IFM - foglio esercizi 11 - 2018-05-26

Questi esercizi sono quelli che ho fatto già a lezione, più quelli che vi ho lasciato da fare.

Ricordo che il valore atteso di un osservabile A, dove A è un operatore simmetrico, su uno stato Ψ, con $\|\Psi\|^2 = 1$, è il numero reale

$$\langle A \rangle = (\Psi, A\psi).$$

La dinamica è data dall'equazione di Schrödinger

$$\mathrm{i}\hbar\, \partial_t \Psi = H\Psi$$

dove

$$H = \frac{1}{2}\mathbf{P}^2 + V, \quad \text{con } \mathbf{P} = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\partial_x$$

(∂_x è il gradiente rispetto a x).

Ricordo inoltre che il valore attesto obbedisce all'equazione

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle A \rangle = \langle [A, H] \rangle$$

dove $[A, H] = AH - HA$ è il commutatore.

Esercizio 1. Pacchetto d'onda gaussiano

Un pacchetto d'onda è una funzione d'onda ben concentrata in posizione e impulso, dunque con un prodotto $\sigma_x \sigma_p$ vicino al minimo teorico descritto dal principio di indeterminazione.
Sia

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

Verifica che $\int f = 1$ e che $\int x^2 f = \sigma^2$.
Sia $\Psi_\sigma = \sqrt{f}$. Mostra che $< P >$ è nullo (Ψ è reale), e che

$$< P^2 >= \hbar^2/(4\sigma^2)$$

(dunque questo stato realizza il minimo prodotto tra σ_x e σ_p predetto dal principio di indeterminazione).
Costruisci lo stato Ψ_{σ,x_0,p_0} con

$$\begin{aligned} &\sigma_x^2 = \sigma^2 \\ &\sigma_x \sigma_p = \hbar/2 \\ &\langle X \rangle = x_0 \\ &\langle P \rangle = p_0 \end{aligned}$$

Mostra che per $\sigma \to 0$, $|\Psi(\sigma, x_0, p_0)|^2 \to \delta(x - x_0)$ mentre $|\hat{\Psi}(\sigma, x_0, p_0)|^2 \to 0$ (ovviamente in senso debole). Al contrario, se $\sigma \to +\infty$

$$|\Psi(\sigma, x_0, p_0)|^2 \to 0$$

mentre

$$|\hat{\Psi}(\sigma, x_0, p_0)(k)|^2 \to \delta(\hbar k - p_0)$$

Esercizio 2. Proprietà dispersive del flusso libero

In meccanica si chiama flusso libero l'evoluzione in assenza di forze (nella lagrangiana e nell'hamiltoniana c'è solo il termine di energia cinetica). Si consideri in una dimensione il flusso di operatore hamiltoniano $H = P^2/(2m)$. Usando solo l'espressione dei commutatori tra X, P, H e le loro potenze, mostrare che

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle P\rangle = 0$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle P^2\rangle = 0$
- $m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle X\rangle = \langle P\rangle$
- $m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle X^2\rangle = \langle XP + PX\rangle$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle (XP + PX)\rangle = 2\langle P^2\rangle/m$

Definendo

$$\sigma_p^2(t) = (\Psi(t), P^2\Psi(t)) - (\Psi(t), P\Psi(t))^2$$

e

$$\sigma_x^2(t) = (\Psi(t), X^2\Psi(t)) - (\Psi(t), X\Psi(t))^2$$

mostrare che

$$\sigma_p^2(t) = \sigma_p^2(0)$$

mentre

$$\sigma_x^2(t) = \sigma_x^2(0) + \frac{t}{m}c + \frac{t^2}{m^2}\sigma_p^2(0)$$

dove la costante c è il valore di

$$\langle XP + PX\rangle - 2\langle X\rangle\langle P\rangle$$

al tempo $t = 0$

Il senso di questo esercizio è mostrare che la dinamica quantistica libera "disperde" la densità di probabilità della posizione della particella (mentre la distribuzione in impulso rimane invariata).

Esercizio 3. Particella libera

Scrivere l'equazione di Schröedinger per la particella libera (cioè per $V = 0$), in trasformata di Fourier e risolverla per un generico dato $\hat{\Psi}_0(\lambda)$ in L^2.
Mostrare che $|\hat{\Psi}(\lambda, t)|^2$ è costante in t, dunque la distribuzione in impulso non cambia nel tempo.
Non è troppo difficile scrivere anche la soluzione in coordinate cartesiane (si veda il capitolo 6 delle dispense di Teta, o gli appunti di Pulvirenti).

Esercizio 4. Buca di potenziale infinita

La buca di potenziale infinita è un modello in cui una particella quantistica è intrappolata in un intervallo, ipotizzando che il potenziale sia nullo nell'intervallo e infinito altrove.
Poiché $|\Psi|^2$ deve essere nulla al di fuori dell'intervallo, per continuità si assume che sia nulla agli estremi dell'intervallo.
Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} i\hbar\Psi = \dfrac{1}{2m}P^2\Psi \quad \text{per } x \in (0, \pi) \\ \Psi(0, t) = 0 \\ \Psi(\pi, t) = 0 \\ \Psi(x, 0) = \Psi_0 \end{cases}$$

Procedimento. Si trovino prima le autofunzioni di H con le condizioni al bordo assegnate. Si ricordi che

$$\partial_x^2 \sin(kx) = -k^2 \sin(kx)$$

e che $\sin(kx)$, per $k = 1, \ldots$, è un sistema ortogonale completo il $L^2((0,\pi))$, e dunque

$$\Phi_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx)$$

sono stati stazionari con

$$H\Phi_k = E_k \Phi_k$$

con

$$E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Si chiama stato fontamentale quello a energia minima, in questo caso è Φ_1.

Sia ora $\Psi_0 = \sum_{k \geq 1} c_k \Phi_k$, con $c_k = (\Phi_k, \Psi_0)$. Si mostri che la soluzione è data da

$$\Psi(t) = \sum_{k \geq 1} c_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i} E_k t/\hbar} \Phi_k$$

Si noti che $\sum_k |c_k|^2 = 1$ e dunque $|c_k|^2$ si interpreta come la probabilità di trovare lo stato con energia E_k. Al variare del tempo, i coefficienti c_k vengono moltiplicati per una fase, che ha modulo 1, dunque la distrbuzione di probabilità dei possibili livelli di energia non cambia nel tempo.

Infine, mostra che nel limite $k \to +\infty$, $|\Phi_k|^2$ tende alla densità costante $1/\pi$, cioè la particella si distribuisce uniformemente nello spazio.