Esonero di Istituzioni di Fisica Matematica - D

12 aprile 2017

Esercizio 1

Risolvi l'equazione di Fredholm per $f \in L^2(0,1)$

$$f(x) - \frac{1}{4}\int_0^1 x^\alpha y f(y)\,\mathrm{d}y = 1 - x^\beta,$$

al variare di $\alpha \geq 0$ e di $\beta \geq 0$.

In questo testo c'è un errore di stampa che rende banale la soluzione (il 4 davanti all'integrale doveva essere al numeratore). Comunque questa è la facile soluzione Deve essere

$$f(x) = \frac{1}{4}x^\alpha \int_0^1 y f(y)\,\mathrm{d}y + 1 - x^\beta$$

Dunque l'equazione ha soluzione se esiste

$$c = \int_0^1 y f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Moltiplicando per x e integrando, si ottiene

$$c = \frac{c}{4(2+\alpha)} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2+\beta}$$

Per ogni $\alpha > 0$, $1 \neq \frac{1}{4(2+\alpha)}$, e quindi c è univocamente determinato.

Esercizio 2

Sia $T \in \ell_2(\mathbb{N})$ dato da

$$(T\hat{f})_k = \left((-1)^k - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-k}\right)\hat{f}_k$$

Determina la sua norma, il suo aggiunto e il suo spettro.

Si tratta di un operatore di moltiplicazione, e dunque la sua norma è l'estremo superiore del modulo degli elementi moltiplicatori, e in questo caso viene $1 + 1/(2\mathrm{e})$.

Poiché i coefficienti moltiplicatori sono reali, l'operatore è autoaggiunto. È diangonale, lo spettro puntuale è formato da tutti i valori moltiplicatori, mentre i due punti di accumulazione ± 1 costituiscono lo spettro continuo. Non c'è spettro residuo perché T è autoaggiunto.

Esercizio 3

Sia $T \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ dato da

$$Tf(x) = -\mathrm{sgn}(x) f(-x)$$

Trova la sua norma, il suo aggiunto e il suo spettro.

T è una isometria, dunque la sua norma è 1. Noto che $T^2 = -I$. Il suo aggiunto è $T^* = -T$, e dunque T è un operatore unitario. Essendo un'isometria, se $Tf = \lambda f$ allora $|\lambda| = 1$. Poiché $T^2 = -I$, si ha anche che $\lambda^2 = -1$. Ma allora ci sono solo due possibilità: $\lambda = \pm\mathrm{i}$.

Infatti, indicando con $f^+(x) = f(x)$ se $x > 0$ e $f^-(x) = f(-x)$, se $x < 0$, l'equazione per il risolvente è:

$$\lambda f^+ + f^- = b^+$$
$$-f^+ + \lambda f^- = b^-$$

che ha soluzioni se $\lambda \neq \pm \mathrm{i}$. Se invece $\lambda = \mathrm{i}$, tutte le funzioni tali che $\mathrm{i}f^+ - f^-$ sono autofunzioni. Separando parte reale e parte immaginaria, si ottengono le funzioni $f = a(x) + \mathrm{i}b(x)$ tali che $b^+ = a^-$, e $b^- = -a^+$. Le autofunzioni per $\lambda = -\mathrm{i}$ si determinano nello stesso modo.

Ci si potrebbe infine chiedere se i due autospazi hanno come somma diretta l'intero spazio.

Esercizio 4

Sia $T_\alpha \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ dato da

$$T_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(x-y)^2} \mathrm{e}^{-\alpha|y|} f(y)\, \mathrm{d}y$$

con $\alpha \geq 0$. Discuti limitatezza e compattezza di T_α, al variare di $\alpha \in [0, +\infty)$. Studia se, e in che senso, vale

$$\lim_{\alpha \to 0} T_\alpha = T_0$$

È evidente che se $\alpha > 0$ il nucleo è quadrosommabile, dunque T_α è compatto (e in particolare limitato). Se $\alpha = 0$ l'operatore è continuo ma non compatto. Per provare che è continuo, si procede come sempre, usando che il nucleo di convoluzione è in L^1. Per provare che non è compatto, si può passare in Fourier, in cui diventa un operatore di moltiplicazione, oppure operare direttamente usando il fatto che è un operatore di convoluzione: data f, sia $f_n(x) = f(x + n)$, che tende a 0 debolmente. Allora $Tf_n(x) = Tf(x + n)$, dunque $\|Tf_n\| = \|Tf\|$ e Tf_n non può tendere a 0 fortemente.

Per quel che riguarda il limite, non può valere in norma operatoriale (T_0 sarebbe compatto, e non è vero). Analizzo prima la convergenza debole $T_\alpha \to T_0$ perché è più semplice.

$$(g, (T_\alpha - T_0)f) = -\int \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \mathrm{e}^{-(x-y)^2} \left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha|y|}\right) g(y) f(x)$$

La funzione $\mathrm{e}^{-(x-y)^2} |g(y)|\, |f(x)|$ è sommabile, infatti è stimata da

$$\frac{1}{2} \mathrm{e}^{-(x-y)^2} (g^2(y) + f^2(x))$$

che è evidentemente in L^2. Inoltre

$$\left|1 - \mathrm{e}^{-\alpha|x|}\right| \leq 1$$

Dunque posso passare al limite $\alpha \to 0$ invocando la convergenza dominata, ottenendo 0.

Per quanto riguarda la convergenza forte, si usa un argomento analogo, ma più involuto. Sia $A_\alpha = T_0 - T_\alpha$, di nucleo integrale

$$\mathrm{e}^{-(x-y)^2} \left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha|y|}\right)$$

Chiedersi se $\|A_\alpha f\| \to 0$ a f fissato equivale a chiedersi se $\|T_0 B_\alpha f\| \to 0$ dove B_α è l'operatore di moltiplicazione per $1 - \mathrm{e}^{-\alpha|x|}$. L'operatore B_α tende a 0 forte, infatti

$$\|B_\alpha f\|^2 = \int |f(x)|^2 \left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha|x|}\right)^2$$

che va a 0 per convergenza dominata. Poiché T_0 è continuo, anche $A_\alpha f$ va a zero in norma.