IFM - foglio esercizi 7 - 2018-04-13

Esercizi vari con suggerimenti.

Esercizio 1.

Considera il funzionale lineare

$$Lf = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x) \, \mathrm{d}x$$

Poiché $1/\sqrt{x}$ non è il L^2, questo funzionale non è continuo, anche se è definibile su un sottoinsieme denso.

- Prova che è ben definito sulle funzioni a supporto in $[\varepsilon, 1]$, con $\varepsilon > 0$:
- Prova che è ben definito sulle funzioni C^α, con $f(0) = 0$, e $\alpha > 0$.
- Prova che è illimitato, considerando la seccesione di funzioni $f_\delta(x) = \mathcal{X}\{x \in (\delta, 0)\}$; mostra cioè che nel limite $\delta \to 0$

  $$|Lf_\delta| / \|f_\delta\| \to +\infty$$

- Considera l'operatore lineare definito da

  $$Tf(x) = \int_0^1 \frac{|x-y|}{y^\alpha} f(y) \, \mathrm{d}y$$

  Mostra che è illimitato se $\alpha \geq 1/2$

Esercizio 2.

Dato $\alpha > 0$, sia M_α il funzionale moltiplicativo in $L^2(\mathbb{R})$ definito da

$$M_\alpha f(x) = \frac{1}{1+\alpha x^2} f(x)$$

- Mostra che M_α e autoaggiunto e calcola la sua norma
- Mostra che M_α tende fortemente all'operatore identità. Suggerimento: l'operatore $R_\alpha = \mathbf{I} - M_\alpha$ è dato da

  $$R_\alpha f(x) = \frac{\alpha x^2}{1+\alpha x^2} f(x)$$

  dunque

  $$\|R_\alpha f\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\alpha x^2}{1+\alpha x^2} \right)^2 |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$

  L'integrando tende puntualmente a zero, dunque è sufficiente una convergenza dominata per ottenere la tesi...

- Mostra che $\|R_\alpha\|$ non tende a 0.
- Sia T_α l'operatore dato da

  $$T_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(x-y)^2} \frac{1}{1+\alpha y^2} f(y)$$

  Mostra che T_α tende fortemente a T_0. Suggerimento: T_α è la composizione di un operatore di convoluzione limitato e dell'operatore M_α.

- Mostra che T_α non tende in norma a T_0. Suggerimento: la norma dell'operatore R_α è 1, $\|R_\alpha f\|/\|f\|$ è circa 1 se f si concentra in un punto che tende a infinito, per esempio $f_\delta = \mathcal{X}\{x \in (1/\delta, 1/\delta + \delta)\}/\sqrt{\delta}$

Esercizio 3.
Sia T_α su $L^2(\mathbb{R})$ definito da

$$T_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + (x - y - \alpha)^2} f(y) \, \mathrm{d}y$$

Mostrare che è continuo, e che tende debole a 0 per $\alpha \to +\infty$, ma che non tende forte a 0.

Esercizio 4.
Sia T l'operatore in $L^2(\mathbb{R})$ dato da

$$Tf(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} f\left(\frac{x}{2}\right)$$

- Calcola la norma
- Mostra che è un'isometria
- Mostra che è invertibile, in particolare verifica che $T^{-1} = T^*$
- Poiché è unitario, il suo spettro è sul bordo della circonferenza. Mostra che se $|\lambda| = 1$, allora λ non è un autovalore. Suggerimento: se $\frac{1}{\sqrt{2}} f\left(\frac{x}{2}\right) = \lambda f(x)$ allora

  $$f(x) = \lambda \sqrt{2} f(2x)$$

  dunque se f è nota in $(1, 2)$, da questa formula, iterativamente, la colcoli in $(2^{-k-1}, 2^{-k})$. Mostra che la norma L^2 su questi intervalli è costante in k, dunque f non può essere L^2.
- Mostra che se $|\lambda| = 1$, allora λ non è nel risolvente. Suggerimento: prova a risolvere $Tf - \lambda f = b$ per iterazione, mostrando che viene una serie in b, la cui norma è però divergente (con argemnti analoghi a quelli del punto precedente).