

Indice

Testi e fonti	2
Programma medio	3
Spazi di Hilbert	3
Operatori lineari	4
Operatori compatti	5
Equazione di Poisson	6
Potenziali	7
Meccanica hamiltoniana	8
Meccanica quantistica	9
Esempi	9
Operatori non limitati	10
Programma completo	11
Spazi di Hilbert	11
Operatori lineari	12
Operatori compatti	13
Equazione di Poisson	14
Potenziali	15
Meccanica hamiltoniana	16
Meccanica quantistica	17
Esempi	17
Operatori non limitati	18

Divido il programma in due fasce di difficoltà e ampiezza. Lo scopo è preparare un percorso di studio coerente per chi di voi, per una qualche ragione, investirà meno risorse sulla preparazione di questo esame.

Il **programma medio** contiene gli argomenti essenziali al raggiungimento degli obiettivi del corso. L'ampiezza del programma è in parte illusoria, vista la sovrapposizione con il programma di Istituzioni di Analisi Superiore. Una buona conoscenza di questi argomenti garantisce il superamento dell'esame con una votazione ragionevole.

Il **programma completo** è il programma completo, corredato degli argomenti facoltativi svolti a fine corso.

Testi e fonti

Per i dettagli su ogni argomento, *vedi* il diario delle lezioni su <http://brazil.mat.uniroma1.it/dario/IFM2016/diario.txt>.

Richiami di Fisica-Matematica

B-FM Buttà: Note del corso di Fisica-Matematica http://www1.mat.uniroma1.it/~butta/didattica/note_FM.pdf

DB-FM Benedetto: Note aggiuntive per Fisica-Matematica 2015-2016 <http://brazil.mat.uniroma1.it/dario/FM2015//NoteAggiuntive/note15.pdf>

S Salsa: Equazioni alle derivate parziali

Operatori lineari su spazi di Hilbert

DB-IFM Benedetto: Appunti del corso di IFM 2016-2017 <http://brazil.mat.uniroma1.it/dario/IFM2016/ifm16.pdf>

G Garroni: note del corso di Istituzioni di Analisi Superiore 2016 <http://www1.mat.uniroma1.it/people/garroni/Note-IAS-16-17.pdf>

P Pulvirenti: note del corso di Istituzioni di Fisica Matematica 2015-16

KF Komogorov, Fomin: Elementi di teoria delle funzioni e analisi funzionale

CH Courant, Hilbert: Methods of Mathematical Physics

RS Reed, Simon: Methods of modern mathematical physics, vol I, Functional Analysis

Meccanica hamiltoniana

DB-H Benedetto: Appunti di meccanica hamiltoniana <http://brazil.mat.uniroma1.it/dario/IFM2016/h16.pdf>

A V. Arnold: Metodi Matematici della Meccanica Classica (Editori Riuniti - MIR)

E R. Esposito: Appunti dalle lezioni di meccanica razionale, Aracne 1999.

Introduzione alla meccanica quantistica

P M. Pulvirenti: Equazione di Schrödinger http://www1.mat.uniroma1.it/people/pulvirenti/didattica/mecca_quant.pdf

T A. Teta: Appunti di Meccanica Quantistica, cap. 1-9, su <https://sites.google.com/site/sandroprova/didattica-1/appunti-ed-esercizi>

Programma medio

Programma medio

Spazi di Hilbert

1. Spazi di Hilbert reali e complessi. Esempi $L^2(\Omega, \mathbb{R})$, $L^2(\Omega, \mathbb{C})$, con Ω dominio di \mathbb{R}^n , $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Spazi L^2 con pesi.
2. Sottospazi lineari chiusi e non. Ortogonale di un sottospazio.
3. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, identità del parallelogramma e Teorema della proiezione in spazi di Hilber complessi. Proiettori.
4. Sistemi ortonormali, disuguaglianza di Bessel; spazi separabili e sistemi ortonormali completi (basi), Identità di Parseval.
5. Ortogonalizzazione di Gramm-Schmidt, esistenza di basi in spazi separabili.
6. Base di Fourier e sua completezza.
- 7.
- 8.
9. Polinomi di Hermite
- 10.
11. Basi in spazi prodotto

Programma medio

Operatori lineari

1. Operatori limitati e norma di un operatore, continuità e limitatezza. Esempi: isometrie e proiettori e loro norme.
2. Estensione di operatori limitati definiti su sottospazi densi. La trasformata di Fourier in L^2
- 3.
- 4.
5. Il duale di uno spazio di Hilbert e il teorema di rappresentazione di Riesz.
6. Operatore aggiunto e sue proprietà.
7. Operatori di moltiplicazione e loro norma; operatori di convoluzione e condizioni per la loro limitatezza; nuclei integrali.
8. Operatori unitari. Unitarietà della trasformata di Fourier.
9. L'operatore di shift in $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, il suo aggiunto, immagine e nucleo.

Programma medio

Operatori compatti

1. Decomposizione di H nella somma diretta del nucleo di un operatore e della chiusura dell'immagine dell'aggiunto.
2. Operatori di rango finito. Teorema dell'alternativa per operatori di rango finito.
3. Invertibilità di piccole perturbazioni di operatori invertibili. Serie di Neumann
3. Equazioni di Volterra.
4. Teoremi dell'alternativa per perturbazioni piccole di operatori di rango finito.
5. Esempi di compatti in spazi di Hilbert.
6. Convergenza debole di successioni, esempi e proprietà.
7. Compattezza debole dei limitati in H separabile.
8. Convergenza debole e forte di operatori.
9. Operatori compatti.
10. Teorema dell'alternativa per operatori compatti
11. Condizioni sufficienti per la compattezza. Operatori di Hilbert-Schmidt
12. Equazioni di Fredholm.
13. Risolvente e spettro per operatori.
14. Proprietà del risolvente, identità del risolvente.
15. Teorema spettrale per operatori compatti autoaggiunti.
16. Condizioni di compattezza per operatori compatti con nuclei singolari.

Programma medio

Equazione di Poisson

- 1.
- 2.
3. **Lo spazio di Sobolev $H^1([a, b])$. Regolarità e immersione compatta in $L^2((a, b))$.**
4. **La disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger, per le funzioni di $H^1([a, b])$ a media nulla**
5. **La soluzione del problema di Poisson con condizioni di Neumann omogenee in (a, b) .**
6. **Gli spazi di Sobolev $H^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$.**
7. **La disuguaglianza di Poincaré in $H_0^1(\Omega)$.**
8. **La soluzione debole in $H_0^1(\Omega)$ dell'equazione di Poisson. Simmetria dell'operatore che esprime la soluzione.**
- 9.
- 10.
11. **Autoaggiuntezza e compattezza dell'inverso del laplaciano. Autovalori del laplaciano.**
- 12.
- 13.
- 14.
- 15.

Programma medio

Potenziali di strato singolo e di doppio strato

- 1.
2. **Potenziale di strato singolo e sue proprietà.**
3. **Discontinuità della derivata normale al bordo (dimostrazione nel caso di bordo rettangolare).**
4. **Formulazione del problema di Laplace-Neumann in termini di una equazione integrale per la carica al bordo.**
5. **Unicità per problema di Laplace-Neumann esterno.**
6. **Potenziale di doppio strato.**
7. **Lemma di Gauss.**
8. **Discontinuità del potenziale al bordo (via lemma di Gauss).**
9. **Esistenza e unicità per il problema di Laplace-Dirichlet nei limitati semplicemente connessi e del problema di Laplace-Neumann nel dominio esterno.**
- 10.
- 11.

Programma medio

Meccanica hamiltoniana

1. Richiami sulle lagrangiane. Impulsi. L'hamiltoniana e le equazioni di Hamilton.
2. Esempi, il moto centrale piano.
3. Le variabili cicliche nei sistemi hamiltoniani.
4. Trasformazioni canoniche. Trasformazioni simplettiche. Matrici simplettiche.
5. Parentesi di Poisson e loro invarianza per trasformazioni simplettiche.
6. Le regole di commutazione canonica.
7. Parentesi di Poisson e integrali primi.
8. Proprietà delle parentesi di Poisson (enunciato).
- 9.
- 10.
- 11.
12. Condizione di simpletticità attraverso la forma $p dq - P dQ$.
13. Trasformazioni simplettiche dipendenti dal tempo.
14. Funzioni generatrici.
15. Equazione di Hamilton-Jacobi.
16. Equazione di HJ per il moto centrale.
17. Sistemi integrabili. Teorema di Liouville.
- 18.

Programma medio

Introduzione alla meccanica quantistica

1. Principio di Fermat. Equazione di Newton per i raggi luminosi
2. Analogia tra ottica geometrica e meccanica hamiltoniana.
3. La radiazione di corpo nero e la formula di Plank.
4. L'effetto fotoelettrico.
5. L'atomo di Bohr.
6. L'equazione di Schrödinger ricavata per analogia dall'ottica geometrica / ottica ondulatoria
7. Interpretazione probabilistica della funzione d'onda.
8. Operatori posizione e impulso. Hamiltoniano. Teorema di Ehrenfest
9. Osservabili.
10. Osservabili non commutativi, il principio di indeterminazione.

Esempi di sistemi quantistici

- 1.
2. Dispersione della particella libera attraverso l'evoluzione della varianza della posizione.
- 3.
4. Buca di potenziale infinita.
- 5.
6. Le autofunzioni dell'hamiltoniano dell'oscillatore armonico e i polinomi di Hermite.
7. La barriera di potenziale.
- 8.
- 9.
- 10.

Programma medio

Introduzione alla teoria degli operatori non limitati

1. **Operatori simmetrici.**

2.

3.

4.

5.

Programma completo

Programma completo

Spazi di Hilbert

1. **Spazi di Hilbert reali e complessi. Esempi $L^2(\Omega, \mathbb{R})$, $L^2(\Omega, \mathbb{C})$, con Ω dominio di \mathbb{R}^n , $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Spazi L^2 con pesi.**
2. **Sottospazi lineari chiusi e non. Ortogonale di un sottospazio.**
3. **Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, identità del parallelogramma e Teorema della proiezione in spazi di Hilbert complessi. Proiettori.**
4. **Sistemi ortonormali, disuguaglianza di Bessel; spazi separabili e sistemi ortonormali completi (basi), Identità di Parseval.**
5. **Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, esistenza di basi in spazi separabili.**
6. **Base di Fourier e sua completezza.**
7. **Polinomi di Legendre,**
8. **Polinomi di Tchebyshev**
9. **Polinomi di Hermite**
10. **Polinomi di Laguerre (dettagli per una famiglia a scelta tra Legendre, Laguerre, Hermite).**
11. **Basi in spazi prodotto**

Programma completo

Operatori lineari

1. Operatori limitati e norma di un operatore, continuità e limitatezza. Esempi: isometrie e proiettori e loro norme.
2. Estensione di operatori limitati definiti su sottospazi densi. La trasformata di Fourier in L^2
3. Iniettività della trasformata di Fourier in L^1 e completezza dei polinomi di Hermite e Laguerre.
4. Completezza degli spazi di operatori lineari limitati.
5. Il duale di uno spazio di Hilbert e il teorema di rappresentazione di Riesz.
6. Operatore aggiunto e sue proprietà.
7. Operatori di moltiplicazione e loro norma; operatori di convoluzione e condizioni per la loro limitatezza; nuclei integrali.
8. Operatori unitari. Unitarietà della trasformata di Fourier.
9. L'operatore di shift in $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, il suo aggiunto, immagine e nucleo.

Programma completo

Operatori compatti

1. Decomposizione di H nella somma diretta del nucleo di un operatore e della chiusura dell'immagine dell'aggiunto.
2. Operatori di rango finito. Teorema dell'alternativa per operatori di rango finito.
3. Invertibilità di piccole perturbazioni di operatori invertibili. Serie di Neumann
3. Equazioni di Volterra.
4. Teoremi dell'alternativa per perturbazioni piccole di operatori di rango finito.
5. Esempi di compatti in spazi di Hilbert.
6. Convergenza debole di successioni, esempi e proprietà.
7. Compattezza debole dei limitati in H separabile.
8. Convergenza debole e forte di operatori.
9. Operatori compatti.
10. Teorema dell'alternativa per operatori compatti
11. Condizioni sufficienti per la compattezza. Operatori di Hilbert-Schmidt
12. Equazioni di Fredholm.
13. Risolvente e spettro per operatori.
14. Proprietà del risolvente, identità del risolvente.
15. Teorema spettrale per operatori compatti autoaggiunti.
16. Condizioni di compattezza per operatori compatti con nuclei singolari.

Programma completo

Equazione di Poisson

1. **Problemi di Sturm-Liouville.** Condizioni al contorno di Dirichlet, Neumann, Robin, condizioni di limitatezza al contorno.
2. **La funzione di Green per la derivata seconda in $[-1,1]$ con condizioni di Dirichlet e con condizioni di Neumann.**
3. **Lo spazio di Sobolev $H^1([a,b])$.** Regolarità e immersione compatta in $L^2((a,b))$.
4. **La disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger, per le funzioni di $H^1([a,b])$ a media nulla**
5. **La soluzione del problema di Poisson con condizioni di Neumann omogenee in (a,b) .**
6. **Gli spazi di Sobolev $H^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$.**
7. **La disuguaglianza di Poincaré in $H_0^1(\Omega)$.**
8. **La soluzione debole in $H_0^1(\Omega)$ dell'equazione di Poisson. Simmetria dell'operatore che esprime la soluzione.**
9. **Richiami sul lemma di Weyl.**
10. **Richiami sulla funzione di Green nello spazio. Regolarità interna della soluzione per dati C^∞ infinito.**
11. **Autoaggiuntezza e compattezza dell'inverso del laplaciano. Autovalori del laplaciano.**
12. **Regolarità delle autofunzioni.**
13. **Domini C^k e domini Lipschitziani. Il problema di Poisson-Neumann in $H^1(\Omega)$.**
14. **Richiami sul teorema di prolungamento e sulla disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger. Esistenza e unicità della soluzione debole in H_m^1 .**
15. **Le migliore costante per la disuguaglianza di Poincaré e il primo autovalore del laplaciano.**

Programma completo

Potenziali di strato singolo e di doppio strato

1. **Regolarità interna C^2 della soluzione dell'equazione di Poisson, per dati in C^α attraverso il lemma di Weyl e della funzione di Green.**
2. **Potenziale di strato singolo e sue proprietà.**
3. **Discontinuità della derivata normale al bordo (dimostrazione nel caso di bordo piano).**
4. **Formulazione del problema di Laplace-Neumann in termini di una equazione integrale per la carica al bordo.**
5. **Unicità per problema di Laplace-Neumann esterno.**
6. **Potenziale di doppio strato.**
7. **Lemma di Gauss.**
8. **Discontinuità del potenziale al bordo (via lemma di Gauss).**
9. **Esistenza e unicità per il problema di Laplace-Dirichlet nei limitati semplicemente connessi e del problema di Laplace-Neumann nel dominio esterno.**
10. **Il problema di Laplace-Neumann.**
11. **La distribuzione delle cariche su un conduttore.**

Programma completo

Meccanica hamiltoniana

1. Richiami sulle lagrangiane. Impulsi. L'hamiltoniana e le equazioni di Hamilton.
2. Esempi, il moto centrale piano.
3. Le variabili cicliche nei sistemi hamiltoniani.
4. Trasformazioni canoniche. Trasformazioni simplettiche. Matrici simplettiche.
5. Parentesi di Poisson e loro invarianza per trasformazioni simplettiche.
6. Le regole di commutazione canonica.
7. Parentesi di Poisson e integrali primi.
8. Proprietà delle parentesi di Poisson.
9. Commutatore di operatori; identità di Jacobi per il commutatore.
10. Commutatore di campi vettoriali. Identità di Jacobi per il commutatore di campi e per le parentesi di Poisson.
11. Commutatività dei flussi associati a campi commutanti.
12. Condizione di simpletticità attraverso la forma $p dq - P dQ$.
13. Trasformazioni simplettiche dipendenti dal tempo.
14. Funzioni generatrici.
15. Equazione di Hamilton-Jacobi.
16. Equazione di HJ per il moto centrale.
17. Sistemi integrabili. Teorema di Liouville.
18. Teorema di Arnold-Liouville e variabili azione-angolo (solo enunciato).

Programma completo

Introduzione alla meccanica quantistica

1. Asintotica a onde corte per l'approssimazione dell'ottica scalare Equazione dell'iconale. Equazione di Liouville per l'intensità.
2. Principio di Fermat. Equazione di Newton per i raggi luminosi
3. Analogia tra ottica geometrica e meccanica hamiltoniana.
4. La radiazione di corpo nero e la formula di Plank.
5. L'effetto fotoelettrico.
6. L'atomo di Bohr.
7. L'equazione di Schroedinger ricavata per analogia dall'ottica geometrica / ottica ondulatoria
8. Interpretazione probabilistica della funzione d'onda.
9. Operatori posizione e impulso. Hamiltoniano. Teorema di Ehrenfest
10. Osservabili.
11. Osservabili non commutativi, il principio di indeterminazione.

Esempi di sistemi quantistici

1. Pacchetti gaussiani.
2. Dispersione della particella libera attraverso l'evoluzione della varianza della posizione.
3. Funzione di Green per l'hamiltoniana della particella libera in \mathbb{R} .
4. Buca di potenziale infinita.
5. Determinazione dei livelli di energia per l'oscillatore armonico quantistico attraverso gli operatori di creazione e distruzione.
6. Le autofunzioni dell'hamiltoniano dell'oscillatore armonico e i polinomi di Hermite.
7. La barriera di potenziale.
8. (*facoltativo*) L'hamiltoniano dell'atomo di idrogeno. Gli operatori L^2 e L_3 .
9. (*facoltativo*) Le armoniche sferiche e i polinomi armonici.
10. (*facoltativo*) Gli stati legati dell'atomo di idrogeno.

Programma completo

Introduzione alla teoria degli operatori non limitati

1. **Operatori simmetrici.**
2. (*facoltativo*) **Aggiunto di un operatore illimitato. Operatori autoaggiunti. Estensioni autoaggiunte.**
3. (*facoltativo*) **Cenni sul teorema spettrale per operatori autoaggiunti.**
4. (*facoltativo*) **Gruppi di operatori unitari ad un parametro fortemente continui generato da un operatore autoaggiunto.**
5. (*facoltativo*) **Operatori chiusi, condizioni di autoaggiuntezza.**