

IFM - foglio esercizi 3 - 2018-03-23

Questo foglio di esercizi riguarda gli operatori, tranne il primo semplice esercizio teorico, utile per tutta la teoria svolta fin'ora.

IFM = appunti di IFM 2017-2018 <http://brazil.mat.uniroma1.it/dario/FM2017/ifm17.pdf>

Esercizio 1. Sottospazi chiusi

Sia V un sottospazio finito dimensionale di uno spazio di Hilbert. Mostra che V è chiuso.

Sia V un sottoinsieme chiuso di H e A un operatore limitato invertibile. Mostra che $AV = \{Av : v \in V\}$ è chiuso.

Siano V_1 e V_2 due sottospazi chiusi, con $V_1 \perp V_2$. Mostra che $V_1 + V_2$ è chiuso.

Esercizio 2. Proiettori

Dimostra che se P è un operatore limitato e autoaggiunto, e $P^2 = P$, allora è un proiettore.

Suggerimento: mostra che $\text{Range } P$ è chiuso (usando $P^2 = P$) e che è ortogonale all $\text{Ker } P$ (per autoaggiunzione). Decomponi lo spazio e mostra che P agisce come il proiettore su $\text{Range } P$.

Costruisci in esempio di operatore P tale che $P^2 = P$, ma non è autoaggiunto. Suggerimento, lavora in \mathbb{R}^2 .

Esercizio 3. Ancora proiettori

In $L^2(\mathbb{R})$, mostra che gli operatori di moltiplicazione M_h sono proiettori se e solo se h è la funzione caratteristica di un misurabile di \mathbb{R} .

Esercizio 4. Proiettori e Fourier

Dato $m \in \mathbb{R}$, mostra che in $L^2(\mathbb{R})$ l'operatore che a f associa la funzione

$$E_m f(x) = \int_{-\infty}^m d\lambda \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\lambda x} \hat{f}(\lambda)$$

è un proiettore.

Esercizio 5. Operatori integrali

Per quali $\alpha > 0$ l'operatore

$$K_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|^\alpha + |y|^\alpha + 1} f(y) dy$$

ha nucleo in $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$?

Per quali α l'operatore K_α è limitato?

Esercizio 6. Equazioni integrali

Risolvi le seguenti equazioni integrali con nucleo separabile con $f \in L^2([0, 2\pi]; \mathbb{R})$

$$f(x) - \int_0^{2\pi} \cos(x-y) f(y) dy = \sin x$$

$$\pi f(x) - \int_0^{2\pi} \cos(x+y) f(y) dy = \cos x$$

$$\pi f(x) - \int_0^{2\pi} \cos(x+y)f(y) dy = \sin x$$

Esercizio 7. Equazioni integrali

Risolvi per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ la seguente equazione integrale con nucleo separabile con $f, g \in L^2([0, \pi], \mathbb{C})$.

$$f(x) - \int_0^{2\pi} e^{i\lambda(x-y)} f(y) dy = g(x)$$

Esercizio 8. Autovettori di $a \otimes b$

Siano $a, b \in H$ non nulli, trova autovalori e autovettori di $a \otimes b$, trova anche autovettori e autovalori dell'aggiunto, mostrando che gli autovalori sono gli stessi (ma in generale non gli autovettori).

Esercizio 9.

Fai l'esercizio 17 pag 45 di [IFM].

Esercizio 10. Operatore di shift su $\ell_2(\mathbb{Z})$

Sia S definito da

$$(S\hat{x})_k = x_{k-1}$$

(è lo shift a destra). Prova che è unitario.