Esonero di Istituzioni di Fisica Matematica - B

12 aprile 2017

Esercizio 1

Risolvi l'equazione di Fredholm per $f \in L^2(0,+\infty)$

$$f(x) - \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha x + y)/2} f(y) = (1-\beta x)\mathrm{e}^{-x}.$$

al variare di $\alpha > 0$ e di $\beta \in \mathbb{R}$.

Ricordo che

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\gamma x}\,\mathrm{d}x = 1/\gamma \qquad \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\gamma x}\,\mathrm{d}x = 1/\gamma^2$$

Riscrivo l'equazione:

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x/2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y/2} f(y)\,\mathrm{d}y + (1-\beta x)\mathrm{e}^{-x}$$

Dunque l'equazione è risolubile se esiste

$$c = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x/2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Moltiplico per $\mathrm{e}^{-x/2}$ e integro, ottenendo

$$c = \frac{2c}{1+\alpha} + \frac{2}{2+\alpha} - \frac{4\beta}{(2+\alpha)^2}$$

c è univocamente determinato se $2/(1+\alpha) \neq 1$, cioè $\alpha \neq 1$. In questo caso la soluzione esiste ed è unica.

Se invece $\alpha = 1$, l'equazione per c diventa

$$c = c + \frac{2}{3} - \beta\frac{4}{9}$$

dunque l'equazione è risolubile solo per $\beta = 3/2$, e la soluzione è

$$f(x) = c\mathrm{e}^{-x/2} + (1 - 3/2x)\mathrm{e}^{-x}$$

con c arbitrario.

Esercizio 2

Sia $T \in \mathcal{L}(\ell_2(\mathbb{N}))$ dato da

$$T\hat{f}_k = \frac{k}{3k(-1)^k + 1}\hat{f}_k$$

Determina la sua norma, il suo aggiunto e lo spettro.

È un operatore di moltiplicazione, dunque la sua norma è data dall'estremo superiore del modulo coefficienti che è $1/2$. I coefficienti sono numeri reali, dunque T è autoaggiunto. È un operatore diagonale, dunque lo spettro puntuale è dato dai valori dei coefficienti, che sono tutti distinti.

Lo spettro continuo è dato dai valori che sono nella chiusura, cioè $\pm 1/3$. Non c'è spettro residuo perché è autoaggiunto.

Esercizio 3

Sia $T \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}))$ dato da

$$Tf(x) = \mathcal{X}\{x < 0\}f(x)$$

Trova la sua norma il suo aggiunto e lo spettro.

Si tratta di un operatore di moltiplicazione, dunque è autoaggiunto essendo $\mathcal{X}\{x < 0\}$ una funzione reale. Il suo spettro è dunque reale. (si noti inoltre che T è un proiettore). Calcolo la norma:

$$\|Tf\|^2 = \int_{-\infty}^{0} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leq \|f\|^2$$

D'altra parte, se f ha supporto in $x < 0$, si ottiene $\|f\|^2$. Dunque la norma di T è 1.

Alternativamente, poiché è un operatore di moltiplicazione, bastava osservare che 1 è il sup della funzione usata per moltiplicare.

L'equazione per il risolvente è

$$\lambda f(x) = \mathcal{X}\{x < 0\}f(x)$$

Dunque, o $\lambda = 0$ e in tal caso ogni f con supporto per $x > 0$ è autofunzione, o $\lambda = 1$, e in tal caso ogni f con supporto in $x < 0$ è autofunzione. Questi due sottospazi sono ortogonali e la loro somma è tutti L^2, dunque T è diagonalizzabile e quindi non esistono altri punti nello spettro.

Si può comunque provare a mano questa affermazione, provando che ogni $\lambda \neq 0, 1$ è nel risolvente. Infatti, indicando con $f^+(x) = f(x)$ per $x > 0$ e $f^(x) = f(-x)$, per $x > 0$ l'equazione per il risolvente è

$$\lambda f^+(x) = b^+(x)$$
$$(\lambda - 1)f^-(x) = b^-(x)$$

che, se $\lambda \neq 0, 1$ ha soluzione.

Esercizio 4

Sia $T_\alpha \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ dato da

$$T_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-(x-y)^2}}{1 + \mathrm{e}^{\alpha|y|}} f(y) \, \mathrm{d}y$$

con $\alpha \geq 0$. Discuti limitatezza e compattezza di T_α, al variare di $\alpha \in [0, +\infty)$. Studia se, e in che senso, vale

$$\lim_{\alpha \to 0} T_\alpha = T_0$$

È evidente che se $\alpha > 0$ il nucleo è quadrosommabile, dunque T_α è compatto (e in particolare limitato). Se $\alpha = 0$ l'operatore è continuo ma non compatto. Per provare che è continuo, si procede come sempre, usando che il nucleo di convoluzione è in L^1. Per provare che non è compatto, si può passare in Fourier, in cui diventa un operatore di moltiplicazione, oppure operare direttamente usando il fatto che è un operatore di convoluzione: data f, sia $f_n(x) = f(x + n)$, che tende a 0 debolmente. Allora $Tf_n(x) = Tf(x + n)$, dunque $\|Tf_n\| = \|Tf\|$ e Tf_n non può tendere a 0 fortemente.

Per quel che riguarda il limite, non può valere in norma operatoriale (T_0 sarebbe compatto, e non è vero). Analizzo prima la convergenza debole $T_\alpha \to T_0$ perché è più semplice.

$$(g, (T_\alpha - T_0)f) = -\int \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \mathrm{e}^{-(x-y)^2} \frac{\mathrm{e}^{\alpha|y|} - 1}{2(\mathrm{e}^{\alpha|y|} + 1)} g(y) f(x)$$

La funzione $\mathrm{e}^{-(x-y)^2} |g(y)|\, |f(x)|$ è sommabile, infatti è stimata da

$$\frac{1}{2} \mathrm{e}^{-(x-y)^2} (g^2(y) + f^2(x))$$

che è evidentemente in L^2. Inoltre

$$\frac{\mathrm{e}^{\alpha|y|} - 1}{2(\mathrm{e}^{\alpha|y|} + 1)} \leq \frac{1}{2}$$

Dunque posso passare al limite $\alpha \to 0$ invocando la convergenza dominata, ottenendo 0.

Per quanto riguarda la convergenza forte, si usa un argomento analogo, ma più involuto. Sia $A_\alpha = T_0 - T_\alpha$, di nucleo integrale

$$\mathrm{e}^{-(x-y)^2} \frac{\mathrm{e}^{\alpha|y|} - 1}{2(\mathrm{e}^{\alpha|y|} + 1)}$$

Chiedersi se $\|A_\alpha f\| \to 0$ a f fissato equivale a chiedersi se $\|T_0 B_\alpha f\| \to 0$ dove B_α è l'operatore di moltiplicazione per $\frac{\mathrm{e}^{\alpha|x|} - 1}{2(\mathrm{e}^{\alpha|x|} + 1)}$ L'operatore B_α tende a 0 forte, infatti

$$\|B_\alpha f\|^2 = \int |f(x)|^2 \left(\frac{\mathrm{e}^{\alpha|x|} - 1}{2(\mathrm{e}^{\alpha|x|} + 1)} \right)^2$$

che va a 0 per convergenza dominata. Poiché T_0 è continuo, anche $A_\alpha f$ va a zero in norma.