IFM - foglio esercizi 1 - 2018-03-02

IFM = appunti di IFM 2017-2018
`http://brazil.mat.uniroma1.it/dario/FM2017/ifm17.pdf`

Esercizio 1. Equazioni di Eulero-Lagrange

Facendo riferimento al paragrafo 1.1 e 1.2 di [IFM],
• determina la variazione prima dell'azione di lagrangiana (1) e le equazioni del moto, con condizioni al contorno di Dirichlet.
• Risolvi lo stesso problema senza condizioni al contorno, ma assegnando dei potenziali al bordo che dipendano dalla soluzione al bordo.
In particolare considera l'energia potenziale al bordo

$$k_- u(0,t)^2/2 + k_+ u(L,t)^2/2$$

• Quali sono le condizioni al contorno che ottieni?

Esercizio 2. Minimi dell'energia

Completa gli esercizi 1, 2, 3 nel paragrafo 1.3 di [IFM].

Esercizio 3. Minimi dell'energia con vincolo L^2

• Trova u in $[0,\pi]$, con norma L^2 pari a 1, nulla al bordo, che minimizza

$$E = \frac{1}{2}\int_0^\pi |u'|^2.$$

• Risolvi lo stesso problema con condizioni di Neumann al bordo.
• Risolvi lo stesso problema con condizioni miste $u'(0) = 0$ e $u(\pi) = 0$.
• Risolvi lo stesso problema con le condizione $u'(0) = \alpha u(0)$ e $u(\pi) = 0$.

Esercizio 4. Punti stazionari dell'energia con vincolo L^2

• Trova i punti stazionari di

$$E = \frac{1}{2}\int_0^2 |u'|^2,$$

tra le funzioni con $\int u^2 = 1$, con condizioni di Dirichlet omogenee al contorno.
• Osserva che ne ottieni infiniti, indicizzabili con $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, e i corrispondenti valori dell'energia sono $k^2/4$.

Esercizio 5. Particella quantistica in buca di potenziale infinita

L'esercizio precedente coincide con la determinazione dei livelli di energia ammissibili di una particella quantistica in una "buca di potenziale infinita"; la particella non può uscire da $[0,\pi]$ e u vale 0 agli estremi perché $|u(x)|^2$ la densità di probabilità alla quale imponiamo di essere continua in 0 e π. La sua energia è puramente cinetica.

Come hai determinato svolgendo l'esercizio precedente, la particella può stare in una infinità numerabile di stati a energia fissata.

• Mostra che nello stato fondamentale (cioè quello di energia minima), la probabilità di trovare la particella è maggiore al centro che ai bordi.
• Mostra che nel limite $k \to +\infty$ la particella invece diventa equidistribuita in $[0,\pi]$.

Si osservi che anche nel caso classico l'energia è costante, ma le soluzione stazionarie sono solo quelle a energia nulla (particella ferma), mentre tutte le altre soluzioni hanno modulo della velocità costante, pari a $\sqrt{2E}$, con la particella che rimbalza sulle pareti. In ogni caso, la probablità di trovare la particella classica a un tempo casuale fissato è uniforme: la particella non vede le pareti fino a che non sbatte, al contrario della particella quantistica, che non essendo localizzata "è sempre a contatto con la parete".