

# Istituzioni di Fisica Matematica

M. Pulvirenti

February 27, 2016

## Premessa

In questa sezione introduttiva cerchiamo di illustrare i prerequisiti (alcuni di essi saranno ridiscussi durante lo svolgimento del programma) necessari per seguire il presente corso di Istituzioni di Fisica Matematica. Premettiamo che tale corso si colloca nell'ambito di un cammino che parte dallo studio della Meccanica Razionale (studio di sistemi meccanici a un numero finito di gradi di libertà), prosegue con lo studio di sistemi a un numero infinito di gradi di libertà (campi) come si incontrano nello studio dell'elettromagnetismo, continui, fluidi e gas ed altro. Lo scopo è di rendere lo studente familiare con tecniche matematiche necessarie a risolvere problemi che nascono dalla Fisica e, più in generale, dalle applicazioni.

Lo studente avrà realizzato che un primo importante passaggio dalla Meccanica alla Fisica Matematica è consistito nel cambio di metodologia nello studio dei fenomeni evolutivi. In Meccanica essi erano descritti da Equazioni Differenziali Ordinarie (EDO), mentre in Fisica Matematica i fenomeni evolutivi più frequenti (esempio equazioni delle onde e calore) sono naturalmente descritti da Equazioni alle Derivate Parziali (EDP).

Nel presente corso si intende proseguire il cammino iniziato con lo studio della Fisica Matematica, affrontando problemi più generali e complessi che richiedono familiarità con tecniche matematiche più sofisticate. L'obiettivo è quello di fornire conoscenze e metodologie valide oltre la soluzione di problemi motivati dalla Fisica, ma ben presenti in altri settori della Matematica.

Quali sono i prerequisiti necessari alla comprensione di queste note?

Certamente lo studente dovrà conoscere le prime nozioni della teoria delle funzioni armoniche. Riassumo brevemente, per comodità dello studente i punti salienti della teoria delle funzioni armoniche.

Sia  $D \subset \mathbb{R}^n$ , con  $n = 2, 3$  un aperto con frontiera regolare. Una funzione  $u \in C^2(D)$  si dice armonica in  $D$  se accade che:

$$\Delta u(x) \equiv \sum_{i=1}^n \partial_i^2 u(x) = 0, \quad x \in D$$

(dove  $\partial_i^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ ).

(Si richiami la forma dell'operatore di Laplace in coordinate sferiche e polari).

La funzione di Green (libera) è definita da:

$$G(x) = \frac{1}{4\pi} |x|^{-1} \quad x \in \mathbb{R}^3 / \{0\}$$

e

$$G(x) = -\frac{1}{2\pi} \log |x| \quad x \in \mathbb{R}^2 / \{0\}$$

in dimensione 3 e 2 rispettivamente.

$G$  é armonica nel suo dominio di definizione.

Vale l'identitá

$$\Delta G(x) = -\delta(x)$$

nel senso delle distribuzione. (Dimostrare l'asserto).

La conoscenza della  $G$  ci permette di risolvere l'equazione di Poisson ( $\Delta u = -\rho$ ) nello spazio (o nel piano). (Precisare e dimostrare questa affermazione).

Le funzioni armoniche godono di notevoli proprietá alcune delle quali sono descritte dalle affermazioni seguenti.

Sia  $u = u(x)$  sia armonica in  $D$ , continua in  $\bar{D}$  assieme a  $\nabla u$ . Denoteremo con  $\partial D$  la frontiera di  $D$ , con  $n$  la sua normale esterna, con  $\sigma(dy)$  l'elemento di superficie in  $\partial D$  e con  $\partial_n = \frac{\partial u}{\partial n}$  la derivata normale.

Allora:

1) Se  $u(y) = 0$  per ogni  $y \in \partial D$  allora  $u = 0$  in  $D$ . Se  $\partial_n u(y) = 0$  per ogni  $y \in \partial D$  allora  $u = cost$  in  $D$ .

2)

$$\int_{\partial D} \partial_n u \sigma(dy) = 0$$

3) (Rappresentazione integrale delle funzioni armoniche)

Vale la seguente formula:

$$u(x) = \int_{\partial D} G(x, y) \partial_n u(y) \sigma(dy) - \int_{\partial D} u(y) \partial_n G(x, y) \sigma(dy)$$

Si osservi che, sulla base del punto 3, una funzione armonica in  $D$ , é nota quando é noto il suo valore al bordo e il valore della sua derivata normale.

4) (Teorema della media) Posto  $B(x, R) = \{y \mid |x - y| < R\}$ , sia  $B(x, R) \subset D$ . Allora:

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B(x, R)} u(y) \sigma(dy)$$

5) (II Teorema della media)

$$u(x) = \frac{3}{4\pi R^3} \int_{B(x, R)} u(y) dy$$

6) (Principio di massimo)

Se  $u$  é non costante, il massimo e minimo valore di  $u$  sono assunti sul bordo.

7) (Inversione del Teorema della media)

Sia  $u \in C^2(D)$  che soddisfa alla proprietà del punto 5 per ogni  $x$  e  $R$  tale che  $B(x, R) \subset D$ . Allora  $u$  è armonica.

Una importante equazione in Fisica e nelle applicazioni è l'equazione di Laplace in  $D$ :

$$\Delta u = 0$$

con condizioni al bordo  $u = f$  oppure  $\partial_n u = f$  dove  $f \in C(\partial D)$  (condizioni di Dirichlet o Neumann rispettivamente).

Questi problemi si risolvono esattamente in dimensione uno o in domini con particolari simmetrie, ad esempio il cerchio. Lo studente è invitato a ricordare tali soluzioni esatte.

C'è un'interessante connessione tra la teoria delle funzioni analitiche di una variabile complessa e le funzioni armoniche in  $\mathbb{R}^2$ , non necessariamente nota allo studente che non abbia conoscenze di variabile complessa. Questo è ammesso nei piani di studio, ma lo studente deve essere conscio che tale lacuna è grave.

Per quanto riguarda i fenomeni evolutivi, si supponrà che lo studente sia familiare con la soluzione di problemi relativi all'evoluzione delle onde e del calore, per mezzo dell'analisi di Fourier (serie e trasformata di Fourier, assieme a cenni di Teoria delle Distribuzioni, sono argomenti assunti come noti).

Da un punto di vista pratico, come esercizio di autovalutazione, lo studente dovrà essere (facilmente) in grado di risolvere i seguenti problemi.

Risolvere l'equazione delle onde e del calore in  $(0, 1)$ :

$$\ddot{u} = u''$$

$$\dot{u} = u''$$

rispettivamente, con condizioni iniziali assegnate, e dati al bordo:

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

oppure

$$u(0, t)' = u(1, t)' = 0$$

oppure

$$u(0, t) = 0, \quad u'(1, t) = 0.$$

Per migliorare la sua preparazione, lo studente dovrà aggiungere nuovi elementi ai problemi indicati, per esempio per mezzo dell'aggiunta di termini forzanti e/o viscosi, es.

$$\dot{u} = u'' - \beta\dot{u} + f,$$

oppure complicare le condizioni al contorno:

$$u(0, t) = 1 \quad u(1, t) = 0$$

oppure

$$u(0, t) = 1 \quad u'(1, t) = 0.$$

Il presente corso dovrà affrontare casi multidimensionali in cui la tecnica della serie di Fourier non può essere applicata, ma è assolutamente necessario che lo studente sia del tutto familiare con i problemi unidimensionali descritti sopra.

Un' ultima osservazione. Cosa serve sapere dagli altri corsi?

Si assumeranno note (oltre a nozioni elementari di Topologia) i primi rudimenti di Analisi Funzionale e Analisi Reale. In particolare gli spazi di Hilbert (separabili).

Per dirimere un equivoco è opportuno precisare che la conoscenza degli spazi di Hilbert non si esaurisce con l'acquisizione della loro esistenza. Ad esempio sapere che  $L^2(0, 1)$  è un caso particolare degli spazi  $L^p(0, 1)$  con  $p \neq 2$  non serve a nulla. Lo studente deve essere consapevole delle notevoli proprietà ulteriori che lo spazio  $L^2$  possiede rispetto agli altri  $L^p$ . Meditare su questa affermazione come esercizio di autovalutazione.

Nella prossima sezione illustrerò meglio gli scopi del corso.

## Introduzione

In questa breve sezione introduttiva cercheremo di illustrare, in poche parole, lo spirito del corso di Istituzioni di Fisica Matematica. Lo studente ha già affrontato, nel corso di Fisica Matematica, lo studio di qualche equazione alle derivate parziali di interesse per le applicazioni. Ad esempio l'equazione del calore in  $(0, 1)$ .

Il problema si formula nel modo seguente. Vogliamo trovare una funzione  $u = u(x, t)$  con  $x \in (0, 1)$ ,  $t > 0$ , tale che

$$\partial_t u(x; t) = \Delta u(x; t)$$

ove

$$\Delta u = \partial_{xx}^2 u.$$

E' ben noto che per ragioni di carattere sia matematico che fisico, occorre specificare, per la soluzione, le condizioni al contorno, che per semplicità assumeremo nulle:

$$u(0, t) = u(1, t) = 0; \quad \text{per } t > 0,$$

e le condizioni iniziali

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

ove  $u_0$  é una funzione assegnata (la cui regolarità al momento non discutiamo).

Sappiamo che tale problema ammette una soluzione unica e che tale soluzione si può determinare in maniera abbastanza esplicita per mezzo della serie di Fourier.

Questo problema ha delle strette analogie con un'altro problema piú semplice che é il seguente.

Sia  $A$  una matrice ( $n \times n$ ), a coefficienti  $A_{i,j}$  reali. Supporremo che  $A$  sia simmetrica:

$$A_{i,j} = A_{j,i}.$$

Supponiamo ora di voler studiare il problema di evoluzione in  $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = Ax.$$

Se  $x_0$  é il dato iniziale del problema, allora

$$x(t) = e^{At}x_0,$$

dove  $e^{At}$  é un' opportuna matrice che può essere costruita in vari modi. Se  $A$  fosse diagonale sulla base  $\{e_i\}, i = 1 \dots n$ , allora potremmo espandere la soluzione del problema in esame nella forma:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t)e_i.$$

Lo studente osservi che  $x_i(t)$  sono le componenti del vettore  $x(t)$  e quindi numeri reali, mentre  $x(t)$  e  $e_i$  sono vettori in  $\mathbb{R}^n$ . Allora

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i(t)e_i.$$

e

$$Ax(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t)Ae_i = \sum_{i=1}^n x_i(t)\lambda_i e_i.$$

Siamo dunque ricondotti al facile problema

$$\dot{x}_i(t) = \lambda_i x_i(t), \quad i = 1 \dots n$$

la cui soluzione é

$$x_i(t) = e^{\lambda_i t} (x_0)_i.$$

In particolare la matrice  $e^{At}$  é diagonale sulla base  $\{e_i\}$  ed ha la forma

$$e^{At} e_i = e^{\lambda_i t} e_i.$$

Per un teorema che lo studente già conosce, ogni matrice simmetrica è diagonale in un'opportuna base. Dunque il problema è facilmente risolto attraverso la procedura algebrica di diagonalizzazione di una matrice.

Con la stessa tecnica lo studente può cercare di risolvere altri problemi quali

$$\ddot{x} = Ax,$$

oppure i problemi stazionari  $Ax = 0$  e  $Ax = y$  con  $y \in \mathbb{R}^n$  assegnato, ben noti al lettore dal corso di algebra lineare.

Torniamo ora al problema originario dell'equazione del calore. Sappiamo che l'operatore di Laplace è diagonale su un'opportuna base di  $L^2([0, 1])$ :

$$\Delta e_i = \lambda_i e_i.$$

dove

$$e_k = \sin k\pi x, \quad k = 1, 2, \dots$$

e  $\lambda_k = -(\pi k)^2$ .

Espandiamo allora ogni funzione  $u \in L^2([0, 1])$  e, in particolare, la soluzione del nostro problema, nella forma

$$u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(t) e_i.$$

Allora

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) &= \sum_{i=1}^n \dot{u}_i(t) e_i, \\ \Delta u(t) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i(t) e_i, \end{aligned}$$

e dunque:

$$\dot{u}_i(t) = \lambda_i u_i(t)$$

(stiamo usando l'unicità della serie di Fourier). Pertanto la soluzione del problema ha la forma

$$u(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} c_i e_i.$$

dove le costanti  $c_i$  devono essere calcolate in termini del dato iniziale:

$$u_0 = \sum_{i=1}^n c_i e_i.$$

Con la stessa tecnica possiamo risolvere il problema della corda vibrante,

$$\partial_{tt}^2 u(x; t) = \Delta u(x; t)$$

con condizioni al bordo nulle e dati iniziali:

$$u(x, 0) = u_0(x); \quad \partial_t u(x, 0) = v_0(x).$$

oppure con condizioni al contorno diverse.

Questo modo di procedere sembra legato al fatto che stiamo considerando problemi in dimensione uno, oppure problemi in dimensione maggiore con proprietà di simmetria che vengono meno in generale.

In questo corso vogliamo invece mostrare come le idee guida dell'approccio appena descritto possano estendersi a problemi multidimensionali per domini regolari, ma arbitrari. Per fissare le idee, concentriamoci ancora sul problema relativo all'equazione del calore in un dominio regolare  $D \subset \mathbb{R}^n$ . E' evidente che possiamo sperare di applicare la stessa classe di idee che abbiamo fino adesso illustrato, se siamo capaci di risolvere il problema agli autovalori relativo all'operatore di Laplace  $\Delta$ :

$$\Delta e_j = \lambda_j e_j$$

dove  $\{e_j\}$  è una base in  $L^2(D)$ . Per risolvere questo problema siamo però portati a discutere la teoria degli operatori lineari su spazi di Hilbert, cosa che faremo in Cap.2. Tale teoria culminerà con il teorema di decomposizione degli operatori compatti.

Si noti, incidentalmente, che tale teoria è utile anche come struttura matematica per la Meccanica Quantistica ed ha molte altre applicazioni in Matematica e in Fisica.

Un altro argomento di interesse, che è cruciale per la soluzione dell'equazione di Laplace con condizioni di Dirichlet al bordo sviluppata in Cap.3, è la teoria di Fredholm per le equazioni integrali, che sarà introdotta nel Cap. 1 e poi proseguita nel Cap. 2 nella sua formulazione più generale.

## Riferimenti bibliografici degli argomenti svolti

Per le equazioni integrali



- 1- A.V. Bitsadze: Equations of Mathematical Physics, Ed. MIR (1980)
- 2-A.V. Bitsadze: Partial Differential Equations
- 3-M. Krasnov, A. Kiselev, G. Makarenko: Problems and exercises in Integral Equations, ed. MIR (1971)  
Per la teoria degli operatori su spazi di Hilbert:
- 4- A. Kolmogorov, S. Fomine: Elements de la Theorie des Fonctions et de l'Analyse Functionelle, Ed. Mir (1974)
- 5- M. Reed, B. Simon: Methods of modern Mathematical Physics Vol.1, Academic Press (1970)  
Per le equazioni lineari su spazi di Hilbert (ed altro)
- 6-Mikhailov: Equazioni differenziali alle derivate parziali, Ed MIR  
Le equazioni alle derivate parziali piu' comuni sono trattate (oltre che in 1,2,6) anche in
- 7-G. B. Folland: Introduction to Partial Differential Equations
- 8- S. Salsa Equazioni alle derivate parziali: metodi, modelli e applicazioni.  
Altre monografie di interesse sono
- 9- G. Evans: Partial differential equations
- 10- Vladimirov: Equazioni differenziali della fisica matematica, Ed. MIR
- 11- Brezis: Analisi Funzionale, Ed. Liguori

# 1. Equazioni Integrali in $\mathbb{R}^1$

## 1. Equazioni di Fredholm e Volterra in $\mathbb{R}^1$

La formalizzazione matematica di molti problemi della fisica e delle scienze applicate si riduce allo studio di equazioni integrali lineari. Esse sono relazioni del tipo:

$$f(x) - \lambda \int_D K(x, y)f(y)dy = g(x) \quad (1)$$

dove  $D \subset \mathbb{R}^n$  é un dominio assegnato,  $K : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  sono funzioni assegnate (le ipotesi di regolarit a su questi dati le faremo quando affronteremo rigorosamente il problema) e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é la funzione incognita che vorremmo determinare. Infine  $\lambda$  é un parametro reale anch'esso assegnato.  $K$  si dice nucleo dell'equazione integrale.

In questo Capitolo cominceremo a studiare questo problema nel più semplice caso unidimensionale, quando il dominio  $D$  si riduce ad un intervallo finito. Pertanto il nostro problema si scrive:

$$f(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)f(y)dy = g(x) \quad (2)$$

Supporremo  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni continue assegnate. Senza scapito di generalit a assumeremo  $a < b$ .

L'equazione (2) si dice equazione integrale di Fredholm (di secondo tipo).

In letteratura per equazione di Fredholm si intende:

$$\alpha(x)f(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)f(y)dy = g(x) \quad (3)$$

dove  $\alpha$  é una funzione nota. Tali equazioni si dicono di primo, di secondo o di terzo tipo a seconda che  $\alpha$  sia uguale a zero, a uno o sia una generica funzione. Noi non useremo questa terminologia, ma chiameremo semplicemente equazione di Fredholm l'equazione (2) perché sarà l'unica che studieremo in dettaglio.

Nel caso che l'eq. (2) abbia un nucleo  $K$  che gode della propriet a  $K(x, y) = 0$  se  $x < y$ , l'equazione si riscrive nella forma:

$$f(x) - \lambda \int_a^x K(x, y)f(y)dy = g(x) \quad (4)$$

Equazioni di questo tipo si chiamano di Volterra e, per quanto detto, sono casi particolari di equazioni di Fredholm. I nomi Fredholm e Volterra provengono dai matematici che hanno studiato questi tipi di equazioni integrali.

L'equazione (2) ha una soluzione formale, esprimibile per serie, che andiamo a costruire. Il procedimento si basa su una successione di approssimanti dello stesso tipo di quelli incontrati nella costruzione delle soluzioni del problema di Cauchy per le equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Infatti si definisce una successione di funzioni  $\{f_n\}_{n=0,1,\dots}$  attraverso le formule di ricorrenza:

$$f_n(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) f_{n-1}(y) dy \quad n \geq 1$$

$$f_0 = g \quad (5)$$

da cui, iterando, possiamo esprimere  $f_n$  nella forma:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \lambda^k \int_a^b dy_1 \int_a^b dy_2 \dots \int_a^b dy_k K(x, y_1) K(y_1, y_2) \dots K(y_{k-1}, y_k) g(y_k) \quad (6)$$

Ci aspettiamo che, se la serie indotta dal membro di destra della (6) é convergente, il limite di questa serie é una soluzione dell'equazione integrale. Ciò é quanto espresso dal teorema seguente che fornisce anche delle condizioni sufficienti alla convergenza della serie.

In ipotesi di continuitá per  $g$  e  $K$  possiamo introdurre le quantitá:

$$M_0 = \max_{x \in [a, b]} |g(x)|, \quad M_1 = \max_{x \in [a, b]} \int_a^b dy |K(x, y)| \quad (7)$$

**Teorema 1.1** *Supponiamo che*

$$|\lambda| < \frac{1}{M_1} \quad (8)$$

*allora la serie di funzioni*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \int_a^b dy_1 \dots \int_a^b dy_k K(x, y_1) \dots K(y_{k-1}, y_k) g(y_k) \quad (9)$$

*é uniformemente e assolutamente convergente in  $[a, b]$ . Come conseguenza la successione  $\{f_n\}$  é una successione di Cauchy. Denotando con  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ ,  $f$  risulta essere il limite della serie (9) e l'unica soluzione dell'equazione (2).*

**Dim** La prova é molto semplice. La serie (9) é maggiorata dalla serie numerica

$$M_0 \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k (M_1)^k \quad (10)$$

che é geometricamente convergente nelle ipotesi (8). Sia  $f$  il limite della serie (9), allora  $f$  é il limite (uniforme) delle  $\{f_n\}$ . In particolare  $f$  é continua e soddisfa alla (2), (possiamo passare al limite dentro il segno di integrale).

L'unicità segue dal solito argomento. Supponiamo che  $f_1$  e  $f_2$  siano due soluzioni continue, posto  $d(x) = f_1(x) - f_2(x)$ , si ha:

$$d(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)d(y)dy \quad (11)$$

Dalla (11) se  $\bar{d} = \sup_{x \in [a, b]} |d(x)|$ , si ha

$$\bar{d} \leq |\lambda| M_1 \bar{d} \quad (12)$$

che implica  $\bar{d} = 0$  perche  $|\lambda| M_1 < 1$ . ■

Si noti che l'equazione omogenea associata all'equazione (2), cioè:

$$f(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)f(y)dy = 0 \quad (13)$$

non ha soluzione non banale ( $f \neq 0$ ) nelle ipotesi di piccolezza (8).

Nel caso dell'equazione di Volterra, la soluzione formale per serie che si ottiene iterando lo schema approssimante:

$$f_n(x) = g(x) + \lambda \int_a^x K(x, y)f_{n-1}(y)dy \quad n \geq 1$$

$$f_0 = g \quad (14)$$

é convergente per qualunque valore di  $\lambda$ . Infatti, posto

$$M_2 = \max_{(x, y) \in [a, b]^2} |K(x, y)| \quad (15)$$

la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \int_a^x dy_1 \int_a^{y_1} dy_2 \dots \int_a^{y_{k-1}} dy_k K(x, y_1) K(y_1, y_2) \dots K(y_{k-1}, y_k) g(y_k) \quad (16)$$

é controllata dalle serie a termini positivi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|\lambda| M_2 |x - a|)^k}{k!} \quad (17)$$

che é convergente per qualunque valore di  $\lambda$ . Per ottenere la (17) abbiamo applicato la formula:

$$\int_a^x dy_1 \int_a^{y_1} dy_2 \dots \int_a^{y_{k-1}} dy_k = \frac{(x - a)^k}{k!} \quad (18)$$

che può essere facilmente provata per induzione. La convergenza della serie (16) rende ovvia la prova del Teorema seguente.

**Teorema 1.2** *La serie di funzioni*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \int_a^x dy_1 \dots \int_a^{y_{k-1}} dy_k K(x, y_1) \dots K(y_{k-1}, y_k) g(y_k) \quad (19)$$

é uniformemente e assolutamente convergente in  $[a, b]$  a un limite  $f$ . La successione  $\{f_n\}$  é una successione di Cauchy convergente a  $f$  che é l'unica soluzione dell'equazione (4).

Lasciamo al lettore la semplice prova di unicitá.

## 2. Teoremi di alternativa

Come abbiamo visto nel precedente paragrafo, mentre l'equazione di Volterra é sempre risolvibile (rimane naturalmente l'importante problema di risolvere esplicitamente o almeno di studiare procedure di approssimazione della soluzioni), l'equazione di Fredholm é, per ora, risolvibile solo sotto opportune ipotesi di piccolezza. Vedremo in questo paragrafo che tali ipotesi possono essere rimosse, almeno sotto certe ipotesi sulla struttura del nucleo  $K$ . Assumeremo che  $K$  abbia una particolare forma:

$$K(x, y) = \sum_{k=1}^n p_k(x) q_k(y) \quad (20)$$

In questo caso si dice che  $K$  é un nucleo separabile.

L'equazione (2) diventa:

$$f(x) - \lambda \sum_{k=1}^n p_k(x) \int_a^b q_k(y) f(y) dy = g(x) \quad (21)$$

o anche:

$$f(x) - \lambda \sum_{k=1}^n p_k(x) c_k = g(x) \quad (22)$$

dove:

$$c_k = \int_a^b q_k(y) f(y) dy \quad (23)$$

sono dei numeri incogniti. Possiamo ora cercare di determinare i numeri  $c_k, k = 1 \dots n$  che, in virtú della (22), forniranno la soluzione del problema.

Integrando la (22) dopo aver moltiplicato ambo i membri per  $q_s$ , si ottiene l'equazione lineare:

$$c_s - \lambda \sum_{k=1}^n A_{s,k} c_k = G_s, \quad (24)$$

dove abbiamo posto:

$$A_{s,k} = \int_a^b q_s(x) p_k(x) dx, \quad G_s = \int_a^b q_s(x) g(x) dx. \quad (25)$$

Introducendo la matrice  $n \times n$ :  $A = A_{s,k}$  e i vettori in  $\mathbb{R}^n$ :  $C = c_k$  e  $G = G_k$ , l'equazione lineare (24) si scrive, in forma piú compatta, nel modo seguente:

$$(1 - \lambda A)C = G. \quad (26)$$

Dunque il problema si riduce a invertire la matrice  $(1 - \lambda A)$ . Dall'algebra lineare sappiamo che tale matrice é invertibile se e solo se  $\det(1 - \lambda A) \neq 0$ . D'altra parte l'equazione (in  $\lambda$ ):

$$\det(1 - \lambda A) = 0 \quad (27)$$

ha  $n$  soluzioni (detti autovalori) in campo complesso (eventualmente coincidenti)  $\lambda_1 \dots \lambda_N$  che soddisfano la (27) e dunque, se  $\lambda$  non é un autovalore,  $(1 - \lambda A)^{-1}$  esiste, i valori  $c_1 \dots c_n$  possono (almeno in linea di principio) essere trovati e l'equazione (21) ammette una soluzione che risulta essere unica come conseguenza dell'unicitá del vettore  $C$ .

Se invece  $\lambda$  é un autovalore, allora esistono soluzioni dell'equazione omogenea:

$$(1 - \lambda A)C = 0. \quad (28)$$

In questo caso é risolubile l'equazione di Fredholm omogenea associata:

$$f(x) - \lambda \sum_{k=1}^n p_k(x) \int_a^b q_k(y) f(y) dy = 0 \quad (29)$$

e le soluzioni costituiscono una varietá lineare  $n$  dimensionale. L'alternativa tra la risolubilitá di un'equazione di Fredholm e quella dell'omogenea associata, che abbiamo per il momento visto solo nel caso di nuclei separabili, é la chiave della teoria delle equazioni di Fredholm che sará sviluppata in tutta la sua generalitá, alla luce della teoria degli operatori compatti su spazi di Hilbert, nel prossimo capitolo. Per il momento possiamo enunciare il seguente:

**Teorema 2.1** *Si consideri l'equazione (2) con  $K$  separabile, della forma (21), con  $\{p_k\}_{k=1}^N$  e  $\{q_k\}_{k=1}^N$  funzioni continue in  $[a, b]$ . Allora vale la seguente alternativa:*

1) l'equazione omogenea ha soluzioni non nulle  $\phi(x)$

$$\lambda \int_a^b K(x, y)\phi(y) = \phi(x) \quad (30)$$

e l'equazione non omogenea non é risolubile per ogni  $g$ ,

oppure

2) l'equazione non omogenea é risolubile per ogni  $g$ .

**Commento** L'equazione agli autovalori (27) ha al piú  $n$  valori di  $\lambda$  per cui puó essere risolta in maniera non banale. Quindi, in qualche senso, i valori di  $\lambda$  per cui la non omogenea é risolubile per ogni  $g$  sono molti di piú.

Il Teorema 2.1 non risolve completamente il problema. Infatti, pur essendo  $\lambda$  un autovalore dell'equazione omogenea, puó anche darsi che la non omogenea sia risolubile per qualche  $g$  che é opportuno caratterizzare. A questo problema riponde il Teorema seguente. Prima di enunciarlo però abbiamo bisogno di un'altra definizione. L'equazione:

$$f(x) - \lambda \int_a^b K(y, x)f(y) = g(x) \quad (31)$$

viene detta equazione aggiunta alla (2) e, procedendo come sopra, si ottiene l'equazione lineare:

$$(1 - \lambda A^t)C = G,$$

dove  $A^t$  denota la matrice trasposta.

**Teorema 2.2** *Nel caso in cui l'equazione omogenea (30) abbia  $k$  soluzioni non nulle, linearmente indipendenti  $\{\phi_1 \dots \phi_k\}$ , allora anche l'equazione omogenea aggiunta ha  $k$  soluzioni non nulle indipendenti  $\{\psi_1 \dots \psi_k\}$ . Perché l'equazione non omogenea abbia soluzione, occorre e basta che  $g$  sia ortogonale (nel senso  $L_2([a, b])$ ) a ogni  $\psi_i$ ,  $i = 1 \dots k$ :*

$$\int_a^b \psi_i(x)g(x) = 0 \quad (32)$$

**Dim** Poiché la dimensione del nucleo della matrice  $(I - \lambda A)$  é uguale alla dimensione del nucleo della matrice  $(I - \lambda A^t)$  (vedi Appendice), se l'equazione

$$E - \lambda A E = 0 \quad (33)$$

ha  $k$  soluzioni indipendenti  $\{E^1 \dots E^k\}$ , anche l'equazione

$$D - \lambda A^t D = 0 \quad (34)$$

ha  $k$  soluzioni indipendenti  $\{D^1 \dots D^k\}$ .

Inoltre, ponendo  $\int_a^b q_k \phi_i = E_k^i$ , risulta che  $E^i$  é un autovettore della (33) e valgono le uguaglianze:

$$\begin{aligned}\phi_i(x) - \lambda \sum p_k(x) E_k^i &= 0 \\ \psi_i(x) - \lambda \sum q_k(x) D_k^i &= 0.\end{aligned}$$

Tornando ora all'equazione:

$$(I - \lambda A)C = G \quad (35)$$

usando il fatto che il codominio di  $(I - \lambda A)$  é ortogonale al nucleo di  $(I - \lambda A^t)$  e la somma di questi due sottospazi esaurisce  $\mathbb{R}^n$ , (vedi Appendice), si ottiene che la (35) é risolubile se il vettore  $G$  é ortogonale ai vettori  $\{D^j\}$

In questo caso dall'identitá  $\sum_{i=1}^n G_i D_i^j = 0$ , segue:

$$\sum_{i=1}^n G_i D_i^j = \int dx \int dy K(y, x) g(x) \psi_j(y) = \lambda^{-1} \int dx g(x) \psi_j(x) \quad (36)$$

e dunque il teorema é dimostrato. ■

I teoremi 2.1 e 2.2 possono essere generalizzati a nuclei  $K(x, y)$  continui in  $[a, b]^2$ . Infatti per ogni  $\varepsilon > 0$  posso trovare  $N$  sufficientemente grande per cui:

$$K(x, y) = K_s(x, y) + K_\varepsilon(x, y) \quad (37)$$

dove  $K_s$  é un nucleo separabile e  $K_\varepsilon$  é un resto piccolo:

$$|K_\varepsilon(x, y)| \leq \varepsilon$$

Ciò é conseguenza del teorema di Weierstrass di approssimazione di funzioni continue in un compatto. L'equazione (2) diventa:

$$f(x) - \lambda \int_a^b K_s(x, y) f(y) dy - \lambda \int_a^b K_\varepsilon(x, y) f(y) dy = g(x) \quad (38)$$

D'altra parte il Teorema 1.1 ci garantisce la risolubilitá per serie dell'equazione:

$$F(x) - \lambda \int_a^b K_\varepsilon(x, y) F(y) dy = G(x) \quad (39)$$

se  $\varepsilon$  é scelto sufficientemente piccolo in rapporto a  $\lambda$ . Se  $S_\varepsilon$  é l'operatore soluzione della (39):

$$F = S_\varepsilon G, \quad (40)$$



possiamo porre, pensando nella (38)  $\lambda \int_a^b K_s(x, y) f(y) dy + g(x)$  come noto:

$$f(x) - \lambda \int_a^b S_\varepsilon K_s(x, y) f(y) dy = S_\varepsilon g(x) \quad (41)$$

dove l'operatore  $S_\varepsilon$  agisce su  $K_s$  rispetto alla prima variabile.

Si osservi ora che l'operatore  $S_\varepsilon$  é lineare e dunque l'equazione (41) é a nucleo separabile:

$$f(x) - \lambda \sum_k \int_a^b S_\varepsilon p_k(x) q_k(y) f(y) dy = S_\varepsilon g(x) \quad (42)$$

Dunque le affermazioni contenute nei Teoremi 2.1 e 2.2 si estendono a nuclei  $K$  che siano continui in  $[a, b]^2$ . Nel prossimo capitolo, comunque, la teoria delle equazioni integrali sará rivista alla luce della teoria generale delle equazioni lineari su spazi di Hilbert.

Concludiamo il paragrafo con un semplice esempio che illustra la strategia discussa in astratto fino adesso.

Si consideri l'equazione integrale a nucleo separabile:

$$f(x) - \lambda e^x \int_0^1 y f(y) dy = g(x).$$

In questo caso il nucleo integrale é formato dal prodotto di due sole funzioni e dunque il problema algebrico associato é di dimensione uno. Infatti, posto

$$c = \int_0^1 x f(x) dx$$

che é una quantitá incognita, risulta:

$$c - \lambda c = G$$

dove  $G = \int_0^1 x g(x) dx$  che é una quantitá nota. Da cui, se  $\lambda \neq 1$ ,

$$c = \frac{G}{1 - \lambda}$$

e la soluzione dell'equazione integrale é:

$$f(x) = g(x) - \lambda c e^x = g(x) + \lambda \frac{G}{1 - \lambda} e^x.$$

Vediamo ora che succede se  $\lambda = 1$ . In questo caso l'equazione integrale omogenea associata

$$f(x) - \lambda e^x \int_0^1 y f(y) dy = 0$$

ammette senz'altro la famiglia di soluzioni  $f(x) = Ce^x$  come si verifica immediatamente. La costante  $C$  non può essere determinata dall'equazione.

D'altra parte, anche l'equazione omogenea associata all'equazione aggiunta :

$$f^*(x) - \lambda x \int_0^1 e^y f^*(y) dy = 0$$

ammette le soluzioni  $f^*(x) = Cx$ . Dunque se  $g$  gode della proprietà di essere ortogonale a queste soluzioni:

$$\int_0^1 xg(x)dx = 0$$

la funzione  $f(x) = g(x)$  è soluzione dell'equazione integrale con  $\lambda = 1$ .

### 3. Motivazioni, esempi ed esercizi

Come già detto, alcuni problemi di interesse per le applicazioni possono essere formalizzati in termini di equazioni integrali. Consideriamo, ad esempio, un fascio di particelle, tutte con velocità lungo l'asse  $x$ , che viaggia in un mezzo che ha la proprietà di rallentare o accelerare le particelle, senza modificarne la direzione. Se  $v$  il modulo della velocità di una data particella, è possibile avere una transizione  $v \rightarrow v'$  con una probabilità  $P(v', v)$  che, naturalmente, dipende dalle proprietà del mezzo. Assumiamo anche che le velocità ammissibili siano nell'intervallo  $[a, b]$ .

Se  $f(v)dv$  è il numero di particelle con velocità compresa tra  $v$  e  $v + dv$ , tale numero nel tempo  $[t, t + dt]$  aumenta perché alcune particelle hanno avuto una transizione  $v' \rightarrow v$ . La variazione dovuta a questa transizione è  $P(v, v')f(v')dv'$  e la variazione totale è:

$$dt \int_a^b P(v, v')f(v')dv'.$$

Nel contempo è possibile anche una transizione  $v \rightarrow v'$  che causa una perdita alla quantità  $f(v)dv$ . Tale perdita è:

$$-dt f(v) \int_a^b P(v', v)dv' = -dt f(v)$$

Qui abbiamo usato che  $\int P(v', v)dv' = 1$ .

Dunque:

$$df(v, t) = dt \int_a^b P(v, v')f(v', t)dv' - dt f(v, t) + g(v)dt$$

Il termine  $gdt$  descrive la variazione del numero di particelle con velocità  $v$ , dovuto ad un agente esterno noto e indipendente dal tempo.

In definitiva il nostro fenomeno é schematizzato dall'equazione integrodifferenziale:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(v, t) = \int_a^b P(v, v')f(v', t)dv' - f(v, t) + g(v) \quad (43)$$

dove  $g = g(v)$  é una funzione nota e  $f = f(v, t)$  é l'incognita del nostro problema. Se siamo interessati a sapere se esistono soluzioni di equilibrio (stazionarie) per il problema appena descritto, dobbiamo dunque studiare l'equazione di Fredholm:

$$\int_a^b P(v, v')f(v', t)dv' - f(v, t) + g(v) = 0 \quad (44)$$

Sulla base del teorema di alternativa visto nel precedente pragrafo o il sistema ha la possibilitá di raggiungere un equilibrio senza interventi esterni e questo equilibrio é descritto da una soluzione non banale della omogenea:

$$\int_a^b P(v, v')f(v', t)dv' - f(v, t) = 0 \quad (45)$$

oppure ciò non é possibile, ma allora ho un regime stazionario, descritto dalla (44) per ogni scelta di azioni esterne  $g$ .

In realtà ciò non é del tutto vero. Il problema sotto esame richiede soluzioni positive e l'analisi svolta fin qui non mi dice molto circa la positività delle soluzioni che possiamo ottenere. Un'analisi della positività delle soluzioni sotto opportune ipotesi sul nucleo  $P$  é al di lá degli scopi di queste note e, del resto, l'esempio citato non vuole essere altro che un'idea su come le equazioni integrali possano apparire nelle applicazioni.

Lo studio di equazioni lineari a coefficienti non costanti, può essere ricondotto allo studio di equazioni tipo Volterra.

Consideriamo il caso del problema di Cauchy associato ad un'equazione del secondo ordine:

$$y'' + a_1y' + a_2y = F \quad (46)$$

con condizioni iniziali:

$$y(0) = c_1, \quad y'(0) = c_2$$

Posto  $f = y''$  e dunque  $y'(x) = \int_0^x f(x)dx + c_2$  otteniamo:

$$y(x) = c_1 + c_2x + \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 f(x_2) = c_1 + c_2x + \int_0^x dx_1(x - x_1)f(x_1).$$

Infine utilizzando la (46) si ottiene:

$$a_2(x)c_1 + c_2a_2(x)x + a_2(x) \int_0^x dx_1(x - x_1)f(x_1) +$$

$$a_1(x) \int_0^x f(x) dx + a_1(x)c_2 + f(x) = F(x)$$

da cui si perviene ad un'equazione di Volterra con:

$$g(x) = F - a_2(x)(c_1 + c_2x) - a_1(x)c_2$$

e

$$K(x, t) = a_1(x) + a_2(x)(x - t)$$

Quanto visto si può facilmente generalizzare al caso di un'equazione lineare:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = F \quad (47)$$

con condizioni iniziali

$$y^{(k)}(0) = c_k \quad k = 1 \dots n - 1$$

Lasciamo al lettore per esercizio la riduzione del problema (47) ad un'equazione di Volterra.

**Esercizio 1** Derivare un'equazione integrale corrispondente ai problemi di Cauchy seguenti:

$$1) y'' - 5y' + 6y = 0; \quad y(0) = 0; y'(0) = 1$$

$$2) y'' + y = \cos x; \quad y(0) = 0; y'(0) = 1$$

$$3) y'' + xy + y = 0; \quad y(0) = 1; y'(0) = 0$$

Equazioni integrali del tipo:

$$f(x) - \int_0^x k(x-y)f(y)dy = g(x)$$

si chiamano equazioni di convoluzione perché l'operatore integrale è un prodotto di convoluzione. Tali equazioni si possono risolvere con la tecnica della trasformata di Laplace, definita da:

$$\tilde{f}(p) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-px} dx$$

per  $p \in \mathbb{C}$ , che permette di ridurre il problema dell'equazione di Volterra ad un problema algebrico. Infatti ricordando che la trasformata di Laplace di un prodotto di convoluzione è il prodotto delle trasformate, l'equazione di convoluzione considerata diventa:

$$\tilde{f}(p) - \tilde{K}(p)\tilde{f}(p) = \tilde{g}(p)$$

che fornisce la soluzione calcolando la trasformata di Laplace inversa.

**Esercizio 2** Si risolva:

$$f(x) = \sin x + 2 \int_0^x \cos(x-y)f(y)dy$$

Svolgimento: Le trasformate di  $\sin x$  e  $\cos x$  sono  $\frac{1}{p^2+1}$  e  $\frac{p}{p^2+1}$  rispettivamente. Si trova dunque facilmente:

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{(p-1)^2}$$

da cui risulta  $f(x) = xe^x$  dopo aver calcolato l'antitrasformata di Laplace in campo complesso.

**Esercizio 3** Risolvere le seguenti equazioni integrali:

$$1) \quad f(x) = e^x + \int_0^x e^{x-t}f(t)dt$$

$$2) \quad f(x) = 1 - 2x - \int_0^x e^{(x^2-y^2)}f(y)dy$$

$$3) \quad \int_0^x e^{x-y}f(y) = x$$

**Esercizio 4** Risolvere l'equazione di Fredholm:

$$f(x) + \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \cos y f(y)dy = g(x)$$

Svolgimento. Posto  $a = \int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx$ , moltiplicando l'equazione per  $\cos x$  e integrando si ottiene:

$$a = \int_0^{2\pi} \cos x g(x) dx$$

da cui  $f(x) = g(x) - \lambda \sin x \int_0^{2\pi} \cos y g(y) dy$

**Esercizio 5** Risolvere le equazioni di Fredholm relative ai seguenti nuclei:

$$K(x, y) = 2x - y \quad K(x, y) = x^2y - xy^2$$

con termine noto  $g$ .

**Esercizio 6** Calcolare autovalori e autofunzioni dei seguenti problemi

$$1) \quad f(x) - \lambda \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x f(y) = 0$$

$$2) \quad f(x) - \lambda \int_0^{\pi/4} \sin x \cos y f(y) = 0$$

$$3) \quad f(x) - \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+y) f(y) = 0$$

## Appendice

Ricordiamo preliminarmente alcuni fatti di algebra lineare che dovrebbero essere già noti al lettore.

Consideriamo lo spazio  $H = \mathbb{C}^n$  e denotiamo il prodotto scalare nel modo seguente:  
 $(f, g) = \sum_{j=1}^n \bar{f}_j g_j$ .

Sia ora data l'equazione lineare

$$Af = g \tag{48}$$

in  $H$ .  $A$  é una matrice  $n \times n$ ,  $g$  é un vettore assegnato e  $f$  é il vettore incognito. Si denoterá con  $A^*$  la sua matrice aggiunta ( $(A^*)_{i,j} = (\bar{A})_{j,i}$ ). Denotiamo con  $Ker A$  il nucleo di  $A$ , con  $R_A$  il codominio di  $A$  e con  $Ran A = dim R_A$  il suo rango (cioé la dimensione del suo codominio).

E' ben noto che se  $Ker A = \emptyset$  allora l'equazione (48) é risolubile per ogni  $g \in H$ .

### Teorema A.1

Sia  $Ker A \neq \emptyset$  e  $dim (Ker A) = k$ . Allora  $dim (Ker A^*) = k$ . Siano  $\{u_1 \dots u_k\} \in Ker A^*$ ,  $k$  vettori linearmente indipendenti. Allora l'equazione (48) é risolubile se e solo se  $(g, u_j) = 0$  per ogni  $j = 1 \dots k$ .

**Dim.** Se  $u \in Ker A^*$  allora:

$$(A^*u, v) = (u, Av) = 0 \tag{49}$$

per ogni  $v \in H$ . Ci si convince allora che  $Ker A^* \perp R_A$ . Inoltre segue che se  $v \in R_A$ , allora  $v \perp Ker A^*$  e dunque:

$$\begin{aligned} H &= Ker A^* \oplus R_A \\ H &= Ker A \oplus R_A^* \end{aligned} \tag{50}$$

Quindi per un generico  $u \in H$  possiamo scrivere in maniera unica:

$$u = u_1 + u_2 \tag{51}$$

con  $u_1 \in Ker A$  e  $u_2 \in R_A^*$ .

Dalla relazione:

$$Au = Au_1 + Au_2 = Au_2$$

possiamo poi dedurre che:

$$\text{Ran}A = \dim A(R_{A^*}) \leq \dim R_{A^*} = \text{Ran}A^*.$$

Scambiando i ruoli tra  $A$  e  $A^*$  si evince che  $\text{Ran}A = \text{Ran}A^*$  e, passando ai sottospazi complementari:

$$\dim(\text{Ker}A^*) = \dim(\text{Ker}A).$$

Infine se  $g$  é ortogonale a  $\text{Ker}A^*$  ne segue che  $g \in R_A$  e dunque l'equazione (46) é risolubile.

■

Come corollario abbiamo il seguente teorema di alternativa.

**Corollario.**

Vale una e soltanto una delle affermazioni seguenti

- 1) l'equazione  $(I - A)f = g$  ha soluzione per ogni  $g \in H$  ( $R_{(I-A)} = H$ );
- 2) l'equazione  $A^*f = f$  ammette soluzioni non banali ( $\text{Ker}(I - A^*) \neq \emptyset$ ) . In quest'ultimo caso  $(I - A)f = g$  ammette soluzione per  $g \perp \text{Ker}(I - A^*)$ .

Le precedenti considerazioni valgono naturalmente anche nel caso che la matrice  $A$  sia considerata in  $\mathbb{R}^n$ . In questo caso alla matrice aggiunta va sostituita la matrice trasposta.

## 2. Operatori lineari sugli spazi di Hilbert

### 1. Richiami sugli spazi di Hilbert

In questo paragrafo richiameremo alcune nozioni di base sugli spazi di Hilbert e fisseremo le notazioni. Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert complesso. Denotiamo con lettere ordinarie  $f, g, u, v \dots$  i suoi elementi, con  $(\cdot, \cdot)$  il prodotto scalare, con  $\|\cdot\| = |(\cdot, \cdot)|^{1/2}$  la sua norma e con lettere greche  $\alpha, \beta \dots$  gli elementi di  $\mathbb{C}$ . Assumeremo la convenzione che il prodotto scalare é lineare a destra e antilineare a sinistra:

$$(f, \alpha g) = \alpha(f, g), \quad (\alpha f, g) = \bar{\alpha}(f, g).$$

Esempi classici di spazi di Hilbert sono  $L^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $L^2((0, 1))$  e  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . Essi sono lo spazio delle funzioni quadrosommabili in  $\mathbb{R}^n$  e  $(0, 1)$  rispettivamente e lo spazio delle successioni  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  tali che  $\sum_k |a_k|^2 < \infty$ .

In realtà tali spazi sono Hilbertianamente isomorfi e costituiscono esempi concreti di uno spazio di Hilbert separabile.

Sia  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  una successione di elementi di  $\mathcal{H}$ . Si dice che  $f_n$  é convergente ad  $f$  (talora fortemente convergente) se accade che:

$$\|f - f_n\| \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . La successione  $f_n$  si dice debolmente convergente ad  $f$ , se per ogni elemento  $g \in \mathcal{H}$  accade che:

$$(g, f - f_n) \rightarrow 0$$

per  $n \rightarrow \infty$ .

É facile verificare che una successione convergente é anche debolmente convergente mentre l'inverso non é vero.

**Nota.**  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ . Sia  $h$  una funzione continua supportata in  $[-1, 1]$  e sia  $f_n(x) = h(x - n)$ . Allora per ogni  $g \in \mathcal{H}$ :

$$(g, f_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}(x)h(x - n)dx = \int_{n-1}^{n+1} \bar{g}(x)h(x - n)dx$$

da cui, utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$|(g, f_n)| \leq \sqrt{2}\|h\| \left( \int_{n-1}^{n+1} |\bar{g}(x)|^2 dx \right)^{1/2} \rightarrow 0,$$



per cui  $f_n \rightarrow 0$  debolmente. D'altra parte si ha che  $\|f_n\| = \|h\|$  per cui la successione non converge fortemente a zero.

**Esercizio** Costruire esempi di successioni debolmente, ma non fortemente convergenti in  $L^2([0, 1])$  e  $l^2$ . (Suggerimento: si usi il Teorema di Riemann-Lebesgue).

Una serie di elementi  $\{f_n\}$ , denotata con:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n,$$

si dice convergente in  $\mathcal{H}$  se le somme parziali costituiscono una successione convergente. Una condizione sufficiente alla convergenza é la convergenza della serie delle norme:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|.$$

Verificare per esercizio l'asserto.

Un insieme di elementi  $\{e_j\}$  con  $j \in S$ , si dice una base ortonormale in  $\mathcal{H}$  se  $(e_i, e_j) = 0$  per ogni coppia  $i \neq j$  in  $S$  ( $S$  é un insieme qualunque di indici) e se la varietà lineare generata da  $S$  é densa in  $\mathcal{H}$ . Ricordiamo che uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  con una base numerabile si dice separabile.

In queste note considereremo solo spazi separabili.

Sia dunque  $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  una base ortonormale per  $\mathcal{H}$ . Allora ogni elemento  $f \in \mathcal{H}$  si scrive, in maniera unica, nella forma:

$$f = \sum_{j \in \mathbb{N}} c_j e_j = \sum_{j \in \mathbb{N}} (e_j, f) e_j$$

e vale l'identitá (detta di Parseval):

$$\|f\|^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}} |c_j|^2.$$

Inoltre si ha che, se  $f = \sum_{j \in \mathbb{N}} c_j e_j$  e  $g = \sum_{j \in \mathbb{N}} d_j e_j$ , allora  $(f, g) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \bar{c}_j d_j$ .

Prendendo spunto dalla teoria della serie di Fourier, é possibile stabilire un isomorfismo Hilbertiano tra gli spazi  $l^2$  (delle successioni quadrosommabili) e  $L^2([0, 2\pi])$ . Per questa ragione i coefficienti  $c_j$  di uno sviluppo di un elemento  $f \in \mathcal{H}$  secondo una qualunque base ortonormale, vengono detti coefficienti di Fourier.

Un funzionale lineare  $l : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  é un'applicazione lineare, cioè tale che

$$l(\alpha f + \beta g) = \alpha l(f) + \beta l(g), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}; \quad f, g \in \mathcal{H}.$$

Un funzionale lineare  $l$  si dice continuo se, per ogni successione  $f_n$  convergente a  $f$ , risulta che  $l(f_n)$  converge a  $l(f)$ . Un funzionale lineare  $l$  si dice limitato se accade che  $|l(f)| \leq C\|f\|$ , per ogni  $f \in \mathcal{H}$ , con  $C$  indipendente da  $f$ . Il minimo  $C$  che soddisfa questa disuguaglianza si chiama norma di  $l$  e si denota con  $\|l\|$ .

Si dimostra facilmente che i funzionali lineari continui, sono tutti e soli quelli limitati. Dimostrare per esercizio l'asserto e, se non ci si riesce, vedere il Lemma 2.2 seguente.

Fissato  $g \in \mathcal{H}$ , l'applicazione  $l_g : f \rightarrow (g, f)$  é un funzionale lineare limitato, con  $\|l_g\| = \|g\|$ . Viceversa tutti i funzionali lineari limitati (e dunque continui) sono di questo tipo. In altre parole dato  $l$ , funzionale lineare continuo,  $\exists g_l \in \mathcal{H}$  tale che, per tutti gli  $f \in \mathcal{H}$ , risulta che  $l(f) = (g_l, f)$ . Questo é quanto affermato dal teorema di Riesz.

## 2. Operatori lineari

Sia  $D_A \subset \mathcal{H}$  un sottospazio lineare. Un'applicazione  $A : D_A \rightarrow \mathcal{H}$  si dice un operatore lineare se agisce linearmente sugli elementi di  $D_A$ . In altre parole:

$$A(\alpha f + \beta g) = \alpha A f + \beta A g \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}; \quad f, g \in D_A$$

$D_A$  viene detto dominio di definizione di  $A$ . L'insieme di vettori  $R_A \equiv \{A f | f \in D_A\}$ , viene detto codominio di  $A$ .

In quanto segue si considereranno sempre, salvo contrario ed esplicito avviso, operatori densamente definiti in  $\mathcal{H}$  o definiti su tutto  $\mathcal{H}$  (cioé  $D_A$  si assumerá essere un sottospazio denso di  $\mathcal{H}$  o coincidente con  $\mathcal{H}$ ).

Un operatore lineare  $A$  si dice continuo se, per ogni successione  $f_n$  convergente al limite  $f$ , risulta convergente la successione  $A f_n$  e il suo limite é  $A f$ .

Un operatore lineare  $A$  si dice limitato se vale la disuguaglianza:

$$\|A f\| \leq C \|f\| \quad f \in \mathcal{H} \tag{52}$$

(con  $C$  indipendente da  $f$ ). L'estremo inferiore di tutti gli  $C$  per cui la disuguaglianza (52) é verificata si chiama norma di  $A$  e si denota con  $\|A\|$ . Esplicitamente:

$$\|A\| = \sup_{f \in \mathcal{H}; f \neq 0} \frac{\|A f\|}{\|f\|} = \sup_{\{f \in \mathcal{H} | \|f\|=1\}} \|A f\|.$$

**Esempio**  $\mathcal{H} = L^2([0, 1])$ ,  $h \in C([0, 1])$ . Definiamo l'operatore lineare:

$$M_h f(x) = h(x)f(x)$$

(operatore di moltiplicazione per la funzione  $h$ ) definito su tutto  $\mathcal{H}$ . Risulta:

$$\|M_h f\| \leq \|h\|_\infty \|f\|$$

e dunque  $\|M_h\| \leq \|h\|_\infty$ . Vogliamo mostrare che vale l'uguaglianza. Sia  $H = \max h = h(x_0)$  e si scelga  $f \in \mathcal{H}$  tale che:  $f = 1$  su  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$  e  $f = 0$  al di fuori di tale intervallo. Allora, posto  $H_\varepsilon = \min_{x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]} h(x)$ :

$$\|M_h f\|^2 = \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} |h(x)|^2 \geq 2H_\varepsilon^2 \varepsilon$$

e dunque

$$\|M_h f\| \geq H_\varepsilon \sqrt{2\varepsilon} \geq H_\varepsilon \|f\|$$

da cui

$$\|M_h\| \geq H_\varepsilon$$

Poiché  $H_\varepsilon \rightarrow H$  per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ne segue che  $\|M_h\| \geq H = \|h\|_\infty$ .

**Lemma 2.1** *A é continuo se e solo se é continuo in zero, cioè per ogni successione  $f_n$  convergente a zero, anche  $Af_n$  é convergente a zero.*

**Dim** Se  $A$  é continuo é anche continuo in zero. Se é continuo in zero, per ogni  $f_n$  convergente a  $f$ ,  $A(f - f_n)$  é convergente a zero.  $A$  é dunque continuo per la linearità. ■

**Lemma 2.2** *A é continuo se e solo se é limitato.*

**Dim** Supponiamo  $A$  limitato e sia  $f_n$  convergente a zero. Dunque  $\|Af_n\| \leq \|A\| \|f_n\| \rightarrow 0$ , per cui  $A$  é continuo in zero. Viceversa se  $A$  é continuo, supponendo per assurdo che  $A$  non sia limitato, deve esistere una successione  $f_n$  tale che  $\|Af_n\| > n\|f_n\|$  con  $\|f_n\| = 1$  (infatti deve essere  $\sup\{\|Af\| : \|f\| = 1\} = \infty$ ). Allora, posto  $g_n = f_n/n$  risulta  $\|g_n\| = 1/n$  e  $\|Ag_n\| > 1$  e quindi non é convergente a zero, contrariamente all'ipotesi di continuità. ■

**Lemma 2.3** *Sia  $D_A$  denso e  $A$  limitato. Allora esiste un'unica estensione  $\bar{A}$ , operatore limitato, definito in tutto  $\mathcal{H}$ .*

**Dim**  $\bar{A}$  é definito per continuitá. Se  $f \notin D_A$ , sia  $\{f_n\} \subset D_A$  una successione convergente a  $f$ . Poiché  $A$  é limitato,  $Af_n$  é di Cauchy. Infatti  $\|A(f_n - f_m)\| \leq \|A\| \|f_n - f_m\| \rightarrow 0$ . Sia  $g = \lim Af_n$ . Si definisce  $\bar{A}f = g$ . É facile vedere che  $g$  non dipende dalla successione  $f_n$  scelta e dunque la definizione é ben posta. ■

**Esempio** Sia  $\mathcal{H} = L^2([0, 1])$   $Af = \frac{d}{dx}f$ ,  $D_A = C^1([0, 1])$ .  $A$  é densamente definito, ma non limitato. Infatti la successione di funzioni  $f_n(x) = e^{-nx}$  tende a zero in  $\mathcal{H}$ , ma  $Af_n$  non é convergente (la successione delle norme é divergente).

**Esempio** Si consideri l'operatore trasformata di Fourier:

$$(\mathcal{F}f)(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ipx} f(x) dx$$

definito nel dominio  $D_{\mathcal{F}} = \mathcal{S} \subset L_2(\mathbb{R})$ .

Ricordiamo che  $\mathcal{S}$  é lo spazio delle funzioni  $C^\infty$  a decrescenza rapida e cioé che decadono piú rapidamente di ogni polinomio. Sappiamo che

$$\|\mathcal{F}f\| = \|f\|.$$

Quindi  $\mathcal{F}$  é continuo. Può dunque essere esteso a tutte le funzioni di  $L^2(\mathbb{R})$  ed é questo il senso che possiamo dare alla trasformata di Fourier di una funzione  $L^2$  che, a priori, é definita solo per funzioni  $L^1$ . D'altra parte una funzione di  $L^2$  può essere anche pensata come una distribuzione temperata su cui é definibile la trasformata di Fourier. Si verifichi che le due nozioni coincidono.

A causa del Lemma 2.3 gli operatori limitati si assumono sempre definiti su tutto  $\mathcal{H}$ . Essi costituiscono uno spazio lineare denotato con  $B(\mathcal{H})$ . In realtà  $B(\mathcal{H})$  costituisce un'algebra. Infatti se  $A_i \in B(\mathcal{H})$ ,  $i = 1, 2$ , allora  $A_1 A_2 \in B(\mathcal{H})$ , infatti si ha  $\|A_1 A_2\| \leq \|A_1\| \|A_2\|$ , come da verifica immediata.

Sia  $A \in B(\mathcal{H})$ . Consideriamo il funzionale lineare  $l_g(f) = (g, Af)$ . Per il Teorema di Riesz, deve esistere un vettore  $h$  tale che:

$$(h, f) = (g, Af).$$

É evidente che l'applicazione  $g \rightarrow h$  é lineare e dunque definisce un operatore, detto operatore aggiunto e denotato con  $A^*$ , definito su tutto  $\mathcal{H}$ :

$$(A^*g, f) = (g, Af).$$

Sono di immediata verifica le identità  $(AB)^* = B^*A^*$  e  $(A^*)^* = A$ .

La seguente é una lista di proprietá dell'operatore aggiunto.

**Lemma 2.4** L'applicazione  $A \in B(\mathcal{H}) \rightarrow A^* \in B(\mathcal{H})$  é biettiva, antilineare:

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)^* = \bar{\alpha} A_1^* + \bar{\beta} A_2^* \quad (53)$$

e isometrica:

$$\|A^*\| = \|A\|. \quad (54)$$

Inoltre, se  $A$  é dotato di inverso (denotato con  $A^{-1}$ ) allora  $A^*$  é invertibile e vale:

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} \quad (55)$$

**Dim** La (53) é ovvia.

Sia  $f \in \mathcal{H}$ . Allora:

$$\|Af\|^2 = (Af, Af) = (A^*Af, f) \leq \|A^*\| \|Af\| \|f\|, \quad (56)$$

da cui segue che  $\|A\| \leq \|A^*\|$ . Inoltre, poiché  $A^{**} = A$  segue anche che  $\|A^*\| \leq \|A\|$ .

La (55) é ovvia. ■

Un operatore  $A \in B(\mathcal{H})$  tale che  $A = A^*$  si chiama autoaggiunto (o simmetrico o hermitiano).

Un esempio notevole di operatori autoaggiunti sono i proiettori ortogonali che andiamo a definire come ovvia generalizzazione dei proiettori in spazi a dimensione finita. Sia  $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  una base ortonormale e  $S \subset \mathbb{N}$  un insieme di indici (finito o infinito). Denotiamo con  $M_S$  il sottospazio di  $\mathcal{H}$  generato dai vettori  $\{e_j\}_{j \in S}$ , cioè la varietà delle combinazioni lineari formate con gli elementi di  $\{e_j\}_{j \in S}$ , chiusa per la topologia di  $\mathcal{H}$ . Ad ogni elemento  $f = \sum_{j \in \mathbb{N}} c_j e_j$ , associamo l'elemento  $Pf = \sum_{j \in S} c_j e_j \in M_S$ . L'applicazione  $f \rightarrow Pf$  é lineare. Inoltre:

$$\|Pf\|^2 = \sum_{j \in S} |c_j|^2 \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} |c_j|^2 = \|f\|^2 \quad (57)$$

da cui segue che  $\|P\| \leq 1$ . Siccome per gli elementi di  $M_S$  la (57) diventa un'uguaglianza, si evince che  $\|P\| = 1$ . Infine, se  $g = \sum_{j \in \mathbb{N}} d_j e_j$ , dall'identità:

$$(g, Pf) = \sum_{j \in S} c_j (g, e_j) = \sum_{j \in S} \bar{d}_j c_j = (Pg, f)$$

ne segue che  $P$  é autoaggiunto. E' anche facile verificare che  $P^2 = P$ .

**Esercizio 1** Sia  $\mathcal{H} = L^2([-1, 1])$  e  $S \in B(\mathcal{H})$  definito da:

$$Sf(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

Provare che  $S$  é un proiettore ortogonale e caratterizzare esplicitamente il sottospazio e il suo ortogonale in termini di serie di Fourier.

Un operatore  $U \in B(\mathcal{H})$  si dice unitario se é surgettivo:

$$(Uf, Ug) = (f, g) \quad (58)$$

per ogni  $f, g \in \mathcal{H}$ . Se  $U$  é unitario, allora:

$$U^* = U^{-1} \quad (59)$$

**Esercizio 2** Verificare che l'operatore:

$$Uf(x) = f(x + 1)$$

in  $L_2(\mathbb{R})$  é unitario. Costruire esempi di operatori unitari in  $L_2([0, 1])$  e  $l_2$ .

**Esercizio 3** Dimostrare che un operatore surgettivo e isometrico é necessariamente unitario. Un operatore  $U \in B(\mathcal{H})$  si dice isometrico se  $\|Uf\| = \|f\|$  per ogni  $f \in \mathcal{H}$ .

**Esercizio 4** Sia  $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$ ,  $a \in \mathcal{H} = \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . L'operatore  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  é definito da

$$(Ua)_k = a_{k+1}, a_1 = 0.$$

Allora  $U$  é isometrico, ma non unitario. Determinare  $U^*$ .

**Esercizio 5** Sia  $A \in B(\mathcal{H})$  un operatore simmetrico. Definiamo:

$$M = \sup_{\{f \in \mathcal{H} \mid \|f\|=1\}} |(f, Af)|.$$

Allora risulta che  $M \leq \|A\|$ . Provare che  $M = \|A\|$ .

Suggerimento. Si usi l'identitá:

$$(A(f + g), f + g) - (A(f - g), f - g) = 2(Af, g) + 2(Ag, f)$$

per provare che:

$$2(Af, g) + 2(Ag, f) \leq M(\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2)$$

Dall'identità del parallelogramma ( $\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$ ) segue poi che:

$$(Af, g) + (Ag, f) \leq M(\|f\|^2 + \|g\|^2)$$

Si usi infine questa disuguaglianza con  $g = (Af/\|Af\|)\|f\|$ .

Sulla base di quanto provato in questo esercizio, si evince l'importante identità:

$$\|A^*A\| = \|A\|^2. \quad (60)$$

E' possibile definire varie nozioni di convergenza in  $B(\mathcal{H})$ . Sia  $\{A_n\}$  una successione di operatori in  $B(\mathcal{H})$ :

1) si dice che tale successione é convergente in norma (o uniformemente) se esiste  $A \in B(\mathcal{H})$  tale che:

$$\|A - A_n\| \rightarrow 0$$

per  $n \rightarrow \infty$ ,

2) é convergente fortemente se esiste  $A \in B(\mathcal{H})$  tale che:

$$\|Af - A_n f\| \rightarrow 0$$

per  $n \rightarrow \infty$ , per ogni  $f \in \mathcal{H}$ ,

3) é convergente debolmente se esiste  $A \in B(\mathcal{H})$  tale che:

$$((A - A_n)f, g) \rightarrow 0$$

per  $n \rightarrow \infty$ , per ogni coppia  $f, g \in \mathcal{H}$ . E' facile verificare che la nozione di convergenza 1) implica 2) che implica 3). L'inverso non é vero.

**Esempio** Sia  $\{e_j\}$  una base ortonormale in  $\mathcal{H}$  e

$$P_N f = \sum_{j=1}^N (e_j, f) e_j$$

una successione di proiettori ortogonali. Allora  $P_N \rightarrow I$  per  $N \rightarrow \infty$  fortemente, ma non in norma (infatti  $\|P_N - I\| = 1$ ). La successione di unitari  $U_n f(x) = f(x + n)$  in  $L_2(\mathbb{R})$ , converge debolmente a zero. Ma si ha anche che  $\|U_n f\| = \|f\|$  e quindi tale successione non converge fortemente.

**Esercizio 5** Si costruisca un esempio di successione convergente in norma.

**Esercizio 6** Si costruiscano esempi di successioni fortemente convergenti, ma non in norma e successioni debolmente convergenti, ma non fortemente, negli spazi  $l_2$  e  $L_2([0, 1])$ .

### 3. Operatori compatti

Un insieme compatto in  $\mathcal{H}$  é un insieme chiuso per cui, presa una qualunque successione in tale insieme, posso estrarre una sottosuccessione convergente. É ben noto che gli insiemi compatti di  $\mathbb{C}^n$  sono tutti e soli gli insiemi chiusi e limitati. Questo non é piú vero per uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ . Infatti se  $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  é una base ortonormale, certamente ogni suo elemento é contenuto nella palla unitaria di  $\mathcal{H}$ . Tuttavia poiché  $\|e_j - e_i\| = \sqrt{2}$  per ogni  $i \neq j$ , ne segue che é impossibile estrarre una sottosuccessione convergente. per cui la palla unitaria non é compatta. Sorge naturale la questione di caratterizzare gli insiemi compatti in  $\mathcal{H}$ . Cominciamo con l'osservare che un insieme chiuso e limitato, contenuto in uno spazio finito-dimensionale, é ovviamente compatto. Ció si dimostra facilmente usando lo stesso argomento che vale per  $\mathbb{C}^n$ . Ci possiamo domandare se tutti i compatti di  $\mathcal{H}$  sono solo gli insiemi limitati contenuti in sottospazi finito dimensionali. La risposta, come vedremo tra un attimo, é negativa. Consideriamo una base ortonormale  $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  e l'insieme dei vettori

$$M = \{f | f = \sum_{j \in \mathbb{N}} f^j e_j, \quad |f^j| \leq C 2^{-j}\}, \quad (61)$$

dove  $C$  é una costante positiva. Sia  $f_k$  una successione in  $M$ . Se  $P_n$  denota il proiettore su  $M_n$  il sottospazio generato da  $\{e_1 \dots e_n\}$ , possiamo sempre trovare una sottosuccessione  $f_{k_i}$  tale che  $P_n f_{k_i}$  é convergente (in  $M_n$ ). Con il solito argomento diagonale (quello del teorema di Ascoli-Arzelá), é possibile trovare una sottosuccessione comune a tutti gli  $M_n$  ancora denotata con  $f_{k_i}$ . Fissato poi  $\varepsilon > 0$  ad arbitrio, posso trovare  $n$  cosí grande da avere:

$$\|(I - P_n) f_{k_i}\|^2 \leq \sum_{j > n} |f_{k_i}^j|^2 < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^2 \quad (62)$$

(uniformemente in  $k_i$ : é questo il punto importante!), ma anche, per la compattezza finito dimensionale, posso trovare  $j$  sufficientemente grande, per cui per  $i > j$ :

$$\|P_n(f_{k_i} - f_{k_j})\|^2 < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^2. \quad (63)$$

Quindi:

$$\|f_{k_i} - f_{k_j}\| \leq \|(1 - P_n) f_{k_i}\| + \|(1 - P_n) f_{k_j}\| + \|P_n(f_{k_i} - f_{k_j})\| < \varepsilon. \quad (64)$$

Ció prova la compattezza di  $M$ .

Dunque abbiamo trovato l'esistenza di compatti infinito dimensionali.

Riflettiamo sull'esempio appena discusso. Introduciamo l'insieme

$$\bar{M} = \{f | f = \sum_{j \in \mathbb{N}} f^j e_j, \quad |f^j| \leq C(f) 2^{-j}\}.$$



dove  $C(f)$  é una costante che dipende da  $f$ . Allora si vede che  $\bar{M}$  non é compatto. Nel confronto tra le definizioni di  $M$  e  $\bar{M}$  emerge la differenza fondamentale: nel primo caso la costante  $C$  non dipende dalla funzione. Tale indipendenza é la causa della compattezza di  $M$ .

La nozione di compattezza dipende dalla topologia che si considera per cui abbiamo maggiori possibilitá di trovare insiemi compatti in topologie piú deboli. Ci domandiamo pertanto quali sono i compatti per la topologia debole. Questo vuol dire cercare un insieme debolmente chiuso e tale che ogni successione in esso, ammetta sottosuccessioni debolmente convergenti.

É facile dimostrare il seguente teorema.

**Teorema 3.1** *Ogni insieme limitato e chiuso é debolmente compatto*

**Dim** Si consideri una successione  $f_n$  uniformemente limitata, tale cioé che  $\|f_n\| \leq C$ . Vogliamo mostrare che siamo in grado di estrarre una sottosuccessione debolmente convergente.

Sia  $\{e_k\}$  una base ortonormale in  $\mathcal{H}$ . Fissato  $k$ ,  $(f_n, e_k)$  é una serie numerica limitata, poiché  $|(f_n, e_k)| \leq \|f_n\| \|e_k\| \leq C$  e quindi possiamo ricavare una sottosuccessione convergente. Con il solito procedimento diagonale possiamo trovare un sottosuccessione comune per tutti i  $k$  (denotata con  $n_i$ ), tale che:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (f_{n_i}, e_k) = c_k.$$

Lasciamo come esercizio al lettore dimostrare che il vettore  $f = \sum c_k e_k$  é ben definito e che é il limite (debole) di  $f_{n_i}$ . ■

Un operatore  $A \in B(\mathcal{H})$  si dice compatto se trasforma insiemi limitati in insiemi relativamente compatti. (Si ricorda che un insieme relativamente compatto é un insieme la cui chiusura é un insieme compatto). Gli operatori compatti giocheranno un ruolo importante nelle applicazioni.

Un esempio importante di operatori compatti é dato dagli operatori di rango finito che stiamo per introdurre.

Un operatore  $A$  si dice di rango finito se il suo codominio é finito dimensionale. In altre parole, sia  $\{y_1 \dots y_n\}$  una successione finita e fissata di vettori indipendenti. Allora per ogni  $f \in \mathcal{H}$ ,  $Af = \sum_{j=1}^n \alpha_j y_j$ , per qualche successione  $\{\alpha_1 \dots \alpha_n\}$  (naturalmente dipendente da  $f$ ). In particolare se  $M$  é il sottospazio generato da  $\{y_1 \dots y_n\}$  ed  $E$  il proiettore ortogonale su  $M$ , deve essere  $Af = EAf$ .

Come esempio semplice di operatori di rango finito consideriamo  $\{e_k\}$  una base ortonormale di  $\mathcal{H}$ . Sia  $P_k$  il proiettore ortogonale sul sottospazio  $e_k$ . Allora

$$A = \sum_{k=1}^N \beta_k P_k$$

é un operatore di rango finito.

Gli operatori di rango finito hanno un codominio finito-dimensionale e quindi trasformano insiemi limitati in insiemi compatti e dunque sono compatti.

**Esempio** Consideriamo lo spazio di Hilbert  $\mathcal{H} = L_2([a, b])$  e l'operatore lineare:

$$Af(x) = \int_a^b K(x, y) f(y) dy \quad f \in \mathcal{H}$$

con

$$K(x, y) = \sum_{k=1}^n p_k(x) q_k(y) \quad p_k, q_k \in \mathcal{H}$$

dove  $p_k$  e  $q_k$  sono vettori indipendenti.  $A$  é un operatore di rango finito. Si osservi che tali operatori sono già stati considerati nello studio delle equazioni integrali a nucleo separabile.

É facile dimostrare che una combinazione lineare di operatori compatti é un operatore compatto.

Il seguenti due teoremi ci forniscono delle caratterizzazioni degli operatori compatti.

**Teorema 3.2** *Un operatore compatto  $A$  trasforma successioni debolmente convergenti in successioni convergenti (fortemente). In altre parole se  $f_n$  é tale che  $\lim_n (g, f_n) = (g, f)$  per ogni  $g \in \mathcal{H}$ , allora  $Af_n$  converge a  $Af$  fortemente.*

**Dim** Sia  $f$  il limite debole di  $\{f_n\}$ . Allora  $Af_n$  é debolmente convergente a  $Af$ . Infatti, per ogni  $h \in \mathcal{H}$ :

$$(h, Af) = (A^*h, f) = \lim_n (A^*h, f_n) = \lim_n (h, Af_n).$$

Si osservi inoltre che se  $f_n$  é debolmente convergente allora é uniformemente limitata (vedi Osservazione seguente).

D'altra parte  $A$  é compatto e dunque esistono sottosuccessioni  $f_{n_i}$  tali che  $Af_{n_i}$  é convergente fortemente (ma anche debolmente) necessariamente al limite  $Af$ . Se tutta la successione  $f_n$  non convergesse ad  $Af$ , per ogni  $\varepsilon > 0$  potrei trovare una sottosuccessione  $f_{n_i}$  tale che  $\|Af - f_{n_i}\| > \varepsilon$ , per ogni  $i$ . Estraeendo da questa una nuova sottosuccessione  $f_{n_k}$  tale che  $Af_{n_k}$  é convergente, dovrei avere ancora  $\|Af - f_{n_k}\| > \varepsilon$ , ma ciò é assurdo perché tutte le sottosuccessioni convergenti (fortemente e quindi debolmente) convergono necessariamente ad  $Af$ . ■

**Osservazione** Il fatto che una successione debolmente convergente sia uniformemente limitata, é conseguenza del teorema di uniforme limitatezza, che non discuteremo in queste note. Una prova diretta ed elementare é presentata in Appendice.

**Esercizio 1** Siano  $A, B \in B(\mathcal{H})$ , con  $A$  compatto. Dimostrare che  $AB$  e  $BA$  sono operatori compatti.

**Teorema 3.3** Se  $\{A_n\}$  é una successione di operatori compatti e  $A$  il suo limite in norma, allora  $A$  é compatto.

**Dim** Data una successione limitata  $f_k$ , per ogni  $A_n$  posso trovare una sottosuccessione  $f_{k_i}$  per cui  $A_n f_{k_i}$  é convergente. Con il solito argomento diagonale posso trovare una sottosuccessione comune, ancora denotata con  $f_{k_i}$ . Allora:

$$\|A(f_{k_i} - f_{k_j})\| \leq \|A_n(f_{k_i} - f_{k_j})\| + \|(A - A_n)(f_{k_i} - f_{k_j})\|, \quad (65)$$

dove, fissato  $\varepsilon > 0$ ,  $n$  é scelto in maniera tale che  $\|A - A_n\| < \varepsilon$ . Per  $i, j$  sufficientemente grandi, il primo termine del membro di destra della (14) é minore di  $\varepsilon$  e dunque:

$$\|A(f_{k_i} - f_{k_j})\| \leq \varepsilon + 2 \sup_k \|f_k\| \varepsilon.$$

Per ipotesi  $\|f_k\| \leq C$  e dunque il Teorema é provato.

**Teorema 3.4** Condizione necessaria e sufficiente affinché un operatore  $A$  sia compatto é che, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esista  $n = n(\varepsilon)$  tale che  $A = F + R$ , ove  $F$  ha rango  $n$  e  $R \in B(\mathcal{H})$  soddisfa alla disuguaglianza  $\|R\| \leq \varepsilon$ .

**Dim** La sufficienza é conseguenza del Teorema 3.3 e dal fatto che gli operatori di rango finito sono compatti. Per la necessità, sia  $\{e_j\}$  una base ortonormale,  $M_n$  il sottospazio generato da  $\{e_1 \dots e_n\}$  e  $M_n^\perp$  il suo sottospazio ortogonale. Consideriamo:

$$l_n = \sup_{\{f \in M_n^\perp \mid \|f\|=1\}} \|Af\|$$

É facile verificare che  $l_n$  é una successione limitata (perché  $A$  é limitato) ed é decrescente. Sia  $l = \lim_n l_n$ . Deve essere  $l = 0$ . Supponiamo il contrario. Allora deve esistere una successione  $\{g_n\} \in M_n^\perp$  tale che  $\|g_n\| = 1$  e che  $\|Ag_n\| > l/2$ . D'altra parte  $g_n$  converge debolmente a zero. Infatti per ogni  $u \in \bigcup_n M_n$  esiste  $n$  sufficientemente grande per cui  $(u, g_n) = 0$ . Inoltre  $\bigcup_n M_n$  é denso in  $\mathcal{H}$  per cui, per ogni  $w \in \mathcal{H}$  e  $\varepsilon > 0$  esiste  $u \in \bigcup_n M_n$  tale che  $\|w - u\| < \varepsilon$ . Allora  $\lim(w, g_n) = \lim(w - u, g_n) + \lim(u, g_n)$ . Ora il secondo termine va a zero mentre il primo é arbitrariamente piccolo. Di qui la convergenza debole a zero.

Dunque, per la compattezza di  $A$ ,  $Ag_n$  é convergente (fortemente) a zero.

Dunque  $l = 0$ . Consideriamo infine l'applicazione:

$$f \rightarrow \sum_{j=1}^n (e_j, f) A e_j \equiv A_n f$$

che é un operatore di rango finito. La successione  $A_n$  é convergente ad  $A$  in norma poiché é facile verificare che:

$$\|A_n - A\| = l_n$$

che é convergente a zero. ■

**Osservazione** Il teorema può essere riformulato dicendo che un operatore é compatto se e solo se é limite in norma di operatori di rango finito.

**Esercizio 2** Se  $A$  é compatto e dotato di inverso (esiste  $A^{-1}$  definito su  $R_A$ ),  $A^{-1}$  é necessariamente non limitato.

Suggerimento.

Sia  $\{e_j\}$  una base ortonormale. Allora (vedi Teorema 3.2)  $\|Ae_j\| \rightarrow 0$  per  $j \rightarrow \infty$ . Si consideri la successione  $A^{-1}f_j$  dove  $f_j = Ae_j$  e si traggano le conclusioni.

Il Teorema 3.4 é molto utile per stabilire se un operatore dato é compatto o meno. Si consideri il seguente

**Esempio.**  $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$ .  $A$  é un operatore definito da

$$(Au)_k = \sum_j A_{k,j}u_j, \quad u = \{u_k\}_{k=1}^\infty \in \mathcal{H}.$$

Supponiamo che

$$\sum_{j,k} |A_{j,k}|^2 \leq +\infty \tag{66}$$

allora  $A$  é compatto.

Infatti si definisca

$$(A_N u)_k = \sum_j A_{k,j}u_j, \quad \text{per } k \leq N, \quad (A_N u)_k = 0 \quad \text{per } k > N.$$

Allora  $A_N$  é di rango finito. Inoltre per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\|(A - A_N)u\|^2 = \sum_{k>N} \left| \sum_j A_{k,j}u_j \right|^2 \leq \|u\|^2 \sum_{k>N} \sum_j |A_{k,j}|^2 \tag{67}$$

da cui segue che, in virtú della (66),  $(A - A_N) \rightarrow 0$  in norma.

**Esempio: Operatori integrali.** Consideriamo lo spazio di Hilbert  $\mathcal{H} = L^2([a, b])$  e l'operatore lineare:

$$Af(x) = \int_a^b K(x, y)f(y)dy \quad f \in \mathcal{H}$$

con  $K \in L^2([a, b] \times [a, b])$  Sia  $\{e_j\}$  una base ortonormale in  $\mathcal{H}$ . Allora é facile vedere che  $e_i(x)e_j(y)$  é una base ortonormale in  $L_2([a, b] \times [a, b])$ . Denotiamo con  $k_{i,j}$  i coefficienti di Fourier di  $K$  in accordo a questa base:

$$K(x, y) = \sum_{k,j} k_{i,j} e_i(x) e_j(y)$$

e definiamo:

$$K_N(x, y) = \sum_{i \leq N} \sum_j k_{i,j} e_i(x) e_j(y)$$

$$A_N f(x) = \int_a^b K_N(x, y) f(y) dy \quad f \in \mathcal{H}$$

E' facile verificare che  $A_N$ , che é di rango finito, converge in norma ad  $A$  e dunque, dalla compattezza di  $A_N$  segue la compattezza di  $A$ .

Si osservi che quanto visto vale anche nel caso in cui si sostituisca  $[a, b]$  con l'intera retta reale.

**Esercizio 3** Si consideri l'operatore  $\frac{d}{dx}$  in  $L_2([a, b])$  definito sulle funzioni  $C^2([a, b])$ . Si usi il risultato dell'Esercizio 2 e dell'esempio per dimostrare che tale operatore non é limitato.

**Esercizio 4**  $A \in B(\mathcal{H})$  é compatto se e solo se  $A^*$  é compatto. Dimostrare l'asserto.

Suggerimento.

Sia  $f_n$  debolmente convergente a  $f$ . Si stabilisca la disuguaglianza:

$$\|A^*(f - f_n)\|^2 \leq (\|f\| + \|f_n\|) \|AA^*(f - f_n)\|$$

e si usino i risultati dell'esercizio 1

**Esercizio 5** Dimostrare che l'operatore di moltiplicazione  $M_h$  definito in paragrafo 2 non é compatto

**Esercizio 6** Dimostrare che, in uno spazio di Hilbert infinito dimensionale, non esistono operatori compatti unitari.

**Esercizio 7** Si consideri la famiglia di operatori integrali in  $L_2(\mathbb{R})$ :

$$T_\alpha f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|x-y|^2}}{(1+x^2)^\alpha} f(y) dy,$$

in  $L_2(\mathbb{R})$ , con  $\alpha \in [0, 1]$ .

Si determinino i valori di  $\alpha$  per cui  $T_\alpha$  é continuo e due valori  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  per cui  $T_{\alpha_1}$  sia compatto e  $T_{\alpha_2}$  non sia compatto.

**Esercizio 8** Si consideri lo spazio di Hilbert  $l_2(\mathbb{Z})$  e l'operatore lineare

$$(Au)_k = \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_{k,h}u_h$$

$$a_{k,h} = \frac{1}{(k-h)^2}, \quad k \neq h, \quad a_{k,k} = 0.$$

ove  $u = \{u_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_2(\mathbb{Z})$ . Si dimostri che  $A$  é un operatore continuo, ma non compatto.

## Appendice

Dimostriamo l'affermazione seguente:

*Se  $f_n \rightarrow f$  debolmente, allora esiste  $C$  (indipendente da  $n$ ) tale che  $\|f_n\| \leq C$*

Affermazione preliminare. Per ogni  $g \in \mathcal{H}$  e  $n \in \mathbb{N}$ , vale

$$\sup_{g': \|g-g'\| < r} |(f_n, g')| \geq \|f_n\|r.$$

Infatti per ogni  $h \in \mathcal{H}$

$$\max(|(f_n, g+h)|, |(f_n, g-h)|) \geq \frac{1}{2}(|(f_n, g+h)| + |(f_n, g-h)|) \geq |(f_n, h)|.$$

L'ultimo passaggio segue dalla disuguaglianza

$$|a+b| + |a-b| \geq 2|b|.$$

Quindi:

$$r\|f_n\| = \sup_{h: \|h\|=r} |(f_n, h)| \leq \sup_{h: \|h\|=r} |(f_n, g+h)|$$

da cui segue l'osservazione preliminare.

Supponiamo ora che la tesi sia violata. Allora (eventualmente passando a sottosuccessioni se necessario)

$$\|f_n\| \geq 4^n.$$

Costruisco ora, induttivamente, una successione  $g_n$  tale che

$$\|g_n - g_{n-1}\| \leq 3^{-n}$$

ove  $g_0 = 0$  e, per l'osservazione preliminare,

$$|(f_n, g_n)| \geq \|f_n\| \leq 3^{-n} \frac{2}{3}.$$

Siccome  $g_n$  é di Cauchy, sia  $g = \lim g_n$ . Risulta

$$\|g - g_n\| \leq \sum_{k \geq n} \|g_{k+1} - g_k\| \leq \sum_{k \geq n} 3^{-(k+1)} = \frac{1}{2} 3^{-n}.$$

D'altra parte:

$$|(f_n, g)| \geq |(f_n, g_n)| - |(f_n, g - g_n)| \geq \|f_n\| \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) 3^{-n} \geq \frac{1}{6} \left( \frac{4}{3} \right)^n.$$

Dunque  $|(f_n, g)|$  diverge, contro l'ipotesi.

#### 4. Equazioni lineari su spazi di Hilbert

In questo paragrafo siamo interessati allo studio di equazioni lineari del tipo

$$(I - A)f = g \tag{68}$$

dove  $f \in \mathcal{H}$  é l'incognita del problema,  $A \in B(\mathcal{H})$  e  $g \in \mathcal{H}$  é assegnato. Come vedremo, se  $A$  é un operatore compatto si possono formulare dei risultati analoghi a quelli che valgono per il caso finito-dimensionale, discussi nell' Appendice del capitolo sulle equazioni integrali.

Un modo di porre la questione é quello di stabilire l'invertibilitá dell'operatore  $(I - A)$ . Si noti tuttavia che, in analogia al caso delle matrici, l'equazione (68) puó essere risolta per qualche  $g$  anche se l'operatore  $(I - A)$  non é invertibile.

Il problema dell'invertibilitá di  $(I - A)$  é facilmente risolvibile se l'operatore  $A$  é una contrazione in  $\mathcal{H}$ , cioè se vale:

$$\|A\| < 1 \tag{69}$$

Infatti una soluzione formale del problema (68) é data dalla serie:

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} A^k g \quad (A^0 = I) \tag{70}$$

che si ottiene iterando la (68):

$$f = g + Af = g + Ag + A^2 f = \dots = g + Ag + A^2 g + \dots A^n g + A^{n+1} f \dots$$

**Teorema 4.1** *Nell'ipotesi (69) l'operatore  $(I - A)^{-1} \in B(\mathcal{H})$  esiste e vale:*

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|} \tag{71}$$

**Dim** Dimostriamo che la serie (70) é convergente in  $\mathcal{H}$ . Posto  $f_n = \sum_{k=0}^n A^k g$  si ha, per  $m > n$ :

$$\|f_n - f_m\| \leq \sum_{n+1}^m \|A^k g\| \leq \|g\| \sum_{n+1}^m \|A\|^k. \quad (72)$$

Poiché  $\|A\| < 1$  la serie  $\sum_{n+1}^{\infty} \|A\|^k$  é geometricamente convergente e dunque il membro di destra della (72) tende a zero quando  $n \rightarrow \infty$ . Incidentalmente si osservi che lo stesso argomento mostra che la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$  é convergente in norma.

L'applicazione  $g \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} A^k g = Sg$  é un operatore lineare limitato e vale:

$$\|S\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Lasciamo come facile esercizio dimostrare che  $S(I - A)g = g$  per ogni  $g \in \mathcal{H}$ . ■

Il Teorema (4.1) mostra che l'equazione (68) é unicamente risolubile, cosí come l'equazione aggiunta definita da:

$$(I - A^*)f^* = g^* \quad (73)$$

**Esercizio 1** Dimostrare che nell'ipotesi (69) l'equazione (73) ammette un'unica soluzione.

Nelle applicazioni si incontrano spesso equazioni lineari in cui  $A$  non é contrattivo per cui le considerazioni svolte sopra non si applicano. Alcune volte, però, l'operatore  $A$  gode della proprietá di essere compatto come nel caso delle equazioni integrali. Ci concentreremo dunque nello studio di equazioni lineari del tipo (68) nel caso in cui  $A$  sia compatto.

Cominceremo col considerare una situazione ancora piú semplice, quella in cui  $A$  sia di rango finito. Usando poi il teorema di approssimazione degli operatori compatti per mezzo degli operatori di rango finito, estenderemo le considerazioni svolte a un generico operatore compatto.

Sia dunque  $A \in B(\mathcal{H})$  di rango finito e  $\{e_j\}$  una base ortonormale in  $\mathcal{H}$ . Introduciamo la cosiddetta rappresentazione matriciale per  $A$ :

$$a_{i,j} = (e_i, Ae_j). \quad (74)$$

Poiché  $A$  é di rango finito, il suo codominio é uno spazio finito-dimensionale  $M_n \subset \mathcal{H}$  ed é possibile scegliere la base  $\{e_j\}$  in modo tale che  $M_n$  é generato da  $\{e_j\}_{j=1}^n$ . Dunque:

$$a_{i,j} = 0 \quad \forall i > n, \forall j \in \mathbb{N}. \quad (75)$$

Siano  $f_i$  i coefficienti di Fourier di  $f \in \mathcal{H}$ . Allora:

$$(Af)_i = (e_i, Af) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j (e_i, Ae_j) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} f_j \quad (76)$$



L'equazione (68) si scrive dunque:

$$f_i - \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} f_j = g_i$$

che é un'equazione lineare in cui compare la matrice  $a_{i,j}$  con infinite righe e colonne. Non abbiamo per il momento ancora usato la finitezza del rango di  $A$ .

Per la (74) si ha:

$$\begin{aligned} f_i - \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} f_j &= g_i, \quad i \leq n, \\ f_i &= g_i, \quad i > n \end{aligned} \quad (77)$$

e dunque:

$$f_i - \sum_{j=1}^n a_{i,j} f_j = g_i + \sum_{j \geq n+1} a_{i,j} g_j \quad (78)$$

La (78) é un'equazione finito-dimensionale e per essa valgono i risultati visti in Appendice nel precedente Capitolo.

Sfrutteremo tali considerzioni al fine di trattare il caso generale di un operatore  $A$  compatto. Si consideri dunque

$$(I - A)f = g$$

con  $A$  compatto. Per quanto visto in precedenza possiamo decomporre  $A$  nella somma  $A = A_1 + A_2$  con  $A_1$  di rango finito e  $A_2 \in B(\mathcal{H})$  tale che  $\|A_2\| < 1$  (per cui  $I - A_2$  é invertibile per mezzo della serie geometrica). L'equazione (68) diventa:

$$(I - A_2)f - A_1 f = g \quad (79)$$

o, equivalentemente, posto  $f = (I - A_2)^{-1}h$ :

$$h - A_1(I - A_2)^{-1}h = g. \quad (80)$$

Si noti che, poiché  $A_1$  é di rango finito, anche

$$A_1(I - A_2)^{-1} = B$$

lo é.

**Nota.** Si osservi che se  $A_1$  é di rango finito e  $B$  é un operatore limitato, anche  $BA_1$  é di rango finito (si dimostri l'asserto). Per cui se avessimo semplicemente applicato  $(I - A_2)^{-1}$  all'equazione (79), avremmo ottenuto:

$$f - (I - A_2)^{-1}A_1 f = g.$$

con  $(I - A_2)^{-1}A_1$  di rango finito. Abbiamo preferito introdurre la variabile  $h$  perché ciò rende l'algebra che segue più semplice.

In analogia col caso finito dimensionale visto nell' Appendice del precedente Capitolo, consideriamo anche l'equazione aggiunta alla (68):

$$(I - A^*)f^* = g^*. \quad (81)$$

Prima di studiare la (81) premettiamo un'osservazione importante. Sia  $A$  un operatore di rango finito e supponiamo che  $a_{i,j} = 0$  se  $i > n$ . Allora  $A^*$  è anch'esso di rango finito. Per dimostrare questa osservazione si osservi che, denotando con  $(a^*)_{i,j} = (e_i, A^*e_j)$  gli elementi di matrice di  $A^*$ , risulta

$$(a^*)_{i,j} = \bar{a}_{j,i}$$

e dunque

$$(A^*f)_i = \sum_{j=1}^n \bar{a}_{j,i} f_j$$

da cui segue che il codominio di  $A^*$ , pur non essendo la varietà lineare generata da  $\{e_i\}_{i=1}^n$ , è finito dimensionale.

Associamo ora all'operatore  $A^*$  la decomposizione  $A^* = A_1^* + A_2^*$  dove  $\|A_2^*\| = \|A_2\| < 1$ .

Dall'invertibilità di  $(I - A_2^*)$  segue:

$$(I - A_2^*)f^* - A_1^*f^* = g^*$$

o anche

$$f^* - (I - A_2^*)^{-1}A_1^*f^* = (I - A_2^*)^{-1}g^* := G^*.$$

Si introducano ora gli elementi di matrice  $b_{i,j} = (e_i, Be_j) = (e_i, A_1(I - A_2)^{-1}e_j)$ . In accordo a quanto visto sopra (vedi la (78)), si perviene all'equazione:

$$h_i - \sum_{j=1}^n b_{i,j}h_j = g_i + \sum_{j \geq n+1} b_{i,j}g_j, \quad i = 1 \dots n. \quad (82)$$

Si osservi ora che:

$$\bar{b}_{j,i} = \overline{(e_j, Be_i)} = (Be_i, e_j) = (e_i, B^*e_j)$$

e dunque l'equazione aggiunta si scrive (poiché  $B^* = (I - A_2^*)^{-1}A_1^*$ ):

$$f_i^* - \sum_{j=1}^n \bar{b}_{j,i}f_j^* = G_i^*, \quad i = 1 \dots \infty. \quad (83)$$

La risolubilità dell'equazione aggiunta (per ogni  $g^*$ ) é dunque equivalente alla risolubilità della (83) (per ogni  $G_i^*$ ). Supponiamo ora che tale equazione sia risolubile per ogni  $G^*$ . Allora anche la (78) e di conseguenza la (68) é risolubile per tutti i  $g$ . L'inverso  $(I - A)^{-1}$  é un operatore limitato come segue dalla seguente stima. Infatti se risolviamo la (82) abbiamo:

$$\sum_{j=1}^n |h_j|^2 \leq C \sum_{j=1}^n |g_j + \sum_{i=n+1}^{\infty} b_{i,j} g_j|^2.$$

Qui stiamo usando che la norma della soluzione di un'equazione lineare é controllata dalla norma del dato. Pertanto denotando con  $P_n$  il proiettore sul sottospazio generato da  $\{e_i\}$  con  $i > n$ , il membro di destra é controllato da:

$$\begin{aligned} 2C \left( \sum_{i=1}^n |g_i|^2 + \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} b_{i,j} g_j \right|^2 \right) &\leq 2C (\|g\|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} |(e_i, BP_n g)|^2) \\ &\leq 2C (\|g\|^2 + \|BP_n g\|^2) \leq C \|g\|^2 \end{aligned} \quad (84)$$

dove la costante  $C$  (a priori diversa da riga in riga) é indipendente da  $g$ .

Abbiamo dunque:

**Teorema 4.1 (I teorema di Fredholm)** *L'equazione (68) é risolubile (per ogni  $g$ ) se e solo se l'equazione aggiunta é risolubile (per ogni  $g^*$ ). In questo caso  $(I - A)$  (e anche  $(I - A^*)$ ) é invertibile e l'inverso é limitato.*

Sulla base della riduzione finito-dimensionale discussa sopra possiamo anche enunciare:

**Teorema 4.2 (II teorema di Fredholm)** *Se l'equazione omogenea associata alla (68) ammette soluzioni non banali, esse sono in numero finito e pari a quelle dell'equazione (omogenea) aggiunta associata.*

Concludiamo con il considerare il caso in cui l'equazione omogenea associata alla (68) abbia soluzioni non banali. Malgrado ciò l'equazione (68) potrebbe essere risolta per opportuni  $g$  (come nel caso delle matrici).

**Teorema 4.3 (III teorema di Fredholm)** *Se  $\ker(I - A)$  e dunque  $\ker(I - A^*)$  sono non banali, allora l'equazione (68) ammette soluzioni se e solo se  $g \perp \ker(I - A^*)$ . In questo caso tutte le soluzioni sono della forma:  $f + u$  con  $u \in \ker(I - A)$  e  $f \perp \ker(I - A)^\perp$ . Inoltre  $f$  é unica e vale la stima  $\|f\| \leq C \|g\|$ .*

**Dim** Siano  $\varphi^k$ ,  $k = 1 \dots s$ ,  $s$  soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea associata all'equazione aggiunta ( $\varphi^k = B^* \varphi^k$ ). Si ha:

$$\varphi_i^k = \sum_{j=1}^n \bar{b}_{j,i} \varphi_j^k \quad \text{oppure} \quad \bar{\varphi}_i^k = \sum_{i=1}^n b_{j,i} \bar{\varphi}_j^k \quad (85)$$

Dall'appendice del precedente capitolo sappiamo che una soluzione dell'equazione (78) o della (82), esiste solo in ipotesi di ortogonalit a:

$$0 = \sum_{i=1}^n \bar{\varphi}_i^k (g_i + \sum_{j \geq n+1} b_{i,j} g_j) \quad (86)$$

da cui, usando la (86) si ha

$$\sum_{i=1}^n \bar{\varphi}_i^k g_i + \sum_{j \geq n+1} \bar{\varphi}_j^k g_j = (\varphi^k, g) = 0 \quad (87)$$

e dunque la condizione di risolubilit a cercata. Inoltre se  $f$  è una soluzione, certamente lo è  $f + u$  se  $u$  annulla  $(I - A)$ . Tuttavia ve ne è una sola ortogonale al  $\ker(I - A)$ . Se ve ne fosse un'altra,  $\tilde{f}$ , con questa propriet a, la differenza sarebbe una soluzione dell'omogenea. Ma poiché  $f - \tilde{f}$  deve essere ortogonale a tutte le soluzioni della omogenea, ne segue che  $f - \tilde{f} = 0$ . La stima  $\|f\| \leq C\|g\|$  si ottiene come prima.

■

Da quanto visto i teoremi di Fredholm implicano che per un dato operatore compatto  $A$  vale la seguente alternativa: o  $(I - A)f = g$  è risolubile per ogni  $g$  (e dunque  $(I - A)^{-1}$  esiste come operatore limitato, oppure  $(I - A)f = 0$  ammette soluzioni non banali. Infatti se  $(I - A)f = g$  non è risolubile per tutti i  $g$ , allora  $(I - A^*)f^* = 0$  e quindi anche  $(I - A)f = 0$  ammette soluzioni non banali. Tale alternativa si chiama alternativa di Fredholm.

Sia  $T \in B(\mathcal{H})$ . Allora vale in generale che

$$\mathcal{H} = \ker T^* \bigoplus \overline{(\text{Ran} T)}$$

da cui

$$\mathcal{H} = \ker(I - A^*) \bigoplus \overline{(\text{Ran}(I - A))}$$

Se però  $A$  è un operatore compatto allora

$$\mathcal{H} = \ker(I - A^*) \bigoplus (\text{Ran}(I - A)).$$

Tale identit a riassume la teoria della risolubilit a delle equazioni lineari su spazi di Hilbert nel caso in cui  $A$  è compatto.

## 5. Teorema spettrale per operatori compatti autoaggiunti

É ben noto che una matrice autoaggiunta  $A = A^*$ , definita come operatore lineare su  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ , ha la seguente rappresentazione, detta rappresentazione spettrale:

$$A = \sum_{j=1}^n \lambda_j P_j \quad (88)$$

dove  $P_j$  é il proiettore ortogonale su  $e_j \in \mathcal{H}$ , ove  $\{e_1 \dots e_n\}$  é una base ortonormale in  $\mathcal{H}$ , e  $\lambda_i$  sono  $n$  autovalori (reali) della matrice  $A$ . Infatti consideriamo il problema agli autovalori:

$$Au = \lambda u$$

che ha, per il teorema fondamentale dell'algebra,  $n$  soluzioni (eventualmente coincidenti). Se  $\lambda_i \neq \lambda_j$  sono due autovalori distinti:

$$Au_i = \lambda_i u_i, \quad Au_j = \lambda_j u_j, \quad (89)$$

allora  $(u_j, u_i) = 0$  e gli autovalori sono reali. Infatti supponiamo (senza scapito di generalitá) che  $\|u_i\| = 1$ , dalla (117) segue:

$$(u_i, Au_i) = \lambda_i = (A^* u_i, u_i) = (Au_i, u_i) = \bar{\lambda}_i.$$

Inoltre moltiplicando scalarmente la prima delle (117) per  $u_j$  e la seconda per  $u_i$ , si ottiene facilmente:

$$(\lambda_i - \lambda_j)(u_i, u_j) = 0.$$

Se tutti gli autovalori sono distinti ne segue che gli  $u_i$  sono ortogonali e dunque formano una base ortonormale e la (88) vale. Se vi é qualche autovalore coincidente, sull'autospazio associato all'autovalore multiplo (di dimensione pari alla molteplicitá) possiamo scegliere, in questo sottospazio, una base ortonormale ad arbitrio e la rappresentazione (89) continua a valere.

Tale rappresentazione é molto utile perché permette di pensare l'operatore  $A$  come una moltiplicazione sui suoi autovettori.

Abbiamo visto che gli operatori compatti sono ben approssimati da operatori di rango finito e dunque ci aspettiamo che qualcosa di analogo valga anche per gli operatori compatti. Scopo di questo paragrafo é quello di dare un teorema, detto teorema spettrale, che ci consente di generalizzare la (88) al caso di operatori compatti. Per far questo abbiamo bisogno di alcune considerazioni generali di interesse intrinseco.

Sia  $A \in B(\mathcal{H})$  un operatore.  $\lambda \in \mathbb{C}$  é detto nell'insieme risolvente di  $A$  (che si denota con  $\rho(A)$ ), se  $(\lambda I - A)$  é invertibile e l'inverso é limitato. In altre parole  $(\lambda I - A)$  é una bijezione di  $\mathcal{H}$  su se stesso. Se  $\lambda \in \rho(A)$  allora si denota

$$(\lambda I - A)^{-1} = R_\lambda(A)$$

e tale operatore si chiama risolvente di  $A$  in  $\lambda$ .

Si consideri ad esempio l'operatore:

$$M_h f = h f$$

con  $h$  continua e limitata. Allora  $M_h \in B(\mathcal{H})$  ove  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ . L'operatore  $(\lambda I - M_h)^{-1}$  se esiste, é l'operatore di moltiplicazione per la funzione  $\frac{1}{\lambda - h}$ . É facile vedere che se  $\lambda$  non appartiene al codominio di  $h$  allora é nell'insieme risolvente di  $M_h$ . Altrimenti  $\frac{1}{\lambda - h}$  puó divergere. Tale operatore di moltiplicazione é allora definito senza problemi solo su un sottospazio denso di  $\mathcal{H}$  delle funzioni  $L^2$  che si annullano opportunamente nei punti in cui  $h = \lambda$ . Dunque per questi valori di  $\lambda$ ,  $(\lambda I - M_h)^{-1}$  é un operatore illimitato.

**Esercizio.** Sia  $\lambda$  un punto del codominio di  $h$ . Si discuta una possibile caratterizzazione del dominio di definizione di  $(\lambda I - M_h)^{-1}$ .

Il complemento  $\sigma(A) \equiv \mathbb{C}/\rho(A)$  viene detto spettro di  $A$ . Per quanto visto sopra  $\sigma(M_h)$  é il codominio della funzione  $h$ . Tra lo spettro di  $A$  un ruolo importante é giocato dalla sua parte puntuale, denotata con  $\sigma_p(A)$  che consiste nell'insieme degli autovalori di  $A$ :

$$\lambda \in \sigma_p(A) \rightarrow A f = \lambda f,$$

Dall'esempio discusso in precedenza si evince che l'operatore  $M_h$  (per  $h$  non costante) non ha spettro puntuale.

**Teorema 5.1** Sia  $A \in B(\mathcal{H})$ . Allora

- 1)  $\rho(A)$  é aperto e non vuoto.
- 2)  $\forall \lambda, \mu \in \rho(A)$ ,  $R_\lambda(A)$  e  $R_\mu(A)$  commutano.
- 3) Vale la seguente formula:

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu - \lambda) R_\mu(A) R_\lambda(A) \tag{90}$$

- 4)  $\sigma(A) \neq \emptyset$

**Dim** Procediamo formalmente:

$$\frac{1}{\lambda - A} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{1 - \frac{A}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n. \tag{91}$$

Se  $\lambda > \|A\|$  allora la serie definita dalla (91) é convergente in norma e identifica un elemento di  $B(\mathcal{H})$  che é proprio l'inverso limitato cercato. Dunque  $\rho(A) \neq \emptyset$ . Inoltre se  $\lambda_0 \in \rho(A)$ :

$$\frac{1}{\lambda - A} = \frac{1}{\lambda_0 - A} \frac{1}{1 - \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 - A}} = R_{\lambda_0}(A) \sum_{n \geq 0} \left( \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 - A} \right)^n. \quad (92)$$

Se  $|\lambda - \lambda_0| \|\lambda_0 I - A\| < 1$ , (quindi per  $\lambda$  sufficientemente prossimo a  $\lambda_0$ ) il membro di destra della (92) ha senso e definisce  $R_\lambda(A)$ . Dunque  $\rho(A)$  é aperto.

La (90) si dimostra facilmente:

$$\begin{aligned} R_\lambda(A) - R_\mu(A) &= R_\lambda(A)(\mu I - A)R_\mu(A) - R_\lambda(A)(\lambda I - A)R_\mu(A) = \\ &= (\mu - \lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A) \end{aligned}$$

Ciò dimostra anche la 2).

Infine dimostriamo che  $\rho(A) \neq \mathbb{C}$ . Per  $\lambda > \|A\|$  e  $f, g \in \mathcal{H}$  consideriamo la funzione:

$$F(\lambda) = (f, R_\lambda(A)g) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n \geq 0} \left( \frac{1}{\lambda} \right)^n a_n,$$

dove  $a_n = (f, A^n g)$ .  $F$  é una funzione analitica per  $\lambda > \|A\|$ ,  $F \rightarrow 0$  per  $|\lambda| \rightarrow \infty$ . Per il teorema di Liouville, se  $F \neq 0$ ,  $F$  deve avere qualche polo nel disco  $\lambda < \|A\|$  e dunque  $\lambda - A$  non puó essere invertito per tutti i  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Ciò completa la prova del teorema. ■

I prossimi tre teoremi costituiscono la parte piú importante di questo paragrafo.

### **Teorema 5.2**

*Sia  $A \in B(\mathcal{H})$  compatto autoaggiunto. Allora  $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$ . Ogni autovalore non nullo ha al piú molteplicitá finita.  $\sigma_p(A)$  non ha punti di accumulazione tranne, al piú, lo zero.*

**Dim** Sia  $\lambda \neq 0$ . Per l'alternativa di Fredholm o  $(\lambda I - A)$  ha nucleo non banale, e dunque  $\lambda \in \sigma_p(A)$ , oppure  $(\lambda I - A)$  é invertibile con inverso limitato.  $\lambda = 0$  o é un autovalore oppure appartiene allo spettro perché un operatore compatto invertibile, ha inverso non limitato. Quindi  $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$ .

Dimostriamo ora la molteplicitá finita degli autovalori. Sia, per assurdo,  $Ae_j = \lambda e_j$  con  $\{e_j\}$  una successione ortonormale infinita. Ovviamente la successione  $\{e_j\}$  non ha sottosuccessioni convergenti. D'altra parte per la compattezza di  $A$ ,  $Ae_j$  (e dunque  $\lambda e_j$ ) deve aver sottosuccessioni convergenti. Ne segue che la dimensione dell'autospazio associata all'autovalore  $\lambda$  deve essere finita.

Supponiamo che esista una successione di autovalori  $\lambda_n$  tale che  $\lambda_n \rightarrow \lambda \neq 0$ . Sia  $\{e_n\}$  una successione di vettori di norma 1 e mutuamente ortogonali tali che  $Ae_n = \lambda_n e_n$ . Naturalmente  $\lambda_n e_n$  non ammette sottosuccessioni convergenti, laddove per la compattezza di  $A$ ,  $Ae_n$  deve averne.

Si noti che l'autoaggiunzione di  $A$  é stata usata per avere l'ortogonalitá degli autovettori.

■

Sia  $A \in B(\mathcal{H})$ . Si definisce raggio spettrale di  $A$  e si denota con  $r(A)$  la quantitá:

$$r(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \quad (93)$$

**Teorema 5.3** *Sia  $A$  compatto simmetrico. Allora  $r(A) = \|A\|$ . In particolare  $\|A\|$  oppure  $-\|A\|$  sono nello spettro di  $A$  e dunque almeno uno dei due é un autovalore.*

**Dim** Ricordiamo che, poiché  $A$  é simmetrico, allora

$$\|A\| = \sup_{f: \|f\|=1} |(f, Af)|.$$

Allora esiste una successione  $f_n$  tale che  $\|f_n\| = 1$  per cui

$$(f_n, Af_n) \rightarrow \lambda$$

dove  $\lambda = \|A\|$  oppure  $\lambda = -\|A\|$ .

Poiché  $A$  é compatto,  $Af_n$  é convergente (passando a sottosuccessioni se necessario).

Inoltre

$$\begin{aligned} \|Af_n - \lambda f_n\|^2 &= \|Af_n\|^2 - 2\lambda(f_n, Af_n) + \lambda^2 \\ &\leq \|A\|^2 - 2\lambda(f_n, Af_n) + \lambda^2 \\ &= 2\lambda^2 - 2\lambda(f_n, Af_n) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (94)$$

da cui segue (dalla convergenza di  $Af_n$ ) che anche  $f_n$  converge. Sia  $f$  il suo limite. Allora necessariamente  $Af_n \rightarrow Af$  e inoltre

$$Af = \lambda f$$

e dunque  $\lambda$  é un autovalore. ■

Siamo ora in grado di provare il teorema spettrale per operatori compatti autoaggiunti.

**Teorema 5.4**

*Sia  $A \in B(\mathcal{H})$  compatto autoaggiunto. Allora esiste una base ortonormale  $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$  di  $(\text{Ker} A)^\perp$  tale che:*

$$Ae_j = \lambda_j e_j \quad (95)$$



con  $\lambda_j \rightarrow 0$  per  $j \rightarrow \infty$  se il numero degli autovalori é non finito. Inoltre vale la rappresentazione spettrale:

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (e_n, f) e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n f \quad (96)$$

dove  $P_n$  é il proiettore ortogonale su  $e_n$ .

*Osservazione* 0 é un punto dello spettro di  $A$ . Se  $(Ker A)^\perp$  é non vuoto allora é un autovalore. Altrimenti é un punto di accumulazione di autovalori e quindi é nello spettro.

**Dim** Basta ragionare sulla restrizione di  $A$  (denotata ancora con  $A$ ) allo spazio  $\mathcal{H}_0 = (Ker A)^\perp$ . Sia  $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$  una base ortonormale associata al sottospazio  $\mathcal{M}$  generato da tutti gli autovettori di  $A$  (naturalmente associati ad autovalori non nulli). Basta dimostrare che  $\mathcal{M}^\perp$  é il sottospazio nullo. Supponiamo il contrario. Consideriamo  $\tilde{A}$  la restrizione di  $A$  a  $\mathcal{M}^\perp$ . Allora  $\tilde{A} : \mathcal{M}^\perp \rightarrow \mathcal{M}^\perp$  perché  $A = A^*$  e  $A\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ .  $\tilde{A}$  é un operatore autoaggiunto e compatto su  $\mathcal{M}^\perp$ . Per costruzione  $\tilde{A}$  ha spettro puntuale vuoto, ma poiché é compatto il suo spettro (che é non vuoto) si riduce a  $\{0\}$ . Dall'autoaggiunzione di  $A$  segue che  $r(\tilde{A}) = \|\tilde{A}\| = 0$ . Ciò significa che  $\mathcal{M}^\perp = \{0\}$  e il teorema é dimostrato. ■

Si osservi che l'esistenza di una base ortonormale di autovettori e l'esistenza di un infinitá numerabile di autovalori segue dall'autoaggiunzione di  $A$  come si vede risolvendo l'esercizio 2 seguente.

**Esercizio 1** Sia  $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{N})$ ,  $A \in B(\mathcal{H})$

$$(Au)_n = u_n(1/n^2) \quad n = 1 \dots$$

Dimostrare che  $A$  é compatto e autoaggiunto. Determinare autovettori e autovalori.

**Esercizio 2** Sia  $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{N})$ ,  $A \in B(\mathcal{H})$

$$(Au)_n = u_{n-1}(1/n^2), \quad n > 1, \quad (Au)_1 = 0$$

Dimostrare che  $A$  é compatto, che non ha autovalori e determinare lo spettro di  $A$ .

### 3. Applicazioni alle EDP

#### 1. Osservazioni preliminari

Abbiamo visto, in Cap. 2 che gli operatori integrali  $A : L^2([a, b]) \rightarrow L^2([a, b])$  con nucleo  $K \in L^2([a, b] \times [a, b])$ , sono compatti. Ciò permettere di ritrovare i risultati in Cap. 1 per le equazioni integrali come casi particolari di equazioni lineari astratte su spazi di Hilbert. Lo stesso risultato si ottiene, senza argomenti aggiuntivi, se si considera l'operatore integrale  $A : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ ,

$$Af(x) = \int_Q dy K(x, y) f(y), \quad (97)$$

dove  $Q \subset \mathbb{R}^n$  é un insieme aperto limitato di  $\mathbb{R}^n$ , oppure é un aperto limitato, contenuto in una superficie regolare immersa in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . In quest'ultimo caso alla misura di volume  $dy$  va però sostituita la misura di superficie. Se  $K \in L^2(Q \times Q)$ , tutto funziona come in dimensione 1 e possiamo concludere che  $A$  é un operatore compatto, per cui possiamo ancora applicare i teoremi di Fredholm visti in paragrafo 4.

Nelle applicazioni, tuttavia, capita di dover considerare nuclei illimitati con singolarità piú forti di una singolarità quadrosommabile. Consideriamo, ad esempio,  $K$  della forma:

$$K(x, y) = \frac{K_0(x, y)}{|x - y|^\alpha} \quad (98)$$

con  $2\alpha > n$ , ove  $n$  é la dimensione dello spazio fisico. Si consideri l'operatore integrale (97) con con nucleo dato dalla (98), ove  $K_0 \in C(\bar{Q} \times \bar{Q})$ .

Se  $\alpha < n$ ,  $K(x, \cdot) \in L^1(Q)$  per ogni  $x \in Q$ , ma non é  $L^2(Q \times Q)$  per cui le considerazioni svolte in Cap.2 non sono immediatamente applicabili.

Si dimostra facilmente che  $A$  é un operatore continuo in  $L^2(Q)$ . Infatti:

$$|Af(x)|^2 = \int \int K(x, y_1) K(x, y_2) f(y_1) f(y_2) dy_1 dy_2.$$

Poiché  $2|f(y_1)f(y_2)| \leq |f(y_1)|^2 + |f(y_2)|^2$ , si perviene alla disuguaglianza:

$$|Af(x)|^2 \leq \int |K(x, y_1)| dy_1 \int |K(x, y_2)| |f(y_2)|^2 dy_2.$$

Infine integrando in  $dx$ , usando che  $\sup_{x \in Q} \int |K(x, y)| dy \leq C$ , si ottiene:

$$\|Af\|^2 \leq C \|f\|^2, \quad (99)$$

il che prova la continuità di  $A$ .

In realtà si può dimostrare di più.

**Lemma 1.1** *Sia  $A$  definito in (97) con  $K$  che soddisfa alla condizione (98). Allora  $A$  é compatto*

**Dim.**

Si consideri il nucleo regolarizzato

$$\begin{aligned} K_N(x, y) &= K(x, y), & |x - y| > N^{-1} \\ K_N(x, y) &= K_0(x, y)N^\alpha, & |x - y| \leq N^{-1} \end{aligned} \quad (100)$$

Definiamo poi l'operatore  $A_N$ :

$$A_N f(x) = \int_Q dy K_N(x, y) f(y) \quad (101)$$

Poiché  $K_N \in C(Q \times Q)$ ,  $A_N$  (che é naturalmente continuo) é anche compatto.

Usando che  $|f(y_1)f(y_2)| \leq \frac{1}{2}[|f(y_1)|^2 + |f(y_2)|^2]$  si ottiene

$$|(A - A_N)f(x)|^2 \leq \int |K(x, y_1) - K_N(x, y_1)| dy_1 \int |K(x, y_2) - K_N(x, y_2)| |f(y_2)|^2 dy_2. \quad (102)$$

Inoltre:

$$\int |K(x, y_1) - K_N(x, y_1)| dy_1 \leq 2 \int |K(x, y_1)| dy_1 \leq C.$$

Fissato poi  $y$ ,

$$\int |K(x, y) - K_N(x, y)| dx \leq 2 \int_{|x-y| < N^{-1}} dx |K_0(x, y)| \frac{1}{|x-y|^\alpha} \leq C \left( \frac{1}{N^{n-\alpha}} \right).$$

Utilizzando queste due stime e integrando la (102) in  $dx$  si ottiene:

$$\|(A - A_N)f\|^2 \leq C \int |K(x, y_2) - K_N(x, y_2)| |f(y_2)|^2 dx dy_2 \leq C \frac{1}{N^{n-\alpha}} \|f\|^2,$$

e dunque:

$$\|A - A_N\| \leq \frac{C}{\sqrt{N^{n-\alpha}}}.$$

Ciò implica che  $A$  é limite in norma di operatori compatti e dunque é compatto. ■

Il Lemma 1.1 permette di applicare i teoremi di Fredholm alle equazioni integrali con nucleo con singolarità integrabile, cosa che faremo nell'ambito della teoria delle equazioni ellittiche.

Nello studio delle equazioni differenziali alle derivate parziali é sovente utile pensare l'operatore di Laplace  $\Delta f = \sum_{i=1 \dots n} \partial_{x_i}^2 f$ , come un operatore lineare su  $L^2(Q)$  dove  $Q \subset \mathbb{R}^n$  é un dominio regolare (aperto con frontiera  $C^2$ ). Abbiamo visto che tale operatore non é limitato e, necessariamente, il suo studio richiede qualche cautela.

Se il problema fisico in esame richiede condizioni al contorno nulle, é naturale definire  $\Delta$  su  $C_0^2(Q)$  (spazio delle funzioni due volte differenziabili, con condizioni al bordo nulle). Si osservi che se  $u, v \in C_0^2(Q)$ , il teorema della divergenza e le condizioni al contorno nulle ci forniscono l'identitá:

$$\begin{aligned} (u, \Delta v) &= (u, \operatorname{div} \nabla v) = \int_Q \operatorname{div}(\bar{u} \nabla v) - \int_Q \nabla \bar{u} \cdot \nabla v \\ &= \int_{\partial Q} \bar{u} \nabla v \cdot n - \int_Q \nabla \bar{u} \cdot \nabla v = - \int_Q \nabla \bar{u} \cdot \nabla v = -(\nabla u, \nabla v), \end{aligned}$$

dove  $n$  é la normale esterna a  $\partial Q$  e  $\nabla = \partial_{x_i}$   $i = 1 \dots n$  e' l'operatore gradiente.

Analogamente:

$$(\Delta u, v) = -(\nabla u, \nabla v),$$

da cui

$$(\Delta u, v) = (u, \Delta v).$$

Quindi l'operatore  $\Delta$  é simmetrico (o hermitiano). Inoltre é negativo in quanto vale

$$(\Delta u, v) \leq 0.$$

Diciamo che  $\Delta$  é simmetrico ma non usiamo la parola autoaggiunto perché tale dizione é usata, nel caso di operatori non limitati, in un'accezione piú restrittiva che non vogliamo discutere nel presente contesto.

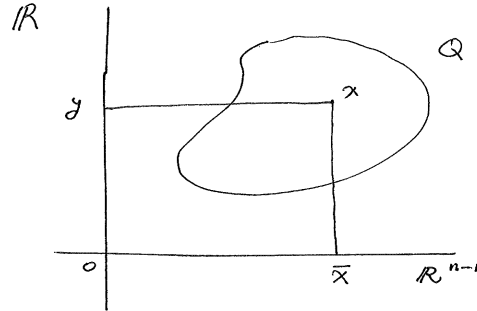
Queste considerazioni e la naturale introduzione del prodotto scalare  $(\nabla u, \nabla v)$  suggeriscono la definizione di un nuovo spazio.

Si considerino gli spazi  $L^2(Q)$  e  $C_c^\infty(Q)$ . Quet'ultimo é lo spazio delle funzioni infinitamente differenziabili, a supporto compatto in  $Q$ . In particolare tali funzioni sono nulle su  $\partial Q$ . Su  $C_c^\infty(Q)$  possiamo definire il prodotto scalare:

$$(f, g)_1 = \int_Q \overline{\nabla f(x)} \cdot \nabla g(x) dx. \quad (103)$$

Denotiamo con  $\|f\|_1 = (f, f)^{1/2}$  la norma indotta dal prodotto scalare (103). Il completamento di  $C_c^\infty(Q)$  per la norma  $\|\cdot\|_1$  si denota con  $H_0^1(Q)$ .

Si puó vedere facilmente che in questo argomento possiamo sostituire  $C_c^\infty(Q)$  con  $C_c^1(Q)$ .



Lo spazio  $H_0^1$  contiene funzioni piú regolari delle funzioni in  $L^2$ . Per vedere questo fatto rappresentiamo i punti  $x = (x_1 \dots x_n)$  di  $\mathbb{R}^n$  come la coppia  $x = (\bar{x}, y)$  dove  $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ , dove  $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ , e  $y$  é la coordinata nella direzione ortogonale a questo iperpiano. L'origine degli assi é poi fissata in modo tale che il dominio  $Q$  sia interamente contenuto nel semispazio  $y > 0$ . Si consideri poi  $f \in C_c^\infty(Q)$  come estesa in tutto lo spazio, nulla fuori di  $Q$ . Naturalmente tale funzione, denotata ancora con la stessa notazione  $f$  (con piccolo abuso), soddisfa alla proprietá  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Allora, poiché  $f(\bar{x}, 0) = 0$ :

$$f(x) = f(\bar{x}, y) = \int_0^y \frac{\partial f}{\partial y_1}(\bar{x}, y_1) dy_1 \quad (104)$$

da cui, usando Cauchy-Schwarz,

$$|f(\bar{x}, y)|^2 \leq d \int_0^y \left| \frac{\partial f}{\partial y_1} \right|^2(\bar{x}, y_1) dy_1$$

dove  $d$  é il diametro di  $Q$ . Integrando infine in  $d\bar{x}dy$  si ottiene

$$\|f\|^2 \leq d^2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\bar{x} \int_0^\infty dy_1 \left| \frac{\partial f}{\partial y_1} \right|^2(\bar{x}, y_1) \leq d^2 \int_Q dx |\nabla f|^2(x) = d^2 \|f\|_1^2. \quad (105)$$

Questo prova che la topologia di  $H_0^1$ , ristretta su  $C_0^\infty$ , é piú forte della topologia di  $L^2$  e dunque  $H_0^1$  é strettamente contenuto in  $L^2$ .

In particolare una successione in  $C_0^\infty$  di Cauchy in  $H_0^1$  é convergente in  $L^2$ . Dunque la disuguaglianza (105) si estende per continuitá a funzioni in  $H_0^1$ . Allora:

**Teorema 1.2 (disuguaglianza di Poincare)** *Sia  $Q$  un aperto limitato con frontiera regolare in  $\mathbb{R}^n$ . Allora*

$$\|f\| \leq C\|f\|_1 \quad (106)$$

per ogni  $f \in H_0^1$ .

La costante ottimale che appare nella disuguaglianza (106) e che dipende dal dominio, puó essere caratterizzata come vedremo in seguito.

Per vedere piú esplicitamente cosa contiene  $H_0^1$ , consideriamo il semplice caso di un intervallo finito. Sia dunque  $Q = [0, \pi]$ . Le funzioni  $f \in C_c^\infty([0, \pi])$  sono esprimibili per serie di Fourier (composta di soli seni). Come nel caso della corda vibrante lo sviluppo di Fourier é fatto su  $(0, 2\pi)$  e prendiamo la restrizione in  $(0, \pi)$  delle funzioni dispari intorno a  $\pi$  per soddisfare automaticamente le condizioni al contorno). Si ha:

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \hat{f}_n \sin nx \quad (107)$$

L'applicazione:

$$f \rightarrow \hat{f}_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nxdx \quad (108)$$

definita su  $C_c^\infty$  puó essere estesa per continuitá su tutto  $L^2$  (ed ha come immagine  $l^2$ ). Se invece muniamo  $C_c^\infty$  della topologia di  $H_0^1$  allora:

$$\|f\|_1 = \|f'\| = \sum_{n \geq 1} n^2 |\hat{f}_n|^2 \quad (109)$$

da cui ne segue che il completamento dell'immagine in  $l^2$  dell'applicazione (108) é l'insieme delle successioni per cui

$$\sum_{n \geq 1} n^2 |\hat{f}_n|^2 < +\infty. \quad (110)$$

Tale sottoinsieme di  $l^2$  é infatti la famiglia delle serie dei coefficienti di Fourier delle funzioni di  $H_0^1$ .

Non é difficile dimostrare che  $H_0^1$  é formato dalle funzioni assolutamente continue, cioé della forma:

$$f(x) = \int_0^x ds g(s)$$

con  $g \in L^2([0, \pi])$ . Dimostrare l'asserto per esercizio.

**Nota.** In vista di quanto diremo nel seguito, é bene osservare che mentre la successione  $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$  non é una base completa in  $L^2([-\pi, \pi])$  (infatti mancano i coseni per poter rappresentare ogni funzione per mezzo della serie di Fourier), essa é una base completa in  $L^2([0, \pi])$ . Si dimostri l'asserto.

Occorre tenere a mente il seguente importante fatto. Sia  $\{\hat{f}_k\}$  una successione per cui vale la (110). Consideriamo:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_n e^{inx}. \quad (111)$$

Ora le funzioni del tipo (111) non soddisfano necessariamente le condizioni al contorno nulle, pur essendo funzioni abbastanza regolari per le proprietá di decadimento dei coefficienti (decadono piú di  $|n|^{-1}$ ). Lo spazio che cosi si ottiene, denotato usualmente con  $H^1$ , contiene le funzioni assolutamente continue con derivata  $L^2$ , che non sono necessariamente nulle agli estremi.  $H^1$  non é dunque il completamento di  $H_0^1$ , che é giá completo di per se, ma é uno spazio strettamente piú grande.

Lo spazio  $H^1$  puó essere definito in generale come lo spazio delle funzioni  $L^2(Q)$  con derivata distribuzionale in  $L^2(Q)$  e con norma  $\|f\|_{H^1}^2 = \|f\|^2 + \|\nabla f\|^2$ . Ovviamente  $H_0^1$  é strettamente contenuto in  $H^1$ .

Dimostriamo ora un fatto molto importante che fornisce una caratterizzazione dei compatti in  $L^2(0, \pi)$ .

Vale l'affermazione seguente: le parti limitate e chiuse di  $H_0^1((0, \pi))$  sono compatte in  $L^2([0, \pi])$ .

A questo fine si consideri una successione  $f_n$  in  $H_0^1$  tale che:

$$\|f_n'\|^2 = \|f_n\|_1^2 = \sum_{k \geq 1} k^2 |(\hat{f}_n)_k|^2 < C \quad (112)$$

Sia  $f_{n_i}$  una sottosuccessione tale che  $(f_{n_i})_k \rightarrow f_k$  per ogni  $k > 0$ . Fissato ad arbitrio  $M > 0$ :

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \sum_{j > i} \sum_{k \geq 1} |(\hat{f}_{n_i})_k - (\hat{f}_{n_j})_k|^2 = \limsup_{i \rightarrow \infty} \sum_{j > i} \sum_{k \geq M} |(\hat{f}_{n_i})_k - (\hat{f}_{n_j})_k|^2 \frac{k^2}{k^2} \leq \frac{2C}{M^2}$$

e quindi  $f_{n_i}$  converge fortemente in  $L^2$ .

Quanto mostrato nel caso unidimensionale vale anche in dimensione maggiore e cioé si puó anche mostrare, piú in generale, che insiemi chiusi e limitati di  $H_0^1(Q)$  sono compatti

in  $L^2(Q)$ . Prima di dimostrare questo fatto, (vedi Teorema seguente) ne considereremo un importante conseguenza.

Vogliamo studiare, se esiste, l'inverso dell'operatore  $\Delta$ , per il momento definito su  $C_c^\infty(Q)$ , con  $Q$  aperto limitato e regolare in  $\mathbb{R}^n$ .

Supponiamo dunque che esista un operatore  $A$  definito da

$$A : v \rightarrow Av \in H_0^1, \quad v \in C_c^\infty(Q)$$

tale che

$$(Av, \Delta u) = (v, u), \quad u, v \in C_c^\infty(Q).$$

Allora, dalla precedente identità segue

$$A^* \Delta = \Delta A = 1 \tag{113}$$

e inoltre dalla

$$(A \Delta u, \Delta v) = (\Delta u, v) = (u, \Delta v) \tag{114}$$

segue anche

$$A \Delta = 1, \quad A = A^*$$

e dunque  $A$  inverte  $\Delta$  ed é simmetrico. Osserviamo che le identità (113) e (114) valgono per  $u, v \in C_c^\infty$ .

Per dimostrare l'esistenza di questo operatore  $A$  consideriamo  $v \in L^2(Q)$  e il funzionale lineare  $l_v : H_0^1 \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$l_v(u) = (v, u), \quad u \in H_0^1. \tag{115}$$

Per la (106):

$$|l_v(u)| \leq \|v\| \|u\| \leq C \|v\| \|u\|_1$$

e dunque il teorema di Riesz ci assicura che esiste  $\bar{v} \in H_0^1$  tale che

$$(v, u) = (\bar{v}, u)_1, \quad v \in L^2, u \in H_0^1. \tag{116}$$

Denotiamo con  $-A$  l'operatore  $v \rightarrow \bar{v}$ , definito su tutto  $L^2$ . Per  $u, v \in C_c^\infty$  risulta

$$(v, u) = -(\nabla Av, \nabla u) = (Av, \Delta u)$$

Abbiamo dunque costruito l'operatore  $A$ . Inoltre

$$\|Av\|_1^2 = (Av, Av)_1 = -(v, Av) \leq \|v\| \|Av\|,$$



da cui, usando la (106) ne segue che  $A$  é non solo limitato. ma anche compatto in virtú del Teorema 1.3 seguente.

Si noti poi che, dall'identitá

$$(v, u) = -(Av, u)_1$$

( $v \in L^2$  e  $u \in H_0^1$ ) ne segue che se  $Av = 0$  allora anche  $v = 0$ . Dunque  $A$  é invertibile in  $L^2$ , con inverso illimitato perché  $A$  é compatto.  $A^{-1}$  estende  $\Delta$  che possiamo pensare come definito sul codominio di  $A$ .

La conseguenza fondamentale di questa analisi é che, sulla base del teorema spettrale, possiamo evincere che esiste una base ortonormale  $\{e_j\}$  in  $L^2$  tale che:

$$Ae_j = \lambda_j e_j \tag{117}$$

con gli autovalori  $\lambda_j < 0$  perché  $A$  é negativo. Si noti che  $A$  é invertibile e dunque 0 non può essere un autovalore. Le funzioni  $e_j$  sono nel codominio di  $A^n$  per ogni  $n$  e dunque sono funzioni molto regolari perché  $A$ , essendo compatto, ha un'azione regolarizzante. Si può in effetti dimostrare che  $e_j \in C_0^\infty$  come vedremo tra poco.

Dalla (117) ne segue che:

$$-\Delta e_j = \mu_j e_j \tag{118}$$

dove  $\mu_j = -\lambda_j^{-1}$  sono gli autovalori dell'operatore di Laplace. Naturalmente  $\mu_j \rightarrow \infty$  quando  $j \rightarrow \infty$  e possono essere ordinati in ordine crescente  $\mu_1 \leq \mu_2 \dots$ .

Si osservi che l'operatore di Laplace  $\Delta$  definito come inverso dell'operatore  $-A$ , é definito su un dominio piú grande di  $C_c^\infty$ , dominio iniziale, ma, essendo in  $H_0^1$  descrive condizioni al contorno nulle. Quest'analisi generalizza infatti la serie di Fourier per domini  $Q$  qualunque e permette di risolvere facilmente molti problemi lineari come ad esempio l'equazione delle onde o del calore con condizioni al contorno nulle, come vedremo piú in dettaglio alla fine del capitolo.

Come annunciato formuliamo il Teorema seguente che caratterizza gli insiemi compatti in  $L^2(Q)$ .

**Teorema 1.3** *La palla unitaria chiusa di  $H_0^1(Q)$  é compatta in  $L^2(Q)$ .*

**Dim.** La dimostrazione é basata sul teorema di compattezza di Ascoli-Arzelá.

Consideriamo una successione  $\{f_n\}$  tale che  $\|f_n\|_1 < 1$ . Vogliamo mostrare che é possibile estrarre una sottosuccessione convergente in  $L^2$ . A questo fine introduciamo un processo classico di regolarizzazione.

Sia  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  a supporto contenuto nella palla unitá di  $\mathbb{R}^n$ , positiva e tale che

$$\int_{|x|<1} dx g(x) = 1$$

Si definisca poi:

$$g_\eta(x) = \eta^{-n} g\left(\frac{x}{\eta}\right).$$

che é ancora una funzione  $C^\infty$ , positiva, di integrale uno ed é anche una approssimazione della  $\delta$ . Estendiamo ora la successione  $\{f_n\}$  ad una successione di funzioni, ancora denotata con  $\{f_n\}$ , definite su tutto  $\mathbb{R}^n$  ponendo semplicemente  $f_n(x) = 0$  se  $x \notin Q$ . Consideriamo infine la successione  $\{g_\eta * f_n\}$ . Questa é una successione di funzioni  $C^\infty$  equilimitata, equicontinua, e nulla al di fuori di un compatto di  $\mathbb{R}^n$  (precisamente  $\{x \in \mathbb{R}^n | \text{dist}(x, Q) < \eta\}$ ).

Vediamo l'equilimitatezza. Si ha

$$|g_\eta * f_n|(x) = \left| \int g_\eta(x-y) f_n(y) dy \right| \leq \frac{C}{\eta^n} \|f_n\|_{L_1(Q)} \leq \frac{C(Q)}{\eta^n} \|f_n\|. \quad (119)$$

L'equicontinuitá si dimostra analogamente:

$$\begin{aligned} |g_\eta * f_n(x) - g_\eta * f_n(y)| &= \left| \int [g_\eta(x-z) - g_\eta(y-z)] f_n(z) dz \right| \\ &\leq C(\eta) |x-y| \|f_n\|_{L_1(Q)} \leq C(\eta; Q) |x-y| \|f_n\|. \end{aligned} \quad (120)$$

dove  $C(\eta; Q)$  é una costante (dipendente da  $Q$  e divergente in  $\eta$ ).

Dunque, per ogni  $\eta$ , possiamo estrarre sottosuccessioni di  $\{g_\eta * f_n\}$ , uniformemente convergenti.

Denotiamo con  $g_\eta * f_n$  una sottosuccessione uniformemente convergente (e quindi convergente in  $L^2$ ) comune per una successione  $\eta \rightarrow 0$ . Questa sottosuccessione puó essere costruita con il solito argomento diagonale.

Si osservi inoltre che, in virtú dell'identitá di Parseval:

$$\int_{\mathbb{R}^n} dx |(g_\eta * f_n - f_n)(x)|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} dk |1 - (2\pi)^{n/2} \hat{g}_\eta(k)|^2 |\hat{f}_n(k)|^2. \quad (121)$$

D'altra parte

$$|(2\pi)^{n/2} \hat{g}_\eta(k) - 1| = \left| \int g(y) (e^{-iky} - 1) dy \right| \leq |k| \eta, \quad (122)$$

per cui

$$\int_{\mathbb{R}^n} dx |(g_\eta * f_n - f_n)(x)|^2 \leq \eta \int dk |k|^2 |\hat{f}_n(k)|^2 = \eta \|f_n\|_1 = \eta. \quad (123)$$

Concludiamo con un argomento  $\varepsilon/3$ :

$$\|f_n - f_m\| \leq \|g_\eta * f_n - g_\eta * f_m\| + \|g_\eta * f_n - f_n\| + \|g_\eta * f_m - f_m\|. \quad (124)$$

Il limite ( per  $n \rightarrow \infty$  e  $m > n$ ) del primo termine del membro di destra della (124) va a zero per il Teorema di Ascoli-Arzelá, mentre gli ultimi due sono uniformemente (in  $n$  e  $m$ ) limitati da  $\eta$  che é arbitrariamente piccolo. Quindi  $f_n$  é una successione di Cauchy in  $L^2$  e ciò conclude la prova. ■

Torniamo ora ad analizzare le proprietá di regolaritá delle autofunzioni  $e_j$  del Laplaciano. Vale il seguente

**Teorema 1.4** *Per ogni  $j = 1 \dots \infty$ ,  $e_j \in C_0^\infty(Q)$ . Inoltre vale la stima*

$$\|D^k e_j\|_{L^\infty} \leq C^k \mu_j^k$$

dove  $D$  denota una qualsiasi derivata parziale e col simbolo  $D^k$  si intende un qualsiasi prodotto di  $k$  derivate parziali.

**Dim.** Dalla (118) che riscriviamo per comoditá

$$-\Delta e_j = \mu_j e_j$$

possiamo concludere che

$$e_j(x) = \mu_j \int dy G_Q(x, y) e_j(y). \quad (125)$$

dove  $G_Q(x, y)$  la funzione di Green del problema di Poisson con condizioni nulle al bordo. In altre parole si ha :  $-\Delta_x G_Q(x, y) = \delta(x - y)$  e  $G_Q(x, y) = 0$  per  $x \in \partial Q$ .

Per fissare le idee lavoriamo in tre dimensioni. In particolare ci interessa richiamare che

$$G_Q(x, y) = G(x - y) + \gamma(x, y)$$

dove  $G$  é la funzione di Green libera e  $\gamma$  é una funzione armonica che aggiusta le condizioni al contorno nulle violate dalla  $G$ .

Come conseguenza, fissato  $y \in Q$ ,  $G_Q(\cdot, y) \in C^2(Q/\{y\})$  vale

$$|G_Q(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|}$$

e

$$|\nabla G_Q(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|^2}.$$

Infine  $G_Q(x, y) = G_Q(y, x)$  e  $\nabla_x G_Q(x, y) = -\nabla_y G_Q(x, y)$ . In altre parole, per  $x$  prossimo a  $y$ ,  $G_Q$  si comporta come la funzione di Green in tutto lo spazio.

Per cominciare osserviamo che, usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, poiché  $G_Q(x, \cdot)$  e  $e_j$  sono  $L^2$ , allora  $e_j \in L^\infty$ .

Ma anche

$$\nabla e_j(x) = \mu_j \int dy \nabla G_Q(x, y) e_j(y).$$

e poiché  $e_j$  è limitata e  $\nabla G_Q(x, \cdot)$  è integrabile, ne segue anche che  $\nabla e_j$  esiste e  $\nabla e_j \in L^\infty$ . Quindi  $e_j \in C^1$ .

Possiamo poi usare la stessa tecnica per ottenere regolarità maggiore. Infatti

$$D^2 e_j(x) = -\mu_j \int dy DG_Q(x, y) D e_j(y).$$

dopo aver integrato per parti.

A questo punto possiamo iterare la procedura e dimostrare che  $e_j \in C^\infty(Q)$ . Lasciamo al lettore provare la dipendenza da  $\mu_j$ . ■

**Osservazione** L'esistenza della funzione di Green in un dominio regolare  $Q$  è conseguenza dell'esistenza e unicità della soluzione dell'equazione di Laplace con condizioni assegnate al bordo. Questa affermazione sarà provata nel seguito con un argomento indipendente e cioè senza usare le proprietà delle autofunzioni che abbiamo discusso in questo paragrafo.

## 2. Equazione del calore

Affrontiamo ora il problema di Cauchy per l'equazione del calore con condizioni al contorno nulle .

Si consideri dunque il problema:

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u, & \text{in } Q \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial Q \\ u(x, 0) = u_0(x) \in L^2(Q). \end{cases} \quad (126)$$

E' naturale ipotizzare una soluzione della (126) della forma:

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t) e_j(x) \quad (127)$$

da cui si perviene facilmente al problema differenziale ordinario disaccoppiato:

$$\dot{u}_j = -\mu_j^2 u_j$$

che ha soluzione

$$u_j(t) = (u_0)_j e^{-\mu_j t},$$

da cui

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} (u_0)_j e^{-\mu_j t} e_j(x) \quad (128)$$

Confrontando con la (127), deve essere

$$(u_0)_j = (e_j, u_0).$$

Vogliamo ora dimostrare che la (128) é una soluzione (classica) dell'equazione del calore. Siccome si verifica facilmente che la (128) é una soluzione formale, per dimostrare che essa soddisfa effettivamente all'equazione del calore occorre dimostrare che la funzione  $u(x, t)$ , definita dalla (128) é differenziabile in  $t$  e due volte differenziabile in  $x$ .

Per far vedere ciò basta dimostrare che la serie a termini positivi

$$\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\mu_j t} \mu_j^k \quad (129)$$

é convergente per ogni  $t > 0$  e  $k$  intero positivo o nullo. Infatti dall'equazione agli autovalori segue che

$$\frac{1}{\mu_j} e_j(x) = \int G_Q(x, y) e_j(y) dy$$

da cui

$$\sum_j \left(\frac{1}{\mu_j}\right)^2 |e_j(x)|^2 = \sum_j \left| \int G_Q(x, y) e_j(y) dy \right|^2 = \int |G_Q(x, y)|^2 dy.$$

Si noti che l'ultimo termine ha senso perché  $G_Q(x, y)$ , come funzione di  $y$  a  $x$  fissato é in  $L^2(Q)$  e inoltre

$$\int |G_Q(x, y)|^2 dy dx \leq C$$

Integrando rispetto a  $x$  si perviene alla stima

$$\sum_j \left(\frac{1}{\mu_j}\right)^2 \leq C \quad (130)$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo commutato l'integrale con la serie (si dimostri che ciò é lecito) utilizzando poi l'identità

$$\int dx |e_j(x)|^2 = 1.$$

La convergenza della serie (129) (per  $t > 0$  beninteso) segue chiaramente dalla (130).

In conclusione

**Teorema 1.5** *La funzione  $u = u(x, t)$  definita dalla (128) é una soluzione classica dell'equazione del calore per ogni  $t > 0$ . Inoltre*

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = u_0(x) \quad (131)$$

nel senso  $L^2(Q)$ . Tale soluzione é unica.

Inoltre, se  $u_0 \geq 0$  allora  $u(x, t) \geq 0$ .

Infine

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 \quad (132)$$

nel senso  $L^2(Q)$ .

Lasciamo al lettore la prova ovvia della (131) e della (132) . Per quanto riguarda l'unicitá e la positivitá, basta invocare il principio del massimo per l'equazione del calore.

Si noti infine la forte proprietá di regolarizzazione che emerge dalla soluzione dell'equazione del calore: dati  $L^2$  si regolarizzano istantaneamente diventando infinitamente differenziabili nel tempo e nello spazio.

Con la stessa tecnica si puó risolvere l'equazione di Schrödinger

$$\begin{cases} i\partial_t u = -\Delta u, & \text{in } Q \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial Q \\ u(x, 0) = u_0(x) \in L^2(Q). \end{cases} \quad (133)$$

e l'equazione delle onde

$$\begin{cases} \partial_{tt} u = \Delta u, & \text{in } Q \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial Q \\ u(x, 0) = u_0(x), \partial_t u(x, 0) = v_0(x) & u_0 \in H_0^1, v_0 \in L^2. \end{cases} \quad (134)$$

Si osservi però che le soluzioni che otteniamo per serie in questi due casi, non hanno la stessa regolaritá delle soluzioni dell'equazione del calore, ma ereditano solo la regolaritá del dato iniziale.

**Esercizio 1** Dimostrare che, nelle ipotesi fatte, l'equazione delle onde ottenuta per serie gode della proprietá di conservare l'energia. Perché abbiamo assunto che  $u_0 \in H_0^1$ ?

**Esercizio 2** Dimostrare che la soluzione ottenuta per l'equazione di Schrödinger conserva la norma  $L^2$ . Se supponiamo che  $u_0 \in H_0^1$ , allora anche la norma  $H_0^1$  è conservata. Interpretare fisicamente queste leggi di conservazione.

Sappiamo che la funzione di Green  $G_Q$  si può costruire risolvendo il Problema di Laplace con condizioni di Dirichlet. Ma anche l'inverso è vero. Infatti, supponiamo di possedere la funzione di Green  $G_Q$ . Percorrendo le stesse linee che ci portarono a dimostrare la rappresentazione integrale delle funzioni armoniche, richiamata in Introduzione, si perviene all'identità

$$u(x) = \int_{\partial Q} \partial_{n_y} G_Q(x, y) u(y) d\sigma(y)$$

per cui noto il valore al bordo di una funzione armonica si può conoscere il suo valore all'interno del dominio. Quindi conoscendo  $G_Q$  si può risolvere il problema di Laplace con dato al bordo assegnato.

Si osservi infine che la conoscenza degli autovalori e delle autofunzioni di  $\Delta$  ci permette di dare un'espressione, purtroppo solo formale, della funzione di Green. Infatti espandendo  $G_Q$  come funzione della prima variabile in autofunzioni, si ha

$$G_Q(x, y) = \sum_i G_i(y) e_i(x)$$

dove

$$G_i(y) = \int_Q G_Q(x, y) \bar{e}_i(x).$$

Ma

$$G_i(y) = -\frac{1}{\mu_i} \int_Q G_Q(x, y) \Delta \bar{e}_i(x) = \frac{1}{\mu_i} \int_Q \Delta G_Q(x, y) \bar{e}_i(x) = \frac{1}{\mu_i} \int_Q \delta(x - y) \bar{e}_i(x) = \frac{1}{\mu_i} \bar{e}_i(y)$$

da cui si ottiene

$$G_Q(x, y) = \sum_i \frac{1}{\mu_i} e_i(x) \bar{e}_i(y).$$

Lo studio della convergenza di questa serie non è agevole.

### 3. Potenziali di volume, di semplice e doppio strato

In elettrostatica (ma anche nello studio dei fenomeni gravitazionali) occorre spesso dover studiare il potenziale generato da una distribuzione di volume o superficiale di cariche o una distribuzione superficiale di dipoli. Questi concetti sono legati alla soluzione di equazioni importanti, quale l'equazione di Laplace o di Poisson, che trovano applicazione

in molti campi della Fisica e nelle applicazioni. Ad esempi o in Teoria dell'elasticità e nella Meccanica dei Fluidi.

Richiamiamo questi concetti.

Sia  $\rho \in L^\infty \cap L^1(\mathbb{R}^3)$ . Si consideri il potenziale di volume definito da

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho(y)}{|x-y|} dy = \int G(x-y)\rho(y)dy \quad (135)$$

Ricordiamo che la funzione di Green libera  $G(x) = \frac{1}{4\pi|x|}$  risolve

$$\Delta G(x) = -\delta(x)$$

per cui ci si aspetta che  $u$ , definita da (135) sodeisfi all'equazione di Poisson

$$\Delta u(x) = -\rho(x) \quad (136)$$

Si osservi preliminarmente che l'integrale al membro di destra della (135) é ben definito.

**Esercizio** Si dimostri che  $|u(x)| \leq C$

La finitezza di questo integrale non garantisce però che l'equazione di Poisson si soddisfa in senso classico. Perché ciò accada deve essere  $u \in C^2$ .

Ci aspettiamo che almeno  $u \in C^1$  perché, formalmente

$$\nabla u(x) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{(x-y)}{|x-y|^3} \rho(y) dy \quad (137)$$

da cui, osservando che  $\frac{1}{|x-y|^2}$  é localmente sommabile, l'esistenza del membro di destra suggerisce che  $\nabla u$  esiste ed é dato dalla formula (137).

**Esercizio** Si dimostri che  $\nabla u$  esiste e che vale la (137).

**Esercizio** Si dimostri che, nelle stesse ipotesi, la  $u$  soddisfa all'equazione di Poisson nella seguente forma debole

$$\int \varphi(x)\rho(x)dx = \int \nabla\varphi(x) \cdot \nabla u(x)$$

per ogni  $\varphi \in C_0^\infty$ .

Perché la (135) sia una soluzione classica dell'equazione di Poisson occorre richiedere una qualche regolarità ulteriore per la  $\rho$ . Se assumiamo che  $\rho \in C^1$  allora, con una semplice integrazione per parti otteniamo



$$\nabla u(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{|x-y|} \nabla \rho(y) dy \quad (138)$$

da cui, per l'argomento visto prima, risulta  $u \in C^2$  e dunque  $u$  é una soluzione classica.

Questo risultato ci lascia insoddisfatti. Dall' equazione di Poisson sembrerebbe che nel passaggio  $\rho \rightarrow u$  si debba poter guadagnare due derivate e non soltanto una. In effetti é possibile dimostrare che, in aggiunta alle ipotesi che abbiamo fatto, se  $\rho \in C^\alpha$ , con  $\alpha > 0$  (spazio delle funzioni Hölder continue di esponente  $\alpha$  allora  $u \in C^2$ . Per vedere questo fatto, assumiamo per semplicitá che  $\rho$  sia a supporto compatto.

Per vedere questo fatto si definisca

$$K_{i,j}(x-y) = -\frac{\delta_{i,j}}{|x-y|^3} + 3\frac{(x-y)_i(x-y)_j}{|x-y|^5} = \partial_i \partial_j G(x-y)$$

dove  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ . Allora, fissato  $x \in \mathbb{R}^3$ , sia  $R$  abbastanza grande in modo che  $B(x, R)$ , la sfera di raggio  $R$  e centro  $x$ , contenga il supporto di  $\rho$ . Sia infine  $B_\varepsilon(x, R) = B(x, R)/B(x, \varepsilon)$ .

Calcoliamo allora

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_\varepsilon(x, R)} K_{i,j}(x-y) \rho(y)$$

che é un buon candidato per  $\partial_i \partial_j u$ . Si osservi che  $K_{i,j}$  non é localmente integrabile per cui occorre cautelarci isolando la singolaritá.

Poiché

$$\int_{B_\varepsilon(x, R)} K_{i,j}(x-y) = 0 \quad (139)$$

per simmetria, allora

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_\varepsilon(x, R)} K_{i,j}(x-y) \rho(y) dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_\varepsilon(x, R)} K_{i,j}(x-y) (\rho(y) - \rho(x)) dy = \int_{B(x, R)} K_{i,j}(x-y) (\rho(y) - \rho(x)) dy$$

L'ultimo passaggio é giustificato dal fatto che l'integrando é questa volta localmente sommabile perché, in virtú della disuguaglianza  $|\rho(x) - \rho(y)| \leq C|x-y|^\alpha$  si evince che

$$|K_{i,j}(x-y) (\rho(y) - \rho(x))| \leq C \frac{1}{|x-y|^{3-\alpha}}$$

e dunque l'ultimo integrale esiste.

La dimostrazione della (139) non é immediata. Si consiglia di considerare separatamente il caso  $i = j$  e  $i \neq j$ . Si trovino poi le cancellazioni cruciali che intervengono nell'integrazione per ottenere la (139).

Passiamo ora a definire il potenziale di strato semplice. Sia  $\Sigma$  una superficie regolare immersa in  $\mathbb{R}^3$ .  $\rho \in C(\Sigma; \mathbb{R})$  una distribuzione di cariche superficiali

Ricordiamo che il potenziale  $u$  generato da tale distribuzione superficiale di cariche (talvolta detto potenziale di singolo strato), é dato dalla formula:

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \sigma(dy) \frac{\rho(y)}{|x-y|}, \quad (140)$$

dove  $\sigma$  é la misura superficiale.

$u(x)$  é naturalmente ben definito in tutti i punti (inclusi quelli della superficie  $\Sigma$  perché  $\frac{1}{|x|}$  é integrabile in due dimensioni), ed é continuo nell'attraversamento della superficie  $\Sigma$ .

Naturalmente  $u$  é armonica in  $\mathbb{R}^3/\Sigma$ .

Per risolvere il problema di Laplace con condizioni al contorno di Dirichlet per un dominio generale, cosa che faremo nella prossima sezione, é utile richiamare la nozione di potenziale generato da una distribuzione di dipoli detta anche distribuzione di doppio strato.

Consideriamo due cariche puntiformi localizzate nei punti  $y$  e  $y + hn$ , dove  $h$  é un piccolo parametro e  $n$  é un versore prefissato. Le due cariche valgono  $-h^{-1}$  e  $h^{-1}$ . Tale configurazione di cariche prende il nome di dipolo.

Calcoliamo ora il potenziale generato da questa coppia di cariche. Si noti che le cariche devono divergere in ragione inversamente proporzionale alla distanza, se vogliamo che il potenziale da esse generato in un punto assegnato non tenda a svanire. Denotando con  $u_h$  tale potenziale, risulta (ricordiamo che  $G(x) = \frac{1}{4\pi|x|}$  in 3 dimensioni).

$$u_h(x) = \frac{1}{h} [G(x-y-hn) - G(x-y)] \quad (141)$$

e dunque, definendo:

$$v(x) = \lim_{h \rightarrow 0} u_h(x)$$

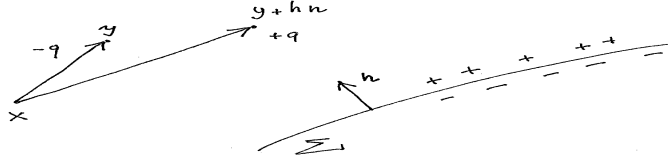
si ha:

$$v(x) = \nabla_y G(x-y) \cdot n = \frac{1}{4\pi} \frac{(x-y) \cdot n}{|x-y|^3} = \frac{1}{4\pi} \frac{\cos(x-y, n)}{|x-y|^2} \quad (142)$$

La funzione  $v = v(x)$  data dalla (142), definita per  $x \neq y$ , é armonica e descrive il potenziale generato da un dipolo puntiforme. Si osservi che la singolaritá per  $x \approx y$  é  $O(|x-y|^{-2})$  e quindi piú forte di quella creata dall'usuale potenziale di singolo strato.

Data ora una superficie  $\Sigma$ , consideriamo una distribuzione continua di dipoli  $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  su di essa. Per un dipolo dobbiamo considerare non solo la densitá di carica  $\mu$ , ma anche la direzione. Assumeremo che tale direzione sia la normale  $n$  alla superficie (dal meno al piú come in figura). Il potenziale generato da tale superficie sará dunque:

$$v(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \mu(y) \frac{\cos(x-y, n)}{|x-y|^2} d\sigma(y) \quad (143)$$



L'espressione (143) prende il nome di potenziale di doppio strato. Si osservi che la (143) é perfettamente ben definita, non solo in  $\mathbb{R}^3/\Sigma$  dove  $v$  é armonica, ma anche per  $x \in \Sigma$ . Infatti per  $x \approx y$ , (con  $x, y \in \Sigma$ ),  $\cos(x - y, n) \approx |x - y|$  e dunque la singolaritá nell'integrale (143) é dell'ordine di  $|x - y|^{-1}$  la qual cosa rende perfettamente convergente l'integrale anche se  $x \in \Sigma$ .

La funzione  $v$  sará dunque pensata definita ovunque, compresi i punti della superficie. Tuttavia, anche se il potenziale generato da un doppio strato ha senso se calcolato sulla superficie, la funzione  $v(x)$  non é continua nell'attraversamento della superficie stessa. Per vedere questo fatto conviene, inizialmente, considerare il semplice caso di una superficie piatta  $\Sigma = \{x_3 = 0\}$ . Si ha:

$$v(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi} \int \int dy_1 dy_2 \mu(y_1, y_2) \frac{\cos \theta}{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

dove  $\theta$  é l'angolo formato dall'asse delle  $x_3$  e dal vettore  $x - y$ .

Per semplificare le notazioni possiamo assumere il punto  $x$  potenziato, sull'asse delle  $x_3$  e dunque l'espressione assume la forma:

$$v(0, 0, x_3) = \frac{1}{4\pi} \int \int dy_1 dy_2 \mu(y_1, y_2) \frac{x_3}{(y_1^2 + y_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \quad (144)$$

Vogliamo investigare il limite  $x_3 \rightarrow 0$  di questa espressione. Posto  $x_3 = \pm \varepsilon$ , con  $\varepsilon > 0$  e operando un opportuno cambio di variabili si ottiene:

$$v(0, 0, \pm \varepsilon) = \pm \frac{1}{4\pi} \int \int dy_1 dy_2 \mu(\varepsilon y_1, \varepsilon y_2) \frac{1}{(y_1^2 + y_2^2 + 1)^{3/2}}.$$

Poiché vale

$$\int \int dy_1 dy_2 \frac{1}{(y_1^2 + y_2^2 + 1)^{3/2}} = 2\pi$$

e  $\mu$  é una funzione continua, ne consegue che:

$$\lim_{x_3 \rightarrow 0^\pm} v(0, 0, x_3) = \pm \frac{1}{2} \mu(0, 0)$$

o, in generale,

$$\lim_{x_3 \rightarrow 0^\pm} v(x_1, x_2, x_3) = \pm \frac{1}{2} \mu(x_1, x_2)$$

Dunque  $v(x)$  é una funzione che ha una discontinuitá di salto per  $x_3 = 0$  e il salto é dato dalla densitá  $\mu$  calcolata nel punto di attraversamento della superficie.

Nella precedente dimostrazione abbiamo calcolato la discontinuitá attraversando la superficie  $\Sigma$  trasversalmente. E' facile dimostrare che il risultato non cambia se la superficie é attraversata in maniera arbitraria.

Un'ulteriore osservazione sul limite appena discusso sará utilizzata nel seguito. Posto

$$v_\delta(0, 0, \pm\varepsilon) = \frac{1}{4\pi} \int \int_{\{|y_1^2 + y_2^2| < \delta^2\}} \mu(y_1, y_2) \frac{x_3}{(y_1^2 + y_2^2 + x_3^2)^{3/2}} dy_1 dy_2 \quad (145)$$

con  $|x_3| = \varepsilon$  e  $\varepsilon/\delta \rightarrow 0$ . Si puó dimostrare che:

$$\lim_{x_3 \rightarrow 0^\pm} v_\delta(0, 0, x_3) = \pm \frac{1}{2} \mu(0, 0) \quad (146)$$

e dunque l'unico contributo dell'integrale al limite viene da un piccolo intorno dell'origine.

Il lettore proverá questa affermazione per esercizio.

Siamo ora in posizione di considerare il caso generale. Si consideri una superficie regolare  $\Sigma$ ,  $x_0 \in \Sigma$  e  $I_\delta$ :

$$I_\delta = \Sigma \cap \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$$

l'intersezione di  $\Sigma$  con una sfera di raggio  $\delta$  attorno al punto  $x_0$ . Allora per  $x \notin \Sigma$ ;

$$v(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{I_\delta} \mu(y) \frac{\cos(x - y, n)}{|x - y|^2} d\sigma(y) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma/I_\delta} \mu(y) \frac{\cos(x - y, n)}{|x - y|^2} d\sigma(y). \quad (147)$$

Posto  $\varepsilon = |(x - x_0) \cdot n|$ , dove  $n$  é la normale in  $x_0$  a  $\Sigma$  e consideriamo ora il limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon/\delta \rightarrow 0$ . Il primo integrale puó essere calcolato come nel caso piatto (con un piccolo errore dipendente da  $o(\delta)$ ), mentre il secondo integrale converge a

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \mu(y) \frac{\cos(x - y, n)}{|x - y|^2} d\sigma(y).$$

In conclusione arriviamo all'importante formula:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^{\pm}} v(x) = \pm \frac{1}{2} \mu(x_0) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \mu(y) \frac{\cos(x_0 - y, n)}{|x_0 - y|^2} d\sigma(y). \quad (148)$$

Si noti che nel caso piatto il contributo dell'integrale nel membro di destra della (148) svanisce perché  $\cos(x_0 - y, n) = 0$ .

La formula (148) costituisce, come vedremo nella prossima sezione, un utile strumento per la soluzione del problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace.

La formula (148) é stata ottenuta per via diretta con considerazioni geometriche che non abbiamo completato. C'e' una strada piú elegante per ottenere questa formula (interessante di per se) che presenteremo piú avanti.

Concludiamo con un'osservazione notazionale:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\cos(x - y, n)}{|x - y|^2} = \frac{\partial G(x - y)}{\partial n_y}$$

dove  $\frac{\partial G(x-y)}{\partial n_y}$  é la derivata direzionale nella direzione  $n_y$ .

## 4. Campo elettrico generato da uno strato singolo

Dato un potenziale  $u$  di strato singolo (vedi (140)) passiamo ora ad analizzare il comportamento di  $\nabla u$ , che, a meno di un segno, é il campo elettrico generato da una distribuzione superficiale di cariche positive  $\rho$ .

Saremmo tentati di scrivere l'uguaglianza:

$$\nabla u(x) = \int_{\Sigma} \nabla G(x, y) \rho(y) d\sigma(y) \quad (149)$$

Al solito il membro di destra della (149) ha perfettamente senso per  $x \notin \Sigma$  e si puó facilmente dimostrare che, in quest'ipotesi, si puó differenziare la (140) sotto il segno di integrale e dunque la (149) vale. I problemi nascono quando si vuole calcolare il campo  $\nabla u(x)$  su  $\Sigma$ . Poiché  $\nabla G(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \frac{(x-y)}{|x-y|^3}$ , la singolaritá non é integrabile per cui il campo

$\nabla u(x)$  non ha un ovvio senso se calcolato su  $\Sigma$ . Se proiettiamo  $\nabla u(x)$  lungo la direzione normale  $n$  alla superficie in un punto  $x$  abbiamo la seguente espressione:

$$\frac{\partial u}{\partial n_x}(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \rho(y) \frac{\cos(x-y, n_x)}{|x-y|^2} d\sigma(y) = \int_{\Sigma} \frac{\partial G}{\partial n_x}(x-y) \rho(y) d\sigma(y)$$

In analogia con quanto visto per il potenziale di doppio strato, del campo  $\frac{\partial u}{\partial n_x}(x)$  ammette una discontinuità di salto nell'attraversamento della superficie nel punto  $x_0$  e tale discontinuità è data dalla densità di carica  $\rho(x_0)$ . Procedendo come nel caso del potenziale di doppio strato otteniamo le formule:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^{\pm}} \frac{\partial u}{\partial n_{x_0}}(x) = \mp \frac{1}{2} \mu(x_0) + \int_{\Sigma} \mu(y) \frac{\partial G}{\partial n_{x_0}}(x_0-y) d\sigma(y).$$

Non è difficile dimostrare che invece la componente tangente del campo  $E = -\nabla u$  è continua.

Si consideri, per esercizio, una distribuzione di cariche sulla retta  $\{x_2 = 0\}$  in  $\mathbb{R}^2$ , e il potenziale bidimensionale  $G(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \log|x-y|$ . Si calcoli il campo  $E(0, x_2)$  e le proprietà di continuità per  $x_2 \rightarrow 0^{\pm}$  delle due componenti  $E_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Si svolga lo stesso esercizio nel caso in cui la superficie sia un piano.

## 5. Formula di Gauss

Come annunciato dimostriamo la formula (148) che è stata ottenuta con argomenti geometrici che non abbiamo sviluppato fino in fondo. Premettiamo il seguente importante Lemma.

**Lemma di Gauss** *Sia  $D$  un dominio regolare di frontiera  $\Sigma$ . Si consideri meno il potenziale di doppio strato con distribuzione uniforme ( $\mu = 1$ ):*

$$u(x) = - \int_{\Sigma} \frac{\partial G}{\partial n_y} d\sigma(y). \tag{150}$$

Allora

$$\begin{aligned} u(x) &= 0 \quad \text{se } x \in D^c \\ u(x) &= 1/2, \quad \text{se } x \in \partial D \\ u(x) &= 1, \quad \text{se } x \in D. \end{aligned}$$

**Dim.**

Se  $x \in D^c$

$$u(x) = - \int_{\Sigma} \frac{\partial G}{\partial n_y} d\sigma(y) = - \int_D \Delta_y G(x - y) d\sigma(y) = 0.$$

Se invece  $x \in D$ , isoliamo la singolarità con una palla  $B(x, \varepsilon)$  di raggio  $\varepsilon$ .

Allora

$$0 = \int_{D/B(x, \varepsilon)} \Delta_y G(x - y) d\sigma(y) = \int_{\Sigma} \frac{\partial G}{\partial n_y} d\sigma(y) + \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \frac{\partial G}{\partial n_y} d\sigma(y).$$

Poiché l'ultimo integrale tende a  $-1$  per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , anche questo caso é provato.

Rimane da considerare il caso in cui il punto  $x$  sia sulla frontiera. Isolando ancora la singolarità con la palletta  $B(x, \varepsilon)$  si perviene al risultato perché il contributo dell'integrale superficiale su  $\partial B(x, \varepsilon)$  tende a  $\frac{2\pi}{4\pi} = 1/2$ .

■

Il lemma che abbiamo appena dimostrato é lo stesso Teorema di Gauss che il lettore ha visto nel corso di Fisica. In quel contesto si affermava che il flusso del campo elettrico generato da una distribuzione di cariche all'interno di un dominio, é pari alla somma delle cariche interne, mentre le cariche esterne non contribuiscono al flusso. In effetti la quantità  $-\frac{\partial G}{\partial n_y}$  può essere interpretata come  $E(y - x) \cdot n_y$ , dove  $E(y - x)$  é il campo elettrico generato da una carica unitaria posta in  $x$  e calcolato nel punto  $y$ . Pertanto membro destro della (150) é proprio il flusso del campo elettrico generato da tale carica. Il Lemma di Gauss ci dice che tale flusso non dipende da  $x$  ma solo dal valore della carica, in questo caso unitaria. Per linearità si prova poi l'asserto generale. E' istruttivo confrontare la dimostrazione presentata nei libri di Fisica (essenzialmente geometrica) con quella delle presenti note.

Possiamo infine utilizzare questo risultato per la prova della (148) nel modo seguente. Sia  $x \in D$  e  $x_0 \in \partial D$  e dunque  $x$  approssima  $x_0$  dall'interno. L'altro caso é del tutto analogo. Allora

$$\begin{aligned}
v(x) &= \int_{\Sigma} \frac{\partial G}{\partial n_y}(x-y)\mu(y)d\sigma(y) = \\
&= -\mu(x_0) + \int_{\Sigma} \frac{\partial G}{\partial n_y}(x-y)[\mu(y) - \mu(x_0)]d\sigma(y) \\
&= -\mu(x_0) + \int_{\Sigma} \left[ \frac{\partial G}{\partial n_y}(x-y) - \frac{\partial G}{\partial n_y}(x_0-y) \right][\mu(y) - \mu(x_0)]d\sigma(y) \quad (151) \\
&+ \int_{\Sigma} \frac{\partial G}{\partial n_y}(x_0-y)[\mu(y) - \mu(x_0)]d\sigma(y) \\
&= -\frac{\mu(x_0)}{2} + \int_{\Sigma} \frac{\partial G}{\partial n_y}(x_0-y)\mu(y)d\sigma(y) + F(x_0, x)
\end{aligned}$$

dove

$$F(x_0, x) = \int_{\Sigma} \left[ \frac{\partial G}{\partial n_y}(x-y) - \frac{\partial G}{\partial n_y}(x_0-y) \right][\mu(y) - \mu(x_0)]d\sigma(y)$$

e dunque si tratta di dimostrare che  $F \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow x_0$ .

Per far vedere ques'ultimo fatto si osservi che dalla uniforme continuit  di  $\mu$  segue che

$$|\mu(y) - \mu(x_0)| \leq \varepsilon$$

se  $|y - x_0| \leq \delta$ . Quindi il contributo all'integrale che definisce  $F$  per la parte relativa all'integrazione sulla parte di frontiera  $\Sigma \cap B(x_0, \delta)$    controllato da  $C\varepsilon$  perch'  $\frac{\partial G}{\partial n_y}$    integrabile sulla superficie. D'altra parte l'altra porzione di integrale, quella su  $\Sigma \cap B^c(x_0, \delta)$  si controlla osservando, che a distanza  $\delta$  dalla singolarit ,

$$\left| \frac{\partial G}{\partial n_y}(x-y) - \frac{\partial G}{\partial n_y}(x_0-y) \right| \leq C\varepsilon$$

purch   $|x - x_0|$  sia sufficientemente piccolo. Dunque  $F$  tende a zero e la (148)   provata.

Prima di concludere introduciamo il concetto di capacit  di un condensatore.

Siano  $Q_0 \subset Q_1 \subset \mathbb{R}^3$  due domini regolari limitati. Siano  $\Sigma_0 = \partial Q_0$  e  $\Sigma_1 = \partial Q_1$ . Ovviamente  $\Sigma_1$  racchiude  $\Sigma_0$ . Nel dominio (con buco)  $D = Q_1/Q_0$  consideriamo la funzione armonica  $u$  che assume valore 1 su  $\Sigma_0$  e valore 0 su  $\Sigma_1$ . Questo   un modello matematico di condensatore e il domini  $Q_0$  e  $Q_1$  sono dei conduttori, formati cio  da materiali a potenziale costante.  $-\nabla u$    il campo elettrico generato da questa situazione all'interno. Allora la capacit  di questo condensatore   data dalla formula

$$C = - \int_{\Sigma} \partial_{n_y} u(y) d\sigma(y)$$

dove  $\Sigma$    una qualunque superficie che racchiude  $\Sigma_0$  ed   racchiusa da  $\Sigma_1$ .



**Esercizio** Si dimostri che  $C$  non dipende da  $\Sigma$ .

**Esercizio** Si dimostri che

$$C = \int_D |\nabla u|^2(x) dx.$$

Dal secondo esercizio si evince che la capacità é una proprietá geometrica del condensatore che descrive la sua *capacitá* a contenere cariche elettriche.

## 6. Problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace

Siamo ora in posizione di costruire la soluzione  $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$  del problema:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } D \\ u(x) = f(x), & x \in \partial D \end{cases} \quad (152)$$

dove  $f \in C(\partial D)$  é assegnata e  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$  é un dominio regolare e limitato.

L'idea é quella di esprimere la soluzione di questo problema, se esiste, nella forma di potenziale di doppio strato ( $\Sigma = \partial D$ ):

$$u(x) = \int_{\Sigma} \mu(y) \frac{\partial G}{\partial n_y}(x - y) d\sigma(y) = \int_{\Sigma} \mu(y) K(x, y) d\sigma(y). \quad (153)$$

Per semplicitá notazionale abbiamo posto:

$$K(x, y) = \frac{\partial G}{\partial n_y}(x - y) = \frac{1}{4\pi} \frac{\cos(x - y, n)}{|x - y|^2}.$$

La nostra analisi si riferisce al caso tridimensionale, ma le nostre considerazioni valgono anche in dimensione due con le ovvie modifiche del caso.

Naturalmente  $u$  é una funzione armonica in  $D$ . La distribuzione di dipolo  $\mu$  non é a priori nota. La si vuole determinare imponendo per  $u$  le condizioni al contorno date dalla (152).

Se  $u$  é soluzione della (152), in virtú della (148) abbiamo :

$$f(x) = -\frac{1}{2}\mu(x) + \int_{\Sigma} \mu(y) K(x, y) d\sigma(y). \quad (154)$$

che é un'equazione integrale nell'incognita  $\mu$  sul dominio  $\Sigma$ . Poiché  $K$  ha nucleo integrabile, le considerazioni svolte in precedenza ci dicono che

$$K\mu = \int_{\Sigma} \mu(y) K(x, y) d\sigma(y).$$

é un operatore compatto in  $L^2(\Sigma, d\sigma)$ .

E' opportuno osservare che, perché la formula (148) valga, occorre che  $\mu$  sia almeno continua. Tuttavia l'operatore  $K$  é ben definito in  $L^2(\Sigma, d\sigma)$  come operatore compatto.

Usando l'alternativa di Fredholm abbiamo che si hanno soluzioni  $L^2$  della (154) se l'equazione aggiunta:

$$\frac{1}{2}\mu(x) = \int_{\Sigma} \mu(y)K^*(x, y)d\sigma(y) \equiv K^*\mu(x). \quad (155)$$

ammette solo la soluzione nulla.

Si osservi che il nucleo  $K^*$  dell'aggiunto di  $K$ , definito da

$$(K\mu, \nu) = (\mu, K^*\nu) \quad \mu, \nu \in L^2(\Sigma, d\sigma),$$

ha nucleo

$$K^*(x, y) = -\frac{\partial G}{\partial n_x}(x - y).$$

Prima di dirimere l'alternativa (in favore della (154) come é utile per i nostri scopi) osserviamo che, in entrambi i casi, (cioé sia se  $\mu$  risolve la (154) o la (155),  $\mu$  deve essere continua a seguito della continuitá di  $f$ .

Supponiamo che sia la (154) ad essere soddisfatta per  $\mu \in L^2$ . Operiamo una decomposizione del nucleo nella forma  $K = K_1 + K_2$  ove:

$$K_1(x, y) = K(x, y), \quad |x - y| > \varepsilon$$

$$K_1(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{\cos(x - y, n)}{\varepsilon^2}, \quad |x - y| \leq \varepsilon$$

e

$$K_2 = K - K_1.$$

Ne segue che  $K_2 = 0$  se  $|x - y| > \varepsilon$  e che  $\sup_{x \in \Sigma} \int K_2(x, y)\sigma(dy)$  é arbitrariamente piccolo se  $\varepsilon$  é sufficientemente piccolo. Se denotiamo con  $A_1$  e  $A_2$  i rispettivi operatori integrali generati da  $K_1$  e  $K_2$ , abbiamo:

$$f = -\frac{1}{2}\mu + A_1\mu + A_2\mu$$

e siccome  $\|A_2\| < 1/2$ , se  $\varepsilon$  é sufficientemente piccolo,

$$\left(\frac{1}{2} - A_2\right)^{-1}f = -\mu + \left(\frac{1}{2} - A_2\right)^{-1}A_1\mu.$$

Si osservino ora i due seguenti fatti. Se  $\mu \in L^2$  allora  $A_1\mu \in C(\Sigma)$ . (Vedi Esercizio 1). Inoltre se  $f \in C(\Sigma)$ , allora  $A_2f \in C(\Sigma)$  e  $\left(\frac{1}{2} - A_2\right)^{-1}f \in C(\Sigma)$  (vedi Esercizi 2 e 3). Come

conseguenza di ciò risulta  $\mu \in C(\Sigma)$ . Lo stesso argomento si applica per le soluzioni della (155) se esistono.

La preoccupazione di avere distribuzioni di doppio strato continue nasce dal fatto che per applicare la formula (154) abbiamo in effetti bisogno della continuità di  $\mu$  che abbiamo qui recuperato dalla teoria  $L^2$  svolta finora.

Per escludere soluzioni non banali della (155) procediamo per assurdo. Sia  $\mu \in C(\Sigma)$  una soluzione non banale della (155). Allora il potenziale di strato singolo  $w$  generato da questa distribuzione  $\mu$ , è una funzione armonica in  $\mathbb{R}^3/\partial D$ , che ha derivata normale esterna  $(\frac{\partial w}{\partial n}(x))^+ = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{\partial w}{\partial n}(x) = -\frac{1}{2}\mu + k^*\mu = 0$  per le considerazioni svolte nel precedente paragrafo.

Prendiamo ora una sfera  $S$  di raggio  $R$ , molto grande che contiene  $D$ . La funzione  $w$  in  $S/D$  è armonica, la derivata normale ha valori nulli in  $\partial D$  e molto piccoli in  $\partial S$ . Dall'identità:

$$\int_{S/D} |\nabla w|^2 dx = \int_{S/D} \operatorname{div} (w \nabla w) dx = \int_{\partial S} w \partial_n w \sigma(dx)$$

si ottiene che il membro di destra tende a zero quando  $R$  tende a infinito. Quindi  $\nabla w = 0$  e  $w = \text{cost}$ . D'altra parte  $w \rightarrow 0$  quando  $|x| \rightarrow \infty$  e dunque  $w = 0$  in  $\mathbb{R}^3/D$ . Infine, poiché  $w$  è continua nell'attraversamento di  $\Sigma$  e  $w$  è armonica in  $D$ ,  $w$  è anche nulla in  $D$  per il principio di massimo. Dunque  $w$  è nulla ovunque così come è nullo il salto della sua derivata normale. Ciò implica che  $\mu = 0$ .

### Esercizio 1

Sia  $\mu \in L^1(\Sigma)$ . Dimostrare che

$$\int_{\Sigma} \mu(y) K_1(x, y) d\sigma(y)$$

è una funzione continua.

Suggerimento.

Sia  $x_n \rightarrow x$ . Posto  $f_n(y) = K_1(x_n, y)\mu(y)$  e  $f(y) = K_1(x, y)\mu(y)$ , allora

$$\int f_n(y) \sigma(dy) \rightarrow \int f(y) \sigma(dy)$$

per il teorema di convergenza dominata.

**Esercizio 2** Sia  $f \in C(\Sigma)$ . Allora:

$$\int_{\Sigma} f(y) K_2(x, y) d\sigma(y) \in C(\Sigma).$$

Suggerimento.

Sia  $x_n \rightarrow x$  e  $\eta > 0$  arbitrariamente piccolo. Sia

$$g_n(y) = K_2(x_n, y)f(y)\chi(|y - x| > \eta),$$

dove  $\chi(|y - x| > \eta)$  é la funzione caratteristica dell'insieme  $|y - x| > \eta$ . Si ponga poi:

$$g(y) = K_2(x, y)f(y)\chi(|y - x| > \eta).$$

Allora:

$$\left| \int_{\Sigma} [K_2(x, y) - K_2(x_n, y)]f(y)d\sigma(y) \right| \leq o(\eta) + \int |g(y) - g_n(y)|d\sigma(y).$$

Applicare il teorema di convergenza dominata per concludere che l'ultimo integrale tende a zero.

**Esercizio 3** Dimostrare che:

$$\left(\frac{1}{2} - A_2\right)^{-1}f = 2 \sum_{k \geq 0} (2A_2)^k f$$

é continua.

Suggerimento.

In virtú dell' esercizio 2  $(2A_2)^k f$  é continua per ogni  $k \geq 0$ . E' sufficiente dimostrare che il resto della serie é arbitrariamente piccolo.

## 6. Un metodo rapido per una soluzione piú debole

Esiste un metodo che consente di trovare rapidamente la soluzione dell'equazione di Poisson in un dominio assegnato con condizioni nulle al bordo.

Si consideri dunque il problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{in } Q \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial Q \end{cases} \quad (156)$$

Se si moltiplica l'equazione per  $v \in H_0^1(Q)$ , si perviene rapidamente all'identitá

$$(\nabla u, \nabla v) = (f, v) \quad (157)$$

che deve valere per ogni  $v \in H_0^1(Q)$ . Possiamo dunque formulare il seguente problema. Assegnata  $f \in C(Q)$ , (o anche  $f \in L^2(Q)$ ) trovare  $u \in H_0^1(Q)$  tale che la (157) sia soddisfatta per ogni  $v \in H_0^1(Q)$ .

Il vantaggio é evidente: non occorre richiedere che  $u \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$ .

La soluzione di questo problema é immediata. L'applicazione  $f \rightarrow (f, v) \equiv F(v)$  soddisfa

$$|F(v)| \leq \|f\| \|v\| \leq C \|f\| \|v\|_1$$

per la disuguaglianza di Poincaré.  $F$  é dunque un funzionale continuo in  $H_0^1$ . Dunque per il Teorema di Riesz esiste un unico  $u \in H_0^1$  tale che

$$F(v) = (u, v)_1$$

che é equivalente alla (157).

Si noti che, in questo approccio, non occorre richiedere altra regolaritá sulla distribuzione di carica  $f$  se non quella  $L^2$ . A questo proposito si osservi che se  $f \in L^2(Q)$  ( $d = 3$ ) allora, per ogni  $x \in \mathbb{R}^3$ , ha senso l'integrale

$$\int_Q \frac{f(y)}{|x - y|} dy$$

e quindi il risultato appena formulato non é sorprendente.

Vogliamo ora confrontare quanto visto con un importante aspetto variazionale.

La soluzione del problema (156) si puó interpretare come la condizione di equilibrio di una membrana (o un solido) vibrante sotto l'azione di una densitá di forza  $f$ . L'equazione delle onde associata é

$$\partial_t^2 u = \Delta u + f$$

(abbiamo posto la velocitá di propagazione uguale a 1).

L'energia totale del sistema, che si conserva lungo le soluzioni, é

$$\frac{1}{2} \int |\partial_t u|^2 + \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 - \int f u.$$

Si verifichi per esercizio tale affermazione. Poiché l'energia potenziale del sistema é

$$E(u) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 - \int f u = \frac{1}{2} (u, u)_1 - F(u),$$

i principi della meccanica suggeriscono che la la soluzione della (156) (o della sua formulazione debole che stiamo discutendo ora) debba anche essere soluzione del seguente problema di minimo.

**Problema** *Trovare  $u \in H_0^1$  tale che*

$$E(u) = \min_{v \in H_0^1} E(v). \tag{158}$$

In effetti possiamo mostrare che

**Teorema 1**  $u \in H_0^1$  é soluzione del Problema in esame se e solo se é soluzione della (157)

**Dim.** Se  $u \in H_0^1$  minimizza  $E$  allora, per ogni  $h \in H_0^1$ , risulta

$$\frac{d}{dt}E(u + th)|_{t=0} = 0. \quad (159)$$

Allora

$$\frac{d}{dt}(u + th, u + th)_1|_{t=0} = 2(u, h)_1,$$

e

$$\frac{d}{dt}F(u + th)|_{t=0} = F(h).$$

Dunque la (159) implica la (157).

Viceversa se  $u \in H_0^1$  risolve la (157), per ogni  $h \in H_0^1$

$$E(u + h) - E(u) = \frac{1}{2}(h, h)_1 + (u, h)_1 - F(h) = \frac{1}{2}(h, h)_1 > 0$$

e dunque  $u$  minimizza  $E$ . ■

Una tecnica analoga puó anche essere utilizzata per risolvere il problema di Laplace con condizioni assegnate al bordo, che riportiamo per comoditá

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } Q \\ u(x, t) = f, & x \in \partial Q \end{cases} \quad (160)$$

Sappiamo che se  $f \in C(\partial Q)$  allora esiste un'unica soluzione  $u \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$  del problema (160). Naturalmente esiste una connessione con un principio variazionale che stabiliamo nel seguente Teorema.

**Teorema 2**  $u \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$  é soluzione del Problema (160) se e solo se

$$E(u) = \min_{v \in A_f} E(v)$$

dove

$$E(v) = \frac{1}{2}(\nabla v, \nabla v)$$

e

$$A_f = \{v \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q}), v(x) = f(x), x \in \partial Q\}.$$

La dimostrazione di questo Teorema ricalca quella di Teorema 1. Lasciamo al lettore la dimostrazione per esercizio.

Questo Teorema suggerisce anche una dimostrazione alternativa per la costruzione della soluzione del problema (160), ma non deve trarre in inganno il lettore. Esso non dice che  $E(v)$  ha in effetti un minimo in  $A_f$ ! Lo spazio naturale in cui cercare il minimo, se esiste, contiene funzioni non sufficientemente regolari da garantire a priori la soluzione del problema. Anche risolvendo il problema variazionale, occorre lavorare ancora per ottenere la regolarità voluta, assumendo che il dato  $f$  sia almeno continuo.

## 7. Il problema di Neumann

In alcune applicazioni fisiche ha interesse risolvere il problema di Neumann per l'equazione di Laplace:

$$-\Delta u(x) = 0, \quad x \in D \quad (161)$$

$$\partial_n u(x) = f(x) \quad x \in \partial D. \quad (162)$$

L'incognita  $u$  è dunque armonica in  $D$ , si richiede che sia  $C^1(\bar{D})$  e che abbia derivata normale assegnata sulla frontiera di  $D$ .

Osserviamo preliminarmente che, in virtù della condizione (162), tale problema non può risolversi in generale dovendo essere:

$$\int_{\partial D} f(x) \sigma(dx) = 0, \quad (163)$$

poiché integrale di bordo della derivata normale di una funzione armonica è sempre nullo.

La condizione (163) va dunque intesa come una condizione di compatibilità che deve essere sempre soddisfatta perché il problema (161) abbia senso. Supponiamo dunque che la (163) sia soddisfatta. E' ben evidente che, anche avendo una soluzione della (161), tale soluzione non può essere unica. Infatti le costanti soddisfano la (162) con  $f = 0$ , e dunque, se  $u$  è una soluzione della (161), anche  $u + \text{cost}$  lo sarà.

Per costruire una soluzione del problema, sulla base di quanto visto nel precedente paragrafo, si cerca una soluzione del tipo:

$$u(x) = \int_{\partial D} G(x, y) \mu(y) d\sigma(y)$$

che è il potenziale di singolo strato generato dalla densità superficiale  $\mu$ . La ragione di questa scelta sarà ovvia tra un attimo se si pensa che  $\nabla u$  ha componente normale discontinua sul bordo e quindi la conoscenza della derivata normale sul bordo ci dá un'equazione

integrale per  $\mu$  dello stesso tipo di quella vista nel precedente paragrafo. Questa volta però la risolubilità di tale equazione non può essere garantita perché la condizione (163) che sappiamo essere essenziale per la risolubilità del problema, non è stata ancora utilizzata. In effetti si può dimostrare che l'omogenea associata ammette, in generale, soluzioni non banali e che la non omogenea ammette pure soluzioni se  $f$  è ortogonale alle costanti, cioè se la (163) è soddisfatta.

Non sviluppiamo in dettaglio la teoria ma ci limitiamo ad affermare che la soluzione del problema (161) (162) esiste, unica a meno di costanti, in ipotesi di sufficiente regolarità per  $f$  e la frontiera  $\partial D$ .

## 8. Un' osservazione di Meccanica Quantistica

Le idee sviluppate nei primi due paragrafi permettono di ottenere la soluzione di un problema di Meccanica Quantistica molto naturale.

Si consideri l'operatore di Schrödinger

$$H = -\Delta + V \tag{164}$$

in  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è il potenziale cui è soggetta una particella quantistica in  $\mathbb{R}^n$  e  $-\Delta$  è l'operatore energia potenziale. Per semplificare le notazioni stiamo assumendo che la particella abbia massa 2 e che  $\hbar = 1$ .

Supponiamo che  $V$  sia una funzione continua, limitata dal basso ( $V > B$  per qualche  $B \in \mathbb{R}$ ) e che

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty.$$

Un tale potenziale si dice confinante perché ogni traiettoria classica con energia finita non abbandona una sfera di raggio abbastanza grande. (Dimostrare questo asserto). In queste ipotesi si può dimostrare che lo spettro di  $H$  è formato solo da autovalori.

Per dimostrare ciò si usa una tecnica simile a quanto visto per l'operatore di Laplace con condizioni zero al bordo e cioè si cerca di dimostrare che  $H + c$  è un operatore invertibile, per qualche valore di  $c$  e il suo inverso è un operatore compatto.

E' facile convincersi che la costante  $c$  può essere inglobata nel potenziale  $V$  per cui cercheremo di dimostrare che  $H$  ha inverso compatto, assumendo che  $V \geq B$  e  $B > 1$ .

Allora possiamo procedere nel modo seguente. Definiamo lo spazio di Hilbert  $H_V$  (analogo di  $H_0^1$ ) come il sottospazio di  $H^1(\mathbb{R}^n)$  per cui la norma

$$\|u\|_V^2 = \|u\|_1^2 + \|\sqrt{V}u\|^2 \tag{165}$$



é finita.

Si osservi che tale é la norma del prodotto scalare indotto dalla forma quadratica associata a  $H$ :  $(u, Hu)$ .

E' ovvio che  $(V \geq 1)$

$$\|u\| \leq \|u\|_V$$

e questa disuguaglianza gioca il ruolo della disuguaglianza di Poincaré'.

Infine non é difficile dimostrare che la palla unitá in  $H_V$  é compatta in  $L^2$ .

Suggerimento. Si consideri una successione  $u_n$  tale che  $\|u_n\|_V \leq C$ . Se lo spazio fosse compatto si potrebbe procedere come nel Teorema 1.3 poiché  $\|u\|_1 \leq \|u\|_V$ . Si prenda allora una sfera molto grande. In questa sfera si può applicare lo stesso argomento visto in Teorema 1.3. Nel complemento della sfera si ha un controllo di piccolezza uniforme. Infatti se  $\chi_R$  é la funzione caratteristica del complemento della sfera di raggio  $R$ , si ha:

$$\|u_n \chi_R\|^2 = \int_{|x|>R} |u_n|^2 dx \leq \frac{1}{V_R} \int dx V(x) |u_n|^2 \leq \frac{1}{V_R} \|u_n\|_V^2 \leq \frac{C}{V_R},$$

dove

$$V_R = \inf_{|x|>R} V(x).$$

Poiché  $V_R \rightarrow \infty$  quando  $R \rightarrow \infty$ ,  $\|u_n \chi_R\|^2$  é uniformemente piccolo.

Una volta assodata la compattezza delle parti limitate di  $H_V$ , si dimostra che  $H$  ha inverso compatto e dunque esiste una base  $\{e_j\}$  in  $L^2(\mathbb{R}^n)$  e una successione di autovalori  $\lambda_j$  per cui

$$He_j = \lambda_j e_j.$$

Si usi quanto visto per risolvere l'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo

$$i\partial_t \psi = H\psi.$$

## 9. Esercizi

1. Sia  $H = L^2(\mathbb{R})$  e  $P_A$  l'operatore

$$P_A f(x) = \chi_A(x) f(x)$$

dove  $A$  é un insieme misurabile e  $\chi_A$  la sua funzione caratteristica. Si verifichi che  $P_A$  é un proiettore ortogonale (e cio che  $P_A = P_A^*$ ,  $P_A^2 = P_A$ ). Caratterizzare il sottospazio di  $H$  su cui  $P_A$  proietta.

2. Sia  $H$  uno spazio di Hilbert e  $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$  una base ortonormale. Si dimostri che  $f_n \rightarrow f$  debolmente, se e solo se,

$$(e_j, f_n) \rightarrow (e_j, f) \quad \text{per ogni } j$$

3. (Convergenza debole per oscillazioni)  $H = L^2([0, 2\pi])$ . Dimostrare che la successione  $f_n = \sin nx$  tende a zero debolmente.

4. (Convergenza debole per dispersione).  $H = \ell(\mathbb{N})$ . Fissato  $a = \{a_j\}_{j=1}^{\infty}$  si consideri la successione

$$a_n = \{(a_n)_j\} = \{a_{j+n}\}.$$

Allora  $a_n$  converge a zero debolmente.

5. Collegare Esercizio 3 e 4 per mezzo dell'isomorfismo  $L^2([0, 2\pi]) \rightarrow \ell(\mathbb{N})$ .

6. Verificare che la funzione  $f(x) = 1 - x$  é soluzione dell'equazione di Volterra

$$\int_0^x f(t)e^{x-t} dt = x$$

7. Risolvere per serie, l'equazione di Volterra

$$f(x) - \lambda \int_0^x K(x, y)f(y)dy = g(x)$$

dove  $K(x, y) = e^{(x-y)}$ .

8. Risolvere

$$f(x) - \lambda \int_0^x \cos(x+y)f(y)dy = \cos 3x$$

9. Si consideri la seguente equazione integrale

$$f_\eta(x) - \frac{1}{2} \int_1^2 e^{-(x-y)} \cos[\eta(x+y)]f_\eta(y)dy = g(x)$$

con  $g \in C([1, 2])$ . Si dimostri che  $f_\eta$  esiste. Si determini poi il  $\lim_{\eta \rightarrow 0} f_\eta$ .

10. Si consideri  $H = \ell(\mathbb{N})$  e i seguenti insiemi

$$B_1 = \{u \mid \frac{|u_k|}{k^2} \leq 1\},$$

$$B_2 = \{u \mid \frac{|u_k|}{\log(1+k)} \leq 1\}.$$

Discutere la compattezza di questi insiemi.

11. Si consideri  $H = \ell(\mathbb{N})$  e i seguenti 4 operatori

$$(Au)_k = \sum_h a_{k,h}u_h$$

dove

$$\begin{aligned}a_{k,h} &= \delta_{k,h-1}(-1)^h \quad \text{se } k > 1, a_{1,h} = 0, \\a_{k,h} &= \frac{e^{-|k-h|}}{1+h^2} \\a_{k,h} &= (1+h^2)^{-1} \\a_{k,h} &= e^{-|k-h|}.\end{aligned}$$

Si determini se sono limitati e/o compatti.

12. Si consideri  $H = L^2(\mathbb{R})$  e la famiglia di operatori

$$A_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\alpha x^2}}{1+|x-y|^4} f(y) dy$$

con  $\alpha \in [0, 1]$ .

Per quali  $\alpha$   $A_\alpha$  é compatto? Per quali  $\alpha$   $A_\alpha$  é limitato, ma non compatto?

13. In  $H = L^2(\mathbb{R})$  si consideri la successione

$$g_n(x) = n^\alpha g(nx) \quad \text{per } \alpha \in [0, 1].$$

Si studi la convergenza al variare di  $\alpha$ .

14. Si consideri  $H = L^2(\mathbb{R})$  e le due successioni di operatori

$$\begin{aligned}A_n f(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-n(x-y)^2} f(y) dy, \\A_n f(x) &= \log n \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+n(x-y)^2} f(y) dy.\end{aligned}$$

Se ne studi la convergenza.