IFM - foglio esercizi 10 rev - 2018-05-26

Esercizi su operatori in meccanica quantistica. Versione revisionata (ho aggiunto qualche dettaglio). In prima approssimazione si possono saltare gli esercizi asteriscati.

Ricordo che il valore atteso di un osservabile A, dove A è un operatore simmetrico, su uno stato Ψ, con $\|\Psi\|^2 = 1$, è il numero reale

$$\langle A \rangle = (\Psi, A\psi).$$

La dinamica è data dall'equazione di Schrödinger

$$\mathrm{i}\hbar\, \partial_t \Psi = H\Psi$$

dove

$$H = \frac{1}{2}\mathbf{P}^2 + V, \quad \text{con } \mathbf{P} = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\partial_x$$

(∂_x è il gradiente rispetto a x).

Ricordo inoltre che il valore attesto obbedisce all'equazione

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle A \rangle = \langle [A, H] \rangle$$

dove $[A, H] = AH - HA$ è il commutatore.

Esercizio 1. Operatori posizione e impulso

L'operatore posizione è l'operatore (vettoriale) $\mathbf{X}$ le cui componenti sono gli operatori di moltiplicazione per le componenti di $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$: $\mathbf{X}_j\Psi = x_j\Psi(\mathbf{x})$. L'operatore impulso è l'operatore di derivazione

$$\mathbf{P} = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\partial_{\mathbf{x}}$$

dove $\partial_{\mathbf{x}}$ è il gradiente rispetto a $\mathbf{x}$. Mostrare che per ogni $n = 1, 2, 3$, gli operatori X_n, P_n sono simmetrici. Mostrare che valgono le sequenti relazioni

$$\begin{aligned}
&[X_n, X_m] = 0 \\
&[P_n, P_m] = 0 \\
&[X_n, P_m] = \delta_{nm}\mathrm{i}\hbar
\end{aligned}$$

Esercizio 2. Hamiltoniano, posizione, impulso

Mostrare che $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$.

Calcolare $[X, P^2]$.

In una sola dimensione, sia dato l'operatore hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2}P^2 + V$$

dove $P = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\partial_x$ è l'operatore impulso, e con V indico l'operatore di moltiplicazione per l'energia potenziale $V(x)$.
Mostrare che

$$[X, H] = \mathrm{i}\hbar P$$

e che

$$[P,H]=[P,V]=\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\partial_x V$$

Esercizio 3. Quantità conservate

Mostra che se A è simmetrico, $\langle A\rangle=(\Psi,A\Psi)$ è reale per ogni Ψ.
Mostra che se A e B sono operatori simmetrici, $\frac{1}{\hbar\mathrm{i}}[A,B]$ è un operatore simmetrico.
Nota che $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}<A>=0$ per ogni Ψ, se e solo se $[A,H]=0$. Quindi A commuta con H se e solo se A è "conservato" dal flusso.
Mostra che se A e B commutano con H, allora anche $[A,B]$ commuta con H.

Esercizio 4. Stati stazionari

Gli autostati dell'operatore hamiltoniano sono stati stazionari. Mostra, infatti, che se

$$H\Psi=E\Psi$$

allora per ogni operatore simmetrico A,

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle A\rangle=\langle[A,H]\rangle=0$$

Usa questo fatto per dedurre che non solo $\langle X\rangle$ e $\langle P\rangle$ non dipendono dal tempo, ma che vale anche $\langle[X,H]\rangle=0$ e $\langle[P,H]\rangle=0$. Usando l'espressione dei commutatori, mostra che se Ψ è un autostato dell'hamiltoniano, allora

$$-\langle\partial_x V\rangle=0\quad\text{cioè la forza media è nulla}$$

e che

$$\langle P\rangle=0\quad\text{cioé la particella è “ferma”}$$

Ricorda però che l'enegia della particella è non nulla, infatti se $H\Psi=E\Psi$, allora $\langle H\rangle=E$.

Esercizio 5.

Mostra che se Ψ è reale, allora $<P>=0$.
Mostra che se $\hat{\Psi}$ è dispari, allora $<P>=0$.
Mostra che se $\hat{\Psi}$ è pari, allora $<P>=0$.

Esercizio 6. Operatore parità

Sia Π l'operatore che associa a Ψ la funzione $\Psi(-x)$. Sia $V(x)$ una energia potenziale pari rispetto a x. Mostra che Π communta con l'hamiltoniana.
Deduci che gli autostati dell'hamiltoniana sono funzioni pari o dispari.

Prova che

$$[\Pi,P]=2\Pi P,\quad\text{e}\quad[\Pi,X]=-2X\Pi$$

Esercizio 7. * Momento angolare classico

Sia $\ell=\mathbf{q}\wedge\mathbf{p}$ il momento della quantità di moto. Mostrare che per le parentesi di Poisson in meccanica classica vale

$$\{\ell_n,\ell_m\}=\epsilon_{n,m,k}\ell_k$$

dove si sottoindente la somma su k (è la regola di Einstein: se in una formula compare un indice due volte, allora l'espressione va sommata per sui valori dell'indice) e $\epsilon_{n,m,k}$ è il "simbolo di Levi-Civita" per il tensore completamente antisimmetrico

$$\epsilon_{n,m,k} = \begin{cases} 0 & \text{se } (n,m,k) \text{ non è una permutazione di } (1,2,3) \\ 1 & \text{se } (n,m,k) \text{ è una permutazione pari di } (1,2,3) \\ -1 & \text{se } (n,m,k) \text{ è una permutazione dispari di } (1,2,3) \end{cases}$$

Esercizio 8. * Il vettore di Laplace-Runge-Lenz

Il moto centrale kepleriano ha ulteriori integrali primi indipendenti, il che spiega perché il moto abbia una sola frequenza.
Sia $H = \frac{1}{2}P^2 - k/|\mathbf{x}|$, e si consideri il vettore di Laplace-Runge-Lenz

$$\mathbf{u} = \mathbf{p} \wedge \ell - k\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$$

Si mostri che per ogni componente

$$\{u_n, H\} = 0$$

cioè $\mathbf{u}$ è un vettore conservato, tanto quanto ℓ.
Si mostri che

$$\{u_n, \ell_m\} = \epsilon_{n,m,k} u_k$$

e che

$$\{u_n, u_m\} = -2H\epsilon_{n,m,k}\ell_k$$

Esercizio 9. *

Si può provare che un sistema integrabile a n gradi di libertà ammette la massimo n integrali primi indipendenti in involuzione.
Lo si dimostri nel seguente modo. Siano f_i, con $i = 1,\dots n$ sono integrali primi in involuzione, e se g è un ulteriore integrale primo in involuzione con gli altri, usando f_i come nuovi impulsi e β_i come nuove coordinate, si ha

$$0 = \{g, f_i\}_{\boldsymbol{\beta},\mathbf{f}} = \partial_{\beta_i} g$$

dunque. . . .

Si provi inoltre che se f_i sono n integrali primi indipendenti in involuzione, e se $w = w(f_1,\dots f_n)$, allora

$$\{w, f_i\} = 0$$

Si noti che il moto centrale ha H, ℓ^2 e ℓ_3 come integrali primi indipendenti in involuzione. Ricordando le regole di commutazione per il vettore $\mathbf{u}$ di Lapalce-Runge-Lenz, se ne deduca che u_i è indipendente da H, ℓ^2, ℓ_3.

Esercizio 10. Momento angolare

L'operatore momento della quantità di moto è

$$\mathbf{L} = \mathbf{X} \wedge \mathbf{P}$$

Scrivere per componenti l'operatore. Mostrare che

$$[L_n, L_m] = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{n,m,k} L_k$$

Mostrare che

$$[L_n, P_m] = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{n,m,k} P_k$$