IFM - foglio esercizi 8 - 2018-05-13

Esercizi su hamiltoniane e trasformazioni canoniche

Esercizio 1. Lagrangiane con termini lineari nelle velocità

Sia $L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 - V(\mathbf{x})$. Considera la trasformazione di coordinate dipendente dal tempo $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{q}, t)$. Mostra che la lagrangiana nelle nuove variabili è della forma

$$\frac{1}{2}T(\mathbf{q}, t)\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{b}(\mathbf{q}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}} - U(\mathbf{q}, t)$$

Supponi che il vettore $\mathbf{b}$ e il potenziale U non dipendano esplicitamente dal tempo. Determina l'energia generalizzata.

Scrivi l'hamiltoniana nelle variabili $\mathbf{q}$ e $\mathbf{p}$.

Esercizio 2. Particella carica

La lagrangiana per il moto di una particella di massa m e carica e, in un campo elettromagnetico di potenziale $V(\mathbf{x}, t)$ e di potenziale vettore $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ è

$$L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{x}} - eV(\mathbf{x}, t) \tag{1}$$

dove c è la velocità della luce. Verifica che le equazioni del moto sono

$$m\ddot{\mathbf{x}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{B}$$

dove $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ è il campo elettromagnetico $\wedge$ è il prodotto vettoriale, c è la velocità della luce, e $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$, $\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{1}{c}\,\partial_t \mathbf{A}$.

Scrivi l'hamiltoniana per il moto della particella carica.

Esercizio 3. Sistemi hamiltoniani in dimensione 2

Il sistema differenziale in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

è hamiltoniano se e solo se esiste H tale che $\partial_y H = f$ e $\partial_x H = -g$ (scambiare il ruolo di x e y equivale a cambiare il segno di H).
Mostrare che il sistema è hamiltoniano se e solo se il campo (f, g) ha divergenza nulla. (Questa equivalenza è vera solo in dimensione 2).

Esercizio 4.

Considera la trasformazione

$$\begin{aligned} Q &= \log\left(\tfrac{1}{q}\sin p\right) \\ P &= q\ \operatorname{ctg} p \end{aligned}$$

Dove è definita? Qual è l'inversa? È canonica?

Esercizio 5.

Considera la trasformazione

$$
\begin{aligned}
Q &= 2a \log p + \log q \\
P &= -p^b q \log q
\end{aligned}
$$

Trova per quali valori di a e b è canonica. Considera l'hamiltoniana $H = \frac{1}{2}p^2q^2(\log q)^2$, e il dato iniziale $(q(0), p(0)) = (e, \frac{1}{e})$. Trova la soluzione delle equazioni del moto utilizzando la trasformazione canonica trovata.

Esercizio 6.

Verificare la canonicità di:

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= q_1 q_2 \\
Q_2 &= q_1 + q_2 \\
P_1 &= \tfrac{p_1 - p_2}{q_2 - q_1} + 1 \\
P_2 &= \tfrac{q_2 p_2 - q_1 p_1}{q_2 - q_1} - (q_2 + q_1).
\end{aligned}
$$

Esercizio 7.

Trovare i valori dei parametri per cui la trasformazione seguente è canonica, costruendo la funzione generatrice di tipo $F = F(q, Q)$:

$$
\begin{aligned}
Q &= \sqrt{p} e^{aq} \\
P &= -p^b e^q;
\end{aligned}
$$

Esercizio 8.

Risolvere le equazioni di Hamilton per l'hamiltoniana $H = -\frac{pq}{2t} \log\left(\frac{p}{2q}\right)$, utilizzando la trasformazione canonica generata da $F(q, Q, t) = q^2 e^{Qt}$.

Esercizio 9.

Trovare *tutte* le relazioni che definiscono una trasfomazione canonica, assegnata una funzione di qualunque combinazione delle variabili; quante sono per un sistema a n gradi di libertà? Ad esmpio, usa come variabili indipendenti (q, P), (P, q), (p, P), e, a due gradi di libertà (q_1, P_1, p_2, Q_2).

Esercizio 10.

Determinare una trasformazione canonica tra quelle generate da $F = \alpha q^a Q^b$, che trasformi l'hamiltoniana $H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q^2} + p^2 q^4\right)$ nell'hamiltoniana di un oscillatore armonico.

Esercizio 11.

Studiare il moto del sistema di Hamiltoniana

$$
H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{1}{2m}(p_2 - kq_1)^2,
$$

mediante la trasformazione canonica generata da $F = kq_1Q_2 - p_2Q_2 + p_2P_1$.

Esercizio 12.

Determinare il moto del sistema di Lagrangiana

$$
L = q\dot{q}^2, \tag{2}
$$

passando all'hamiltoniana e utilizzando la trasformazione canonica generata da $F(p, Q) = -\frac{p^3}{12Q}$.