

## IFM - foglio esercizi 4 - 2018-03-30

Questo foglio di esercizi riguarda gli operatori e compattezze.

### Esercizio 1.

Sia  $P$  il proiettore sul sottospazio chiuso  $M$ . Trova il suo spettro.

### Esercizio 2.

Considera la seguente famiglia di operatori in  $L^2(\mathbb{R})$ :

$$A_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\alpha y^2}}{1 + |x - y|^4} f(y) dy$$

Discutine limitatezza e compattezza al variare di  $\alpha \in [0, +\infty)$ . Discuti in quale senso  $A_\alpha$  converge a  $A_0$

Considera la famiglia di operatori

$$A_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\alpha x^2}}{1 + |x - y|^4} f(y) dy$$

Discutine limitatezza e compattezza al variare di  $\alpha \in [0, +\infty)$ .

(riadattamento di esercizio preso dalle dispense di Pulvirenti)

### Esercizio 3.

Considera  $g \in L^2(\mathbb{R})$  e considera la successione

$$g_n(x) = n^\alpha g(nx)$$

Discuti il suo limite per  $n \rightarrow +\infty$  al variare di  $\alpha$ .

Considera la successione di operatori  $T_n \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$  definiti da

$$T_n g(x) = n^\alpha g(nx)$$

Discuti la convergenza di  $T_n$ .

(riadattamento di esercizio preso dalle dispense di Pulvirenti)

### Esercizio 4.

Considera le due successioni di operatori integrali in  $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$

$$A_n f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-n(x-y)^2} f(y) dy$$

$$B_n f(x) = \log n \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + n(x-y)^2} f(y) dy$$

Mostra che sono tutti operatori continui e discuti il loro limite per  $n \rightarrow +\infty$ .

(riadattamento di esercizio preso dalle dispense di Pulvirenti)

### Esercizio 5.

Considera i seguenti insiemi in  $\ell_2(\mathbb{N})$ :

$$B_1 = \{\hat{f} \in \ell_2 : |\hat{f}_k| \leq 1/|k|^2 \forall k\}$$

$$B_2 = \{\hat{f} \in \ell_2 : |\hat{f}_k| \leq 1/\sqrt{|k|} \forall k\}$$

$$B_3 = B_2 \cap \{\hat{f} \in \ell_2 : \|\hat{f}\| \leq 1\}$$

Discuti la loro compattezza.

Sia  $a_k$  una successione positiva monotona crescente e divergente. Discuti la compattezza dell'insieme

$$B_a = \{\hat{f} \in \ell_2 : |\hat{f}_k| \leq 1/a_k \forall k\}$$

(riadattamento di esercizio preso dalle dispense di Pulvirenti)

### Esercizio 6. teorico

Sia  $T$  un funzionale **coercivo**, cioè esiste  $c$  tale che

$$c\|x\| \leq \|Tx\|$$

Prova che:

- $T$  è iniettivo
- Range  $T$  è chiuso.
- $T$  non è compatto (ovviamente se la dimensione dello spazio è infinita)
- se  $T$  è anche autoaggiunto allora  $T$  è invertibile.

### Esercizio 7.

Sia  $T \in \mathcal{L}(\ell_2)$  dato da

$$(T\hat{f})_k = (1 - e^{-k})\hat{f}_k$$

Equivalentemente, considera  $T$  dato da

$$T = \sum_{k \in \mathbb{N}} (1 - e^{-k}) e_k \otimes e_k$$

Mostra che è limitato, trova  $\|T\|$ , trova lo spettro.

Generalizza questo esercizio al caso

$$T = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k e_k \otimes e_k$$

con  $a_k$  limitata e reale. Ci sono differenze nel caso  $a_k$  complessi?

**Esercizio 8. n. 22 pag. 70 degli appunti**

**Esercizio 9. n. 23 pag. 72 degli appunti**

**Esercizio 10. n. 24 pag. 72 degli appunti**