

IFM - foglio esercizi 9 - 2018-05-21

Esercizi su Hamilton-Jacobi e variabili azione-angolo.

Esercizio 1. Moto piano in un campo di dipolo

In \mathbb{R}^3 , il potenziale di dipolo, con il dipolo orientato lungo il versore \mathbf{n} , è, a meno di costanti,

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{1}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}$$

Si noti che questo potenziale decade come $1/|\mathbf{x}|^2$, più rapidamente del potenziale coulombiano.

Nel caso $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$, versore dell'asse orizzontale, considera i moti ristretti al piano (x_1, x_2) .

- Scrivi la lagrangiana per una particella di massa unitaria
- Scrivi la lagrangiana in coordinate polari
- Scrivi la corrispondente hamiltoniana
- Porta il moto alle quadrature risolvendo l'equazione di HJ, individuando gli opportuni integrali primi
- Discuti qualitativamente il moto al variare del valore degli integrali primi.

Esercizio 2. Moto in un campo di dipolo

Sia

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{1}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_3$$

dove \mathbf{e}_3 è il versore dell'asse verticale.

Scrivi la lagrangiana in coordinate sferiche, scrivi la corrispondente hamiltoniana e discuti l'integrabilità del moto.

Esercizio 3.

Considera l'hamiltoniana: $H = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}x^2(p_\phi^2 - \cos \phi)$.

- Risolvi l'equazione di H.J. per separazione di variabili, e riduci il moto alle quadrature, cercando $W = A(x, \alpha, \beta) + B(\phi, \alpha, \beta)$ (α, β saranno i nuovi impulsi)
- Determina la regione dello spazio delle fasi in cui il moto si può descrivere in variabili azione-angolo.
- In questa regione scrivi un'espressione (anche implicita) per le frequenze dei moti quasi periodici.

(soluzione su <http://brazil.mat.uniroma1.it/dario/meccanica/esercizi4.pdf> a pagina 11)

Esercizio 4.

Considera l'Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2}P_x^2 + \frac{1}{2}P_y^2(1+x^2) + \frac{1}{2}(1+x^2)y^2.$$

- Risolvi, per separazione di variabili, l'equazione di Hamilton Jacobi per H .

- b) Determina la regione dello spazio delle fasi in cui il moto può essere descritto in variabili azione-angolo.
- c) Calcola esplicitamente l'espressione dell'Hamiltoniana in termini delle variabili d'azione, e le frequenze dei moti multiperiodici.
- d) Considera il moto di dato iniziale

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 & y(0) &= 0 \\ P_x(0) &= a & P_y(0) &= 1, \end{aligned}$$

con $a \in \mathbb{R}$; trova i valori di a per cui è periodico.

- e) Trova il periodo del moto per $a = 1$.
- f) Discuti la stabilità della soluzione stazionaria

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 & y(0) &= 0 \\ P_x(0) &= 0 & P_y(0) &= 0. \end{aligned}$$

trovando la soluzione dell'equazione del moto.

(soluzione su <http://brazil.mat.uniroma1.it/dario/meccanica/esercizi4.pdf> a pagina 11)

Esercizio 5. Vortici

Il moto di una particella di fluido nel campo generato da un vortice piano posto nell'origine è un moto hamiltoniano di hamiltoniana (a meno di costanti)

$$H(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

(si noti che pur essendo (x, y) coordinate nel piano, nell'hamiltoniana y gioca il ruolo di impulso). Si determini la variabile di azione per il moto, e il periodo del moto di energia E .