzione continua, il problema di Laplace con condizione di Dirichlet f al contorno ha una soluzione unica, che si può rappresentare come potenziale di doppio strato di densità di dipolo μ, dove μ è l'unica soluzione in $L^2(\partial\Omega)$ dell'equazione di Fredholm

$$K\mu - \frac{1}{2}\mu = f$$

La densità di dipolo μ è inoltre continua.

Ricordo che l'unicità si ottiene mediante il principio del massimo.

14.5 Il problema di Laplace-Neumann

Anche il problema di Laplace-Neumann può essere tradotto in una equazione integrale al bordo. Cerchiamo infatti una soluzione di

$$\begin{cases} \triangle u(x) = 0 & \text{in } x \in \Omega \\ \partial_n u(x) = g(x) & \text{in } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

tra i potenziali di singolo strato $S[\mu]$, con μ distribuzione di carica continua su $\partial\Omega$. La condizione al bordo diventa

$$g = \partial_n^+ S[\mu]g(x) = K^*\mu + \frac{1}{2}\mu$$

Dunque $S[\mu]$ è soluzione del problema di Laplace-Neumann se μ risolve l'equazione integrale di tipo Fredholm appena scritta.
L'operatore K^* è compatto, dunque si può usare la teoria di Fredholm.
Sappiamo già che c'è una condizione necessaria su g per l'esistenza di una soluzione u, infatti

$$0 = \int_\Omega \triangle u = \int_{\partial\Omega} \partial_n u = \int_{\partial\Omega} g.$$

D'altra parte questa condizione di ortogonalità per g è anche conseguenza diretta dell'equazione di Fredholm infatti, indicando con $(f,g)_\partial$ il prodotto scalare su $\partial\Omega$, si ha

$$(1,g)_\partial = \frac{1}{2}(1,\mu)_\partial + (1,K^*\mu)_\partial = \frac{1}{2}(1,\mu)_\partial + (K1,\mu)_\partial = \frac{1}{2}(1,\mu)_\partial - \frac{1}{2}(1,\mu)_\partial = 0$$

dove l'uguaglianza $K1 = -1/2$ è conseguenza del lemma di Gauss. Vederemo, con una certa fatica, che la condizione $(1,g)_\partial = 0$ è anche condizione sufficiente per l'esistenza delle soluzioni.

In accordo alla teoria degli operatori compatti, l'equazione per μ ha soluzione per ogni g se l'equazione aggiunta omogenea ha solo la soluzione nulla. L'equazione aggiunta omogenea è

$$\frac{1}{2}\tilde{\mu} + K\tilde{\mu} = 0$$

Ricordo che se $\tilde{\mu}$ risolve questa equazione, allora il potenziale di doppio strato generato da $\tilde{\mu}$ vale a 0 sul bordo esterno. L'equazione aggiunta ha soluzioni non banali, infatti se $\tilde{\mu} = 1$, il Lemma di Gauss garantisce che $K1 = -1/2$, e dunque l'equazione è soddisfatta.

Dimostreremo che le uniche soluzioni dell'equazione omogenea associata sono le costanti, e dunque l'equazione di partenza è risolubile se e solo se g è ortogonale alle costanti, che è proprio la condizione di compatibilità che ci era già nota.

Il punto chiave di questa dimostrazione è che il potenziale di doppio strato è discontinuo al bordo, ma la sua derivata normale è continua, come abbiamo mostrato.
Sia dunque $\tilde{\mu}$ una soluzione dell'equazione omogenea associata, e sia $D[\tilde{\mu}]$ il potenziale di doppio strato da essa generato. Fuori da Ω, $D[\tilde{\mu}]$ è nulla, dunque $\partial_n^+ D[\tilde{\mu}] = 0$ è nulla sul bordo. Poiché la derivata normale è continua, $D[\tilde{\mu}]$ risolve anche il problema di Laplace-Neumann all'interno, con condizione di Neumann omogenea al bordo, dunque $D[\tilde{\mu}]$ è costante all'interno, infatti

$$\int_\Omega |\nabla D[\tilde{\mu}]|^2 = \int_{\partial\Omega} D[\tilde{\mu}]\, \partial_n D^-[\tilde{\mu}] = 0$$

Dunque

$$\tilde{\mu} = D[\tilde{\mu}]^+ - D[\tilde{\mu}]^- = 0 - \text{cost}$$

$\tilde{\mu}$ è costante, come volevamo dimostrare.

14.6 Conduttori carichi

Come noto dai corsi di fisica generale, in un conduttore carico in condizioni di equilibrio, la carica si distribuisce sulla superficie. Se così non fosse, ci sarebbe un campo elettrico interno (per il teorema di Gauss, intorno a una carica c'è sempre un flusso del campo), dunque gli elettroni del conduttore verrebbero accelerati, contro l'ipotesi di equilibrio. Per lo stesso motivo, la superficie del conduttore deve essere equipotenziale, in modo che il campo sia normale alla superficie (altrimenti gli elettroni al bordo verrebbero accelerati).
In questa descrizione fisica, si tiene in conto del fatto che la carica complessiva non è nulla, e dell'esistenza di elettroni liberi di muoversi nel conduttore.
Dal punto di vista matematico, la distribuzione di cariche al bordo ν genera un potenziale di singolo strato. Se il sistema è in equilibrio, questa distribuzione deve minimizzare l'energia. Per una distribuzione di carica ρ a supporto compatto, che genera un potenziale $G*\rho$ l'energia su tutto lo spazio è

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 &= \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2}\int_{B_R(0)} |\nabla u|^2 \\ &= \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2}\int_{\partial B_R} u\,\partial_n u + \frac{1}{2}\int u\rho\end{aligned}$$

In dimensione 3, u decade come $1/|x|$, ∇u come $1/|x|^2$ quindi il termine di bordo va a 0 (in dimensione due non è così). Quindi per una distribuzione di strato singolo ν, l'energia è

$$E = \frac{1}{2}\int_{(\partial\Omega)^2} \nu(x)G(x-y)\nu(y)\sigma(\mathrm{d}x)\sigma(\mathrm{d}y) = \frac{1}{2}(\nu, S^0\nu)$$

Assegnato il valore della carica, sia $\int_{\partial\Omega}\nu = 1$, trovare il minimo per E corrisponde a trovare i punti stazionari del funzionale vincolato

$$E - \gamma\left(\int_{\partial\Omega} \nu - 1\right)$$

E è una forma quadratica, ed è immediato verificare che la condizione di stazionarietà è

$$S^0\nu = \gamma$$

da risolvere con il vincolo $\int_{\partial\Omega}\nu = 1$. Se questa soluzione esiste, allora il potenziale di singolo strato $S[\nu]$ è costante al bordo, e, poiché all'interno verifica l'equazione di Laplace, è costante in tutto $\bar{\Omega}$. Ne segue che $\partial_n^- S[\nu] = 0$, e dunque ν deve risolvere l'equazione

$$\frac{1}{2}\nu + K^*\nu = 0$$

cioè $S[\nu]$ è un potenziale di strato singolo non nullo che risolve il problema di Laplace-Neumann omogeneo. Viceversa, se ν risolve l'equazione omogenea di Fredholm interna, ne segue che $S[\mu]$ è costante all'interno e dunque, per continutià, fino al bordo.
Come abbiamo visto, l'equazione aggiunta ha kernel non banale di dimensione 1 (il kernel è costituito dalle funzioni costanti). Dunque, una sola soluzione del problema assegnato (che è unica se la carica totale è fissata) a patto di dimostrare che la soluzione ν ha integrale non nullo (altrimenti non esisterebbe soluzione a carica totale assegnata non nulla). Ricordo che S^0 è un operatore compatto autoaggiunto, dunque diagonalizzabile, e ricordo che

$$S^0\mu = 0$$

ha solo la soluzione nulla (infatti $S[\mu]$ risolve l'equazione di Laplace ovunque, dunque è identicamente nulla, e dunque il salto della derivata normale è nullo, e quindi $\mu = 0$). Ne segue che

$$(\mu, S^0\mu) > 0$$

se μ non è nulla.
Sia ora ν non nulla che risolve $\frac{1}{2}\nu + K^*\nu = 0$. Come abbiamo visto ne segue che $S^0\nu = \gamma$ costante. Moltiplicando per ν e integrando si ha che

$$2E = (\nu, S^0\nu) = \gamma\int_{\partial\Omega}\nu$$

Pochè ν è non nulla, ne segue che E è non nulla, e dunque sia γ che la carica totale sono non nulle.

Esercizio 48. Problema di Laplace-Dirichlet esterno

Si può trasformare il problema di Laplace-Dirichlet esterno

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \text{in } \overline{\Omega}^c \\ u = f & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

nell'equazione di Fredholm

$$\frac{1}{2}\mu + K\mu = f$$

, cercando u come il potenziale di doppio strato generato da μ. Questa equazione non ha soluzione unica, infatti, se $\mu = 1$ si ottiene una soluzione non nulla per il caso $f = 0$. Questo non significa che il problema di Laplace-Dirichlet esterno abbia più di una soluzione, infatti $\mu = 1$ genera la soluzione nulla.

Inoltre, è falso che la soluzione esista per ogni f. Infatti, l'equazione di Fredholm ha soluzione solo se f è ortogonale alla distribuzione ν di equilibrio del conduttore carico che abbiamo determinato nel paragrafo precedente.
Sia dunque ν soluzione non nulla di

$$K^*\nu + \frac{1}{2}\nu = 0$$

con $\|\nu\| = 1$. Sia $\gamma = S[\nu](\mathbf{x}) \neq 0$ per $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$. Si decomponga f in

$$f = \alpha + (f - \alpha)$$

con α numero reale. Si determini α in modo che $(f - \alpha, \nu)_\partial = 0$ Si provi che la soluzione del problema di Laplace-Dirichlet esterno è data da

$$u = \frac{\alpha}{\gamma} S[\nu] + D[\mu]$$

dove μ è l'unica soluzione a media nulla dell'equazione

$$K\mu + \frac{1}{2}\mu = f - \alpha$$

ed esiste per la scelta fatta su α.

Esercizio 49. Domini non semplicemente connessi

Prova a formulare il problema di Laplace-Dirichlet per un dominio non semplicemente connesso (per semplicità con un solo buco), tentando di riprodurre la teoria appena sviluppata.

14.7 Appendice: regolarità del potenziale di volume

Lavoro in $\mathbb{R}^3$, ma nelle altre dimensioni si ottengono gli stessi risultati con le stesse procedure.
Ricordo che

$$G(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|}$$

è la funzione di Green in $\mathbb{R}^3$ per il problema di Poisson, cioè, nel senso delle distribuzioni

$$\triangle G(x) = -\delta(x)$$

ovvero, per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ vale

$$\int G(x) \triangle \phi(x)\, \mathrm{d}x = -\phi(0)$$

Enuncio e dimostro dei risultati di regolarità, in ordine crescente di difficoltà.

Teorema 14.11. *Limitatezza e continuità di $V[f]$ con $f \in L^1 \cap L^\infty$*
Se $f \in L^1 \cap L^\infty$ allora $V[f](\mathbf{x})$ è una funzione continua e limitata.

Dimostrazione. Dato $\delta > 0$, siano V_δ e V_δ^c gli operatori di convoluzione di nucleo, rispettivamente,

$$g_\delta(\mathbf{z}) = G(\mathbf{z})\mathcal{X}\{|\mathbf{z}| < \delta\}, \quad g_\delta^c(\mathbf{z}) = G(\mathbf{z})\mathcal{X}\{|\mathbf{z}| > \delta\}$$

Risulta facilmente che

$$|V_\delta[f](\mathbf{x})| \leq c\|f\|_\infty \int_0^\delta \rho\, \mathrm{d}\rho = c\delta^2 \|f\|_\infty$$

Invece
$$|V^c_\delta[f](\mathbf{x})| \leq \frac{c}{\delta}\|f\|_1$$
Da queste due stime di ottiene la limitatezza. Ottimizzando in δ si ottiene
$$\|V[f]\|_\infty \leq c\|f\|_1^{2/3}\|f\|_\infty^{1/3}$$
Per provare la continuità, considero prima V^c_δ:
$$|V^c_\delta[f](\mathbf{x}_1) - V^c_\delta[f](\mathbf{x})| \leq \int_{\mathbb{R}^3} |f(\mathbf{y})||g^c_\delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}) - g^c_\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})|\,\mathrm{d}\mathbf{y}$$
L'integrando è limitato di $c|f(\mathbf{y})|/\delta$, che è sommabile, inoltre q.o. in $\mathbf{y}$
$$\lim_{\mathbf{x}_1\to\mathbf{x}} |g^c_\delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}) - g^c_\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})| = 0$$
dunque per convergenza dominata si ottiene la continuità in $\mathbf{x}$ di $V^c_\delta[f](\mathbf{x})$. Inoltre
$$|V[f](\mathbf{x}) - V^c_\delta[f](\mathbf{x})| \leq |V_\delta[f](\mathbf{x})| \leq c\delta\|f\|_\infty$$
Passando al limite per $\delta \to 0$ si ottiene che $V[f](\mathbf{x})$ è limite uniforme di funzioni continue, dunque è continuo. □

Teorema 14.12. *Regolarità C^1 di $V[f]$ con $f \in L^1 \cap L^\infty$ Se $f \in L^1 \cap L^\infty$ allora $\nabla V[f]$ è continuo e limitato. Inoltre*
$$\nabla V[f] = \nabla G * f$$

Dimostrazione. Mi limito a dimostrare limitatezza e continuità di $\nabla G * f$. La prova che coincide con $\nabla V[f]$ la lascio al lettore.
Si ha che $|\nabla G(\mathbf{x})| \leq c/|\mathbf{x}|^2$ che è sommabile. Operando come nella dimostrazione del teorema precedente, si ottiene sia la stima uniforme che la continuità. In questo caso,
$$\|\nabla G * f\|_\infty \leq c\|f\|_1^{1/3}\|f\|_\infty^{2/3}$$
□

Teorema 14.13. *Regolarità di $\nabla V[f]$ con $f \in L^1 \cap L^\infty$*
Se $f \in L^1 \cap L^\infty$ allora $\nabla V[f]$ è "quasi lipschitziano", cioè
$$|\nabla V[f](\mathbf{x}) - \nabla V[f](\mathbf{y})| \leq c\varphi(|\mathbf{x} - \ vey|)$$
dove
$$\varphi(r) = \begin{cases} r|\ln(r/e)| & \textit{se } r \in [0,1] \\ 1 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$
Non dimostro questo risultato più sottile, ma rimando al testo: Carlo Marchioro, Mario Pulvirenti **Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids** ISBN 978-1-4612-4284-0, Springer. Questa proprietà è infatti essenziale per dimostrare l'esistenza e unicità delle soluzioni dell'equazione di Eulero per i fluidi incomprimibili non viscosi in dimensione 2.

Teorema 14.14. *Regolarità di $V[f]$ con $f \in C^\alpha$*
Se f sommabile e limitata è in C^α, con $\alpha \in (0,1)$, allora $V[f]$ è una funzione $C^{2+\alpha'}$, $\forall\alpha' < \alpha$.

Dimostrazione. Calcolo le derivate prime di G:

$$\nabla G(x) = -\frac{1}{4\pi}\frac{x}{|x|^3} \quad \text{cioè} \quad \partial_i G(x) = -\frac{1}{4\pi}\frac{x_i}{|x|^3} \tag{14.3}$$

e calcolo le derivate seconde:

$$\partial^2_{ij} G(x) = -\frac{1}{4\pi}\,\partial_j \frac{x_i}{|x|^3} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\delta_{ij}}{|x|^3} - 3\frac{x_i x_j}{|x|^5}\right) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\delta_{ij}|x|^2 - 3x_i x_j}{|x|^5} \tag{14.4}$$

In notazione matriciale

$$\partial^2 G(x) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\mathbf{I}|x|^2 - 3x\otimes x}{|x|^5}$$

Si osservi che $\partial^2 G$ ha traccia nulla, cioè $\triangle G = 0$ per $x \neq 0$. È importante notare che G diverge come $1/|x|$, che è una singolarità sommabile intorno a 0, ∇G diverge come $1/|x|^2$, sommabile intorno a 0, mentre $\partial^2 G$ diverge come $1/|x|^3$, che non è sommabile intorno a 0. D'altra parte, per ogni $r > 0$,

$$\int_{|x|=r} \frac{\delta_{ij}|x|^2 - 3x_i x_j}{|x|^5}\sigma(\mathrm{d}x) = \frac{1}{r}\int_{|z|=1} (\delta_{ij} - 3z_i z_j)\sigma(\mathrm{d}z) = 0$$

(ricordo che se $|x| = r$ e $z = x/|x|$, $\sigma(\mathrm{d}x) = r^2\sigma(\mathrm{d}z)$). Infatti, se $i \neq j$ il primo termine è nullo, e il secondo è dispari in x_i e dunque ha integrale nullo. Se invece $j = j$, a meno di $1/r$ il primo termine dà 4π, il secondo, a meno di $1/r$, è

$$-3\int_{|z|=1} z_i^2\sigma(\mathrm{d}z) = -3\frac{1}{3}\int_{|z|=1} (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)\sigma(\mathrm{d}z) = -4\pi$$

e dunque la somma è nulla.

Calcolo ora le derivate distribuzionali di $G * f$. Sia $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$

$$\int \partial_{ij}\phi(x)(G*f)(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int \mathrm{d}y f(y)\int_{|x-y|>\varepsilon} G(x-y)\,\partial_{ij}\phi(x)\,\mathrm{d}x.$$

L'integrale in $\mathrm{d}x$ può essere riscritto come

$$\int_{|x-y|>\varepsilon} G(x-y)\,\partial_{ij}\phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{|x-y|>\varepsilon} \partial_j(G(x-y)\,\partial_i\phi(x))\,\mathrm{d}x - \int_{|x-y|>\varepsilon} \partial_j G(x-y)\,\partial_i\phi(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$\int_{|x-y|>\varepsilon} \partial_j(G(x-y)\,\partial_i\phi(x))\,\mathrm{d}x - \int_{|x-y|>\varepsilon} \partial_i(\partial_j G(x-y)\phi(x))\,\mathrm{d}x + \int_{|x-y|>\varepsilon} \partial_{ij}G(x-y)\phi(x)\,\mathrm{d}x$$

I primi due integrali sono termini di bordo. Analizzo il primo.

$$\int_{|x-y|>\varepsilon} \partial_j(G(x-y)\,\partial_i\phi(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{|x-y|=\varepsilon} n_j\,\partial_i\phi(x)\,\mathrm{d}x$$

dove $n_j = (x_j - y_j)/|x-y|$ è la componente j della normale esterna (notare il cambio di segno dovuto all'uso della normale esterna alla sfera, che è opposta alla normale esterna al dominio $|x-y| > \varepsilon$). Questo termine va a 0 perché l'integrale è stimato da $4\pi\varepsilon^2\|\nabla\phi\|_\infty$.

Il secondo termine di bordo non è invece infinitesimo:

$$-\int_{|x-y|>\varepsilon} \partial_j(G(x-y)\,\partial_i\phi(x))\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_{|x-y|=\varepsilon} n_i n_j \phi(x)\sigma(\mathrm{d}x) =$$
$$-\frac{\phi(x)}{4\pi\varepsilon^2}\int_{|z|=\varepsilon} n_i n_j \sigma(\mathrm{d}x) - \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_{|x-y|=\varepsilon} n_i n_j (\phi(x)-\phi(y))\sigma(\mathrm{d}x)$$

Il secondo termine tende a 0 perché $|\phi(x)-\phi(y)| \le c\varepsilon$ e dunque l'integrale è stimato da $c\varepsilon^3$. Il primo si calcola esplicitamente, notando che l'integrale di $n_i n_j$ è $\delta_{ij}/3$ per la misura della buccia sferica. In conclusione, il secondo termine di bordo dà

$$-\frac{\delta_{ij}}{3}\phi(y).$$

L'ultimo termine integrale ha limite non nullo.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|<\varepsilon} \partial_{ij}G(x-y)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{|x-y|\ge 1} \partial_{ij}G(x-y)\phi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{|x-y|<1} \partial_{ij}G(x-y)(\phi(x)-\phi(y))\,\mathrm{d}x$$

dove ho potuto sottrarre $\partial_{ij}G(x-y)\phi(y)$ perché ha integrale nullo in dy nella palla $\{|x-y|<1\}$ L'integrando del secondo termine è sommabile, perché

$$|\,\partial_{ij}G(x-y)(\phi(x)-\phi(y))| \le \frac{c\|\nabla\phi\|_\infty}{|x-y|^2}$$

In conclusione

$$\int \partial\phi(G*f) = -\frac{\mathbf{I}}{3}\int \phi(x)f(x)\,\mathrm{d}x + \int \mathrm{d}y f(y)\int \mathrm{d}x\,\partial^2 G(x-y)\phi(y)$$

dove l'ultimo integrale va inteso nel senso del suo valore principale, cioè come $\lim_{\varepsilon\to 0}$ degli integrali su $|x-y|>\varepsilon$.

Mostriamo ora come possiamo invertire l'ordine di integrazione, se $f \in C^\alpha$:

$$\int \partial^2\phi(x)(G*f)(x) = -\frac{\mathbf{I}}{3}\int \phi(y)f(y)\,\mathrm{d}y + \lim_{\varepsilon\to 0}\int \mathrm{d}x\phi(x)\int_{|x-y|>\varepsilon} \partial^2 G(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Il limite dell'integrale in dy nel secondo termine può essere riscritto come

$$\int_{|x-y|>1} \partial^2 G(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y + \int_{|x-y|<1} \partial^2 G(x-y)(f(y)-f(x))\,\mathrm{d}y$$

e il secondo integrale esiste finito perché, per l'hölderianità di f, l'integrando è limitato da

$$c\frac{|x-y|^\alpha}{|x-y|^3}$$

che è sommabile intorno a 0. Dunque le derivate esistono in senso classico e

$$\partial^2 G * f(x) = -\frac{1}{3}\,\mathbf{I}f(x) + \int \partial^2 G(x-y)f(y)$$

dove l'integrale va inteso nel senso del suo valore principale (cioè del limite su $|x-y|>\varepsilon$).

Concludo mostrando che l'integrale è hölderiano in x. Spezzo di nuovo l'integrale su $|x-y| > 1$ (che è regolare in x) e su $|x-y| < 1$, dove sottraggo come sopra $f(x)$. Questo secondo integrale è

$$\int_{|x-y|<1} \partial^2 G(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{|z|<1} \partial^2 G(z) f(x+z)\,\mathrm{d}z$$

La differenza tra il valore in x e in $\bar{x}$ di questo integrale è data da

$$\int_{|z|\le 1} \partial^2 G(x) \delta f$$

dove

$$\delta f = f(x+z) - f(x) - (f(\bar{x}+z) - f(\bar{z})$$

Per hölderianità:

$$|\delta f| \le c|z|^\alpha \quad \text{e} \quad |\delta f| \le c|x-\bar{x}|^\alpha$$

Ma allora, scelto $\gamma \in (0,1)$

$$|\delta f| = |\delta f|^\gamma |\delta f|^{1-\gamma} \le c|x-\bar{x}|^{\alpha(1-\gamma)} |z|^{\alpha\gamma}$$

Quindi:

$$\left| \int_{|z|\le 1} \partial^2 G(x) \delta f \right| \le c|x-\bar{x}|^{\alpha(1-\gamma)} \int_{|z|<1} |z|^{-(3-\alpha\gamma)}\,\mathrm{d}z \le c|x-\bar{x}|^{\alpha(1-\gamma)}$$

Poiché vale per ogni $\gamma \in (0,1)$, si ha l'hölderianità per ogni $\alpha' < \alpha$. Gli altri termini di $\partial^2(G * f)$ hanno invece la stessa regolarità di f, dunque in conclusione $G * f$ è in $C^{\alpha'}$ per ogni $\alpha' < \alpha$. Lascio come esercizio di analisi la dimostrazione che se le derivate parziali distribuzionali di una distribuzione F sono funzioni continue, allora F è una funzione C^1 e le derivate sono distribuzionali sono derivate in senso classico.
Noto, infine, che il laplaciano di $G * f$ è la traccia della matrice delle derivate seconde, e, poiché $\partial^2 G$ ha traccia nulla, si ottiene

$$\triangle(G * f) = -\frac{1}{3} 3 f(x) = -f(x)$$

$\square$

14.8 Appendice: unicità per il problema di Laplace-Neumann esterno

Ho provato l'unicità delle soluzioni per il problema di Laplace-Neumann nella classe di quelle ottenute come potenziale di strato singolo.

Questo argomento può essere generalizzato a tutte le soluzioni del problema di Laplace-Neumann, che tendono a 0 all'infinito. Infatti, se u è soluzione

$$0 = \int_{B_R \setminus \Omega} \triangle u = \int_{\partial B_R} \partial_n u(x) \sigma(\mathrm{d}x)$$

(sul bordo di Ω l'integrale è nullo perché stiamo considerando soluzioni con condizioni di Neumann omogenee al bordo). Sia ora $\tilde{u}$ una funzione che coincide con u su B_R^c e prolungata C^∞ dentro B_R. Sia f il suo laplaciano, che ha supporto compatto. $\tilde{u}$ soddisfa

$$\triangle \tilde{u} = f$$

inoltre $\partial_n u = 0$ su ∂B_r. Integrando in B_r si ottiene che $\int_{B_R} f = \int_{\partial B_R} \partial_n \tilde{u} = 0$. Sia ora $v = -G * f$. La differenza tra $\tilde{u}$ e v è una funzione armonica su R^n. Per costruzione, in ogni dimensione maggiore o uguale a 2, v tende a 0 all'infinito (la funzione di Green non tende a zero in due dimensioni, ma la carica totale è nulla, dunque la convoluzione tende a 0; si noti che in dimensione uno, se la carica totale è nulla, l'energia potenziale tende a costante, non necessariamente nulla). Poiché $\tilde{u}$ coincide con u fuori da B_R, e ho assunto che u tende a 0 all'infinito, per il teorema di Liouville la differenza $v - \tilde{u}$ è zero, perché è una funzione armonica che tende a zero all'infinito (dimostrare per esercizio a partire dal teorema di Liouville). Quindi $\tilde{u} = G * f$, con f a integrale nullo, dunque u tende a 0 all'infinito come $1/|x|^{n-1}$, e il suo gradiente come $1/|x|^n$.
Posso ora calcolare

$$\int_{B_R \Omega} |\nabla u|^2 = \int_{\partial B_R} u \, \partial_n u = O(R^{n-1}/R^{(n+n-1)})$$

che tende a 0, dunque u è costante, ma tendendo a 0 all'infinito, u è nulla.

Naturalmente non c'è unicità nella classe delle funzioni limitate, perché le costanti risolvono il problema.