IFM - foglio esercizi 5 - 2018-03-30

Questo foglio di esercizi riguarda gli spettri. Ricordo che per gli operatori compatti autoaggiunti lo spettro è formato dallo spettro puntuale e dallo 0, che può anche essere autovalore. Con * indico esercizi più complessi.

Esercizio 1.
Sia $T \in \mathcal{L}^2(L[0,1])$ l'operatore integrale

$$Tf(x) = \int_0^1 (x+y) f(y)\,\mathrm{d}y$$

Mostra che è di rango finito, che è autoaggiunto, e trovane lo spettro.

Esercizio 2.
Sia $T \in \mathcal{L}^2(L[0,+\infty])$ l'operatore integrale

$$Tf(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mu(x+y)} f(y)\,\mathrm{d}y$$

Mostra che è di rango finito, che è autoaggiunto, e trovane lo spettro.

Esercizio 3. *
Sia $T \in \mathcal{L}^2(L[0,1])$ l'operatore integrale

$$Tf(x) = \int_0^{\pi} (\pi - \max(x,y)) f(y)\,\mathrm{d}y$$

Mostra che è compatto e autoaggiunto. Calcola la derivata seconda di Tf, ipotizzando f regolare, e nota che $Tf(\pi) = 0$ e $(Tf)'(0) = 0$. Dunque $\phi = Tf$ risolve l'equazione $\partial_x^2 \phi = -f$, con $\phi(\pi) = 0$ e $\phi'(0) = 1$. Usando questo fatto, trova esplicitamente lo spettro di T.

Esercizio 4. n. 25 pag. 74 degli appunti

Esercizio 5. *
Sia $T \in \mathcal{L}(\ell_2(\mathbb{N}))$ definito da

$$(T\hat{f})_k = \frac{f_{k+1}}{k+1}$$

Mostra che è continuo e calcolane la norma. Determina T^*. Mostra che T è compatto. Prova a descrivere risolvente e spettro di T e T^*.

Esercizio 6. *
Sia $T \in \mathcal{L}(\ell_2(\mathbb{Z};\mathbb{C}))$ definito da

$$(T\hat{f})_k = \hat{f}_{k+1} + \hat{f}_{k-1} - 2\hat{f}_k$$

Mostra che è limitato e autoaggiunto, ma che non è compatto.
Trova il suo spettro, usando l'isometria con $L^2((-\pi,\pi);\mathbb{C})$ data dalla serie di Fourier:

$$f \to \{\hat{f}_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \quad \text{con } \hat{f}_k = \int_{\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Esercizio 7.

La definizione di risolvente e di spettro si può dare anche per operatori illimitati definiti su sottospazi densi. Considera l'operatore ∂_x^2 definito da $\mathbf{S}_\infty$ in sé ($\mathbf{S}_\infty$ è il sottospazio di $L^2(\mathbb{R})$ delle funzioni a decrescenza rapida). Usando l'isometria data dalla trasformata di Fourier, trova il risolvente e lo spettro.

Esercizio 8.

Sia a reale e positivo, e sia

$$T_a : f(x) \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} f(x)$$

Mostra che T_a è unitario in $L^2((-\pi, \pi); \mathbb{C})$. Determina il suo spettro al variare di a. Mostra che se a è diverso da zero, lo spettro coincide con lo spettro continuo.

Esercizio 9. * teorico

Sia T unitario, cioè $T^* = T^{-1}$. Mostra che lo spettro è contenuto nella circonferenza unitaria di $\mathbb{C}$ (per farlo usa che T e T^{-1} hanno norma uno per provare che il risolvente è fuori dalla circonferenza unitaria).
Mostra che se $|\lambda| = 1$, $Tf = \lambda f$ se e solo se $T^* f = \bar{\lambda} f$.
Mostra che se $\lambda \neq \mu$ sono due autovalori distinti, allora gli autovettori sono ortogonali.
Prova che i kernel di $T - \lambda$ e $T^* - \bar{\lambda}$ coincidono. Come conseguenza, prova che T non ha spettro residuo.
Mostra inoltre che Range $(\lambda \mathbf{I} - T)$ è chiuso se e solo se Range $(\bar{\lambda} \mathbf{I} - T^*)$ è chiuso, dunque sia lo spettro che il risolvente sono invarianti per coniugazione.

Esercizio 10.

La trasformata di Fourier $\mathcal{F}$ è un operatore unitario. Mostra che $\mathcal{F}^2 f(x) = f(-x)$, e dunque che $\mathcal{F}^4 = \mathbf{I}$.
Deduci da questo fatto che i soli autovalori possibili sono ± 1 e $\pm \mathrm{i}$.
Mostra che se $\mathcal{F} f = \pm 1 f$ o $\mathcal{F} f = \pm \mathrm{i} f$ allora f ha una determinata parità, quale?

Esercizio 11.

Considera i seguenti operatori in $L^2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} T_1 f(x) &= f(-x) \\ T_2 f(x) &= \operatorname{sgn}(x) f(x) \\ T_3 f(x) &= f(|x|) \\ T_4 f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} f\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

Mostra se sono autoaggiunti o se sono unitari. Calcola la norma. Trova gli autovettori, lo spettro e il risolvente.

Esercizio 12. teorico

Sia $g(x, y)$ limitata in $[0, 1]^2$ e considera l'operatore integrale di Volterra.

$$Tf(x) = \int_0^x g(x, y) f(y) \, \mathrm{d}y$$

Mostra che è limitato e che è compatto. Trova lo spettro, e deduci che T non può essere autoaggiunto.

Esercizio 13.

Qualche equazione di Volterra è risolubile esplicitamente. Sia

$$f(x) - \lambda \int_0^x \cos(x-y) f(y)\, \mathrm{d}y = \sin x$$

Mostra che

$$f'' - \lambda f' + f = 2 \sin x$$

Trovane la soluzione usando la formula di Duhamel. Più rapidamente, puoi cercare una soluzione particolare come combinazione di $\sin x$ e $\cos x$, in accordo al principio che il sottospazio generato da $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}x}$ è invariante per derivazione (nota però che per $\lambda = 0$ sei in risonanza, e dunque devi cercare la soluzione in un sottospazio invariante più ampio, quello generato da $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}x}$ e $x\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}x}$). Il dato iniziale lo trovi usando l'equazione di partenza e la sua derivata.

Ancora più semplice è la risoluzione dell'equazione

$$f(x) - \lambda \int_0^x e^{x-y} f(f) = g(x)$$

In questo caso è sufficiente derivare una sola volta per ottenere una EDO.

Esercizio 14. *

Sia T autoaggiunto. Prova che $\sigma(T^2) = \{\lambda^2 : \quad \lambda \in \sigma(T)\}$ (la difficoltà è nella parte di spettro non puntuale).