Esonero di Istituzioni di Fisica Matematica - C

12 aprile 2017

Esercizio 1

Risolvi l'equazione di Fredholm per $f \in L^2(0,1)$

$$f(x) - \frac{1}{4}\int_0^1 xy^\alpha f(y) = 1 - x^\beta,$$

al variare di $\alpha \geq 0$ e di $\beta \geq 0$.

In questo testo c'è un errore di stampa che rende banale la soluzione (il 4 davanti all'integrale doveva essere al numeratore).

Comunque questa è la facile soluzione. Deve essere

$$f(x) = \frac{1}{4}x\int_0^1 y^\alpha f(y)\,\mathrm{d}y + 1 - x^\beta$$

Dunque l'equazione ha soluzione se esiste

$$c = \int_0^1 y^\alpha f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Moltiplicando per x^α e integrando, si ottiene

$$c = \frac{c}{4(2+\alpha)} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2+\beta}$$

Per ogni $\alpha > 0$, $1 \neq \frac{1}{4(2+\alpha)}$, e quindi c è univocamente determinato.

Esercizio 2

Sia $T \in \ell_2(\mathbb{N})$ dato da

$$T\hat{f}_k = ((-1)^k + \mathrm{e}^{-k})\hat{f}_k$$

Determina la sua norma, il suo aggiunto e il suo spettro.

Si tratta di un operatore di moltiplicazione, e dunque la sua norma è pari all'estremo superiore del modulo dei coefficienti di moltiplicazione, e in questo caso 2, che si ottiene per $k = 0$ (se invece hai pensato che la successione iniziasse da $k = 1$, l'estremo si ottiene per $k = 2$ e vale $1 + 1/\mathrm{e}^2$).

Poiché i coefficienti moltiplicatori sono reali, l'operatore è autoaggiunto. È diagonale, e dunque lo spettro puntuale è formato da tutti i valori moltiplicatori, mentre i due punti di accumulazione ± 1 costituiscono lo spettro continuo. Non c'è spettro residuo perché T è autoaggiunto.

Esercizio 3

Sia $T \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ dato da

$$Tf(x) = \mathcal{X}\{x > 0\}f(-x)$$

Determina la sua norma, il suo aggiunto e il suo spettro.

Calcolo la norma:

$$\|Tf\|^2 = \int_{-\infty}^0 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x \leq \|f\|^2$$

D'altra parte, se f ha supporto per $x < 0$, si ottiene $\|f\|^2$. Dunque la norma di T è 1. Nota anche che $T^2 = 0$.

L'aggiunto è $T^* f = \mathcal{X}\{x < 0\} f(-x)$.

L'equazione per gli autovalori è

$$\lambda f(x) = \mathcal{X}\{x > 0\} f(-x)$$

Indicando per $x > 0$: $f^+(x) = f(x)$ e $f^-(x) = f(-x)$, si ha

$$\begin{aligned} \lambda f^+ &= f^- \\ \lambda f^- &= 0 \end{aligned}$$

da cui, se $\lambda \neq 0$, ottieni $f^- = 0$ e $f^+ = 0$. Se invece $\lambda = 0$, f^+ è arbitrario. Dunque 0 è lo spettro puntuale.

Determino il risolvente per $\lambda \neq 0$

$$\begin{aligned} \lambda f^+ - f^- &= b^+ \\ \lambda f^- &= b^- \end{aligned}$$

Evidentemente, $f^- = b^-/\lambda$, e $f^+ = (b^+ + b^-/\lambda)/\lambda$. Dunque c'è solo lo spettro puntuale.

Esercizio 4

Sia $T_\alpha \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ dato da

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-(x-y)^2}}{1 + \alpha |y|} f(y)\, \mathrm{d}y$$

con $\alpha \geq 0$. Discuti limitatezza e compattezza di T_α al variare di $\alpha \in [0, +\infty)$. Studia se, e in che senso, vale

$$\lim_{\alpha \to 0} T_\alpha = T_0$$

È evidente che se $\alpha > 0$ il nucleo è quadrosommabile, dunque T_α è compatto (e in particolare limitato). Se $\alpha = 0$ l'operatore è continuo ma non compatto. Per provare che è continuo, si procede come sempre, usando che il nucleo di convoluzione è in L^1. Per provare che non è compatto, si può passare in Fourier, in cui diventa un operatore di moltiplicazione, oppure operare direttamente usando il fatto che è un operatore di convoluzione: data f, sia $f_n(x) = f(x + n)$, che tende a 0 debolmente. Allora $Tf_n(x) = Tf(x + n)$, dunque $\|Tf_n\| = \|Tf\|$ e Tf_n non può tendere a 0 fortemente.

Per quel che riguarda il limite, non può valere in norma operatoriale (T_0 sarebbe compatto, e non è vero). Analizzo prima la convergenza debole $T_\alpha \to T_0$ perché è più semplice.

$$(g, (T_\alpha - T_0)f) = -\int \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \mathrm{e}^{-(x-y)^2} \frac{\alpha |y|}{1 + \alpha |y|} g(y) f(x)$$

La funzione $\mathrm{e}^{-(x-y)^2} |g(y)|\, |f(x)|$ è sommabile, infatti è stimata da

$$\frac{1}{2} \mathrm{e}^{-(x-y)^2} (g^2(y) + f^2(x))$$

che è evidentemente in L^2. Inoltre

$$\frac{\alpha y^2}{1 + \alpha y^2} \leq 1$$

Dunque posso passare al limite $\alpha \to 0$ invocando la convergenza dominata, ottenendo 0.

Per quanto riguarda la convergenza forte, si usa un argomento analogo, ma più involuto. Sia $A_\alpha = T_0 - T_\alpha$, di nucleo integrale

$$\mathrm{e}^{-(x-y)^2} \frac{\alpha|y|}{1+\alpha|y|}$$

Chiedersi se $\|A_\alpha f\| \to 0$ a f fissato equivale a chiedersi se $\|T_0 B_\alpha f\| \to 0$ dove B_α è l'operatore di moltiplicazione per $\frac{\alpha|x|}{1+\alpha|x|}$. L'operatore B_α tende a 0 forte, infatti

$$\|B_\alpha f\|^2 = \int |f(x)|^2 \left(\frac{\alpha|y|}{1+\alpha|y|}\right)^2$$

che va a 0 per convergenza dominata. Poiché T_0 è continuo, anche $A_\alpha f$ va a zero in norma.