IFM - foglio esercizi 2 - 2018-03-16

Questo foglio di esercizi riguarda le basi in spazi L^2, le famiglie di polinomi ortogonali, i corrispondenti problemi di Sturm-Liouville.

Esercizio 1. Funzioni pari e dispari

Ogni funzione f definita in $\mathbb{R}$ o in un intervallo simmetrico $[-L, L]$, si decompone in una funzione pari e una dispari:

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

Usa questo fatto per provare che M_p = sottospazio di L^2 delle funzioni pari, e M_d = sottospazio in L^2 delle funzioni dispari, danno L^2 come somma diretta.

Esercizio 2. Basi di seni e coseni in $L^2((0\,\pi))$

Mostra che $\{\sin(kx)\}$ è una base in $L^2((0\,\pi))$.
Suggerimento:

- $\{1, \sin(kx), \cos(kx) |\, k \geq 1\}$ è un sistema ortonormale completo in $L^2((-\pi, \pi))$;
- le funzioni dispari si sviluppano in soli seni
- ogni funzione di $L^2((0, \pi))$ si prolunga ad una funzione dispari in $L^2((-\pi, \pi))$
- ...

Scrivi lo sviluppo di 1 rispetto alla base $\sin(kx)/(2\sqrt{\pi})$.

La convergenza può essere uniforme in $[0, \pi]$?

Mostra che anche $\{\cos(kx)\}_{k\in\mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale completo.

Esercizio 3. Basi di polinomi in $L^2((0, 1))$

Procedendo come nell'esercizio precedente, prova che in $L^2((0, 1))$ esiste una base di polinomi pari e una base di polinomi dispari, utilizzando i polinomi di Legendre.

Esercizio 4. Un'osservazione sulle funzioni generalizzate di Legendre

Le funzioni generalizzate di Legendre $G_{n,2}$, con $n \geq 2$, sono polinomi di grado n, in cui compare il fattore $(1 - x^2)$ a moltiplicare, e sono un sistema ortonormale completo di $L^2((-1, 1))$. Questo implica che 1 è esprimibile come una serie di polinomi pari di grado maggiore o uguale a 2, con convergenza in L^2.
Invece di costruire questa serie convergente, limitiamoci a mostrare che 1 è nello span di $(1 - x^2)x^k$, con $k \in \mathbb{N}$. Espenandendo in serie

$$\frac{1}{1 - x^2} = \sum_{k\in\mathbb{N}} x^{2k}, \quad \text{da cui } 1 = (1 - x^2) \sum_{k\in\mathbb{N}} x^{2k}$$

La convergenza della serie è uniforme nei compatti di $[-1, 1]$. Mostra che la convergenza è in L^2.

Definendo $y^2 = 1 - x^2$, l'uguaglianza precedente diventa

$$1 = y^2 \sum_{k\in\mathbb{N}} (1 - y^2)^k$$

con convergenza uniforme nei compatti di $[-1,1]\backslash\{0\}$. Mostra che anche in questo caso la convergenza è in L^2.

Esercizio 5. Basi di polinomi di grado elevato

La chiusura di $\mathrm{span}\{x^{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ è il sottospazio M_p delle funzioni pari in $L^2((-1,1))$. Usando l'esercizio precedente, mostra che

- $\mathrm{span}\{x^{2k}\}_{k\geq 1}$ è denso in M_p
- per ogni $m \geq 0$, $\mathrm{span}\{x^{2k}\}_{k\geq m}$ è denso in M_p
- togliendo un numero finito di elementi di $\{x^{2k}\}_{k\geq 1}$ si ottiene un sottoinsieme che ha span denso in M_p
- che succede se togli un numero infinito di elementi, ma lasciandone un numero infinito?

Attenzione: se levate un vettore da una base ortonormale non ottenete un sistema a span denso: evidentemente non potete ricostruire 1 usando $\cos(kx)$ con $k \geq 1$, perchè sono tutte funzioni ortogonali a 1.

Esercizio 6. Sistemi ortogonali completi in $\ell_2(\mathbb{N})$

Sia

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= (1100\dots)\\ \mathbf{v}_2 &= (10100\dots)\\ \mathbf{v}_1 &= (100100\dots)\\ \mathbf{v}_1 &= (1000100\dots)\end{aligned}$$

Mostra che $\mathbf{e}_0 = (100\dots)$ è nello span di $\{\mathbf{v}_k\}_{k\geq 1}$.
Suggerimento: sia V_n lo span di $\{\mathbf{v}_k\}_{k\geq 1}$. Trova la proiezione $P_n\mathbf{e}_0$ di $\mathbf{e}_0$ su V_n, minimizzando $\|\mathbf{e}_0 - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\mathbf{v}_k\|^2$, e mostra che nel limite $n \to +\infty$

$$\|P_n\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_0\| \to 0$$

Esercizio 7. Regolarità e sommabilità

Considera l'operatore di derivazione ∂_x definito sulle funzioni $\mathbf{C^1_0}(\mathbb{R})$, sottospazio denso di $L^2_w(\mathbb{R})$. con $w = \mathrm{e}^{-x^2}$. Sia $\{\mathbf{e}_k\}$ la base data dai polinomi di Hermite. Scrivi l'operatre ∂_x in questa base.

Mostra che se $f \in \mathbf{C^1_0}(\mathbb{R})$,

$$f = \sum_n \hat{f}_n\mathbf{e}_n$$

in $L^2_w(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{e}^{-x^2/2}f = \sum_n \hat{f}_n\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathbf{e}_n$$

in $L^2(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{e}^{-x^2/2}f = \sum_n \hat{f}_n\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathbf{e}_n$$

uniformemente.

Esercizio 8. Operatori simmetrici

Un operatore A definito in $\mathcal{D}(A)$ è simmetrico se $\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{D}(A)$ vale

$$(\mathbf{u}, A\mathbf{v}) = (A\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

Assegnata $\tau(x)$ regolare, considera il $L^2((a,b))$ l'operatore del II ordine

$$Af = (\tau f')'$$

che ricorrre spesso nei problemi di Sturm-Liuoville. Mostra che è simmetrico sul dominio delle funzioni $\mathbf{C_0^\infty}$.

Mostra che non è simmetrico sul dominio delle funzioni $\mathbf{C^\infty}$.

Considera ora

$$Bf = (\tau f)''$$

definito su $\mathbf{C_0^\infty}$. Trova w tale che B è simmetrico in L^2_w

Esercizio 9. Operatore impulso

In meccanica quantistica l'operatore illimitato $\mathrm{i}\,\partial_x$ è detto operatore impulso. Prova che è simmetrico nel dominio $\mathbf{C_0^\infty}([0,\pi])$, ma non lo è in $\mathbf{C^\infty}([0,\pi])$.
Prova che è illimitato, costruendo una successione di funzioni f_k di norma 1 su cui la norma di $\mathrm{i}\,\partial_x f_k$ è divergente.