IFM - foglio esercizi 6 - 2018-04-06

Esercizi vari.

Esercizio 1.
Trova, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, le soluzioni non banali dell'equazione

$$f(x) - \frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}y(x+y)f(y) = 0$$

con $f \in L^2([-1,1])$.

Esercizio 2.
Discuti al variare di $\alpha > 0$ la continuità e la compattezza dell'operatore integrale

$$T_1 f(x) = \int_0^1 \mathrm{d}y \frac{|y|}{|x-y|^\alpha} f(y)$$

da $L^2([0,1]$ in sé.
Discuti al variare di $\alpha > 0$ la continuità e la compattezza dell'operatore integrale

$$T_2 f(x) = \int_0^1 \mathrm{d}y \frac{|x-y|}{y^\alpha} f(y)$$

da $L^2([0,1]$ in sé.

Esercizio 3.
Sia $T \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}))$ dato da

$$Tf(x) = f(-|x|)$$

Determina la sua norma, il suo aggiunto e lo spettro.

Esercizio 4.
Sia $T \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}))$ dato da

$$Tf(x) = f(x) + f(-x)$$

Determina la sua norma, il suo aggiunto e lo spettro.

Esercizio 5.
Sia T l'operatore continuo da $L^2[-1,1]$ in sé definito da

$$(Tf)(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(y)\,\mathrm{d}y + \frac{3x}{2}\int_{-1}^{1} y f(y)\,\mathrm{d}y$$

a. mostra che è autoaggiunto

b. mostra che è compatto

c. discuti l'invertibilità di $\mathbf{I} - \lambda T$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$

d. mostra che T è un proiettore e caratterizza il sottospazio V su cui proietta

e. sia $T^\perp$ il proiettore su $V^\perp$; $T^\perp$ è compatto?

f. discuti l'invertibilità di $\mathbf{I} - \lambda T^{\perp}$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$

g. sia $g(x) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}x)$, di norma 1, e sia S il proiettore sulla retta per g; per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'operatore $T + \alpha S$ è un proiettore?

Esercizio 6.

Sia T l'operatore continuo da $L^2[-1, 1]$ in sé definito da

$$(Tf)(x) = \int_{-1}^{1} (1 + x^2 y^2) f(y) \, \mathrm{d}y$$

1) mostra che T è autoaggiunto e compatto;

2) trova le autofunzioni di T

3) trova, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, la soluzione di

$$Tf(x) - \lambda f(x) = 1 + x$$

Esercizio 7.

Sia A l'operatore da $\ell_2(\mathbb{C})$ in sé dato da

$$(Af)_k = a_k f_k$$

con $a_k \in \mathbb{C}$ e $|a_k| = 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$

1) Quanto vale $\|A\|$?

2) Sotto quali condizioni per $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ l'operatore A è un operatore autoaggiunto?

3) Sotto quali condizioni per $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ l'operatore A è una isometria?

4) Sotto quali condizioni per la successione $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$l'operatore A è un proiettore?

5) Determina lo spettro puntuale di A.

6) Nel caso $a_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}/(1+k)}$, determina anche lo spettro continuo di A.

Esercizio 8.

Sia data $\{\beta\}_{k \in \mathbb{N}}$, con $\beta_k \neq 0$ per ogni k, e $\lim_k \beta_k = 0$.
Sia T l'operatore da $\ell_2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ in sé definito da

$$\begin{cases} (T\hat{x})_0 = 0, \\ (T\hat{x})_k = \beta_k x_{k-1} \quad \text{per } k > 0 \end{cases}$$

Mostra che è compatto.
Determina T^*.
Mostra che 0 è nello spettro residuo di T (ricorda che per un operatore compatto autoaggiunto 0 può essere autovalore o elemento dello spettro continuo).

Esercizio 9. *

Determina lo spettro di T e di T^* dell'esempio precedente. Nel caso fosse troppo complesso, assumi β_k reale e decrescente (sperando che semplifichi...).