Appunti ed esercizi per il corso di Istituzioni di Fisica Matematica 2016–2017

in aggiornamento

29 maggio 2017

Queste note sono i miei appunti del corso, in cui troverete tutti gli argomenti di lezione che non siano di non facile reperibilità sui testi. Ci sono le dimostrazioni ma non tutte le parole necessarie per motivare gli argomenti.
Con * esercizi o argomenti che non sono stati svolti o assegnati a lezione.

Indice

Fonti

Testi e dispense varie

CH	Courant, Hilbert: Methods of Mathematical Physics
RS	Reed, Simon: Methods of modern mathematical physics, vol I, Functional Analisys
KF	Komogorov, Fomin: Elementi di teoria delle funzioni e analisi funzionale
S	Salsa: Equazioni alle derivate parziali
G	Garroni: note del corso di Istituzioni di Analisi Superiore 2016 `http://www1.mat.uniroma1.it/people/garroni/Note-IAS-16-17.pdf`
P	Pulvirenti: note del corso di Istituzioni di Fisica Matematica 2015-16 `http://www1.mat.uniroma1.it/people/pulvirenti/didattica/IFMat_2016.pdf`
B	Buttà: note del corso di Fisica-Matematica `http://www1.mat.uniroma1.it/~butta/didattica/note_FM.pdf`
FM	Benedetto: note aggiuntive per Fisica-Matematica 2015-2016 `http://brazil.mat.uniroma1.it/dario/FM2015//NoteAggiuntive/note15.pdf`

1 Problemi di Sturm-Liouville

1.1 Lagrangiana

Siano $\tau(x)$, $\rho(x)$ due funzioni strettamente positive, $k(x)$ una funzione positiva o nulla, $f(x)$ un funzione qualunque. Si assumano regolari quanto basta. Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange per la funzione incognita $u(x,t)$, assumendo come lagrangiana

$$\int_a^b \mathrm{d}x \left(\frac{\rho}{2}(\partial_t u)^2 - \frac{\tau}{2}(\partial_x u)^2 - \frac{k}{2}u^2 - fu \right) \tag{1}$$

e assumendo che u sia fissa agli estremi (condizione di Dirichlet). Si dia un'interpretazione fisica dei vari termini.

1.2 Condizioni al contorno di Neumann

Aggiungi alla lagrangiana i termini $-U_a(u(a,t)) - U_b(u(b,t))$, che sono le energie potenziali di due forze che agiscono su u nei punti $x = a$ e $x = b$. Riscrivi le equazioni di Eulero-Lagrange, considerando variazioni di u libere anche agli estremi.
Otterrai delle condizioni al contorno di tipo Neumann

$$U_b'(u(b,t)) = -\tau(b)\,\partial_x u(b,t), \qquad U_a'(u(a,t)) = +\tau(a)\,\partial_x u(a,t)$$

In particolare, in assenza delle energie potenziali U_a e U_b, ottieni le condizioni di Neumann omogenee $u'(a,t) = 0 = u'(b,t)$, che indicano l'assenza di forze esterne.
Ipotizzando $U_a(u) = g_a u$ e $U_b(u) = g_b u$ si ottengono le usuali condizioni di Neumann non omogenee, se invece $U_a(u) = k_a u^2/2$ e $U_b(u) = k_b u^2/2$, con $k_a, k_b > 0$, si ottengono

$$\tau(b)\,\partial_x u(b,t) = -k_b u(b,t), \qquad \tau(a)\,\partial_x u(a,t) = +k_a u(a,t)$$

dette condizioni di Robin.

1.3 Il problema agli autovalori

Considera l'equazione che hai ottenuto nel punto precedente in assenza della forza esterna f:

$$\rho\,\partial_t^2 u = \partial_x(\tau\,\partial_x u) - ku$$

Cerca una soluzione per separazione di variabili $u(x,t) = A(t)B(x)$, ottenendo per B il problema agli autovalori di Sturm-Liouville.

$$\partial_x(\tau(x)\,\partial_x B(x)) - k(x)B(x) = -\lambda\rho(x)B(x)$$

con λ costante.

1.4 Il segno degli autovalori

Assumi condizioni di Dirichlet omogenee, oppure di di Neumann omogenee. Moltiplicando per $B(x)$ l'equazione agli autovalori e integrando in $[a,b]$, usando la positività di τ e di k, mostra che $\lambda \geq 0$. Mostra che la stessa conclusione è vera nel caso delle condizioni di Robin.
Osserva che se $\lambda > 0$ la corrispondente soluzione per $A(t)$ è un'oscillazione di pulsazione $\sqrt{\lambda}$.

1.5 Casi singolari

Supponi che $\tau(x)$ si annulli agli estremi $x = a$ e $x = b$ e ricava le equazioni di Eulero-Lagrange per la lagrangiana (1) considerando variazioni libere di u agli estremi, e osserva che la condizione al contorno che ottieni è la semplicemente la finitezza di u e della sua derivata agli estremi.

2 Spazi di Hilbert

Dò per noto che se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un **dominio** (cioè un aperto connesso), le funzioni $C(\Omega;\mathbb{C})$, $C^k(\Omega;\mathbb{C})$, $C^\infty(\Omega;\mathbb{C})$, e quelle a supporto compatto in Ω sono dense nella norma L^2 nello spazio $L^2(\Omega,\mathbb{C})$. Inoltre considero noto che le funzioni continue nei compatti sono limite di sequenze di polinomi nella norma del estremo superiore..

In queste note non riporto definizioni e dimostrazioni elementari sugli spazi di Hilbert, che ho riassunto a lezione. Si veda su qualunque testo la definizione di prodotto scalare nel caso reale e nel caso complesso, la definizione di spazio di Hilbert, la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz ([S] parr 6.3-6.4, oppure [G] parr. 5.1-5.2, ma mancano i sistemi ortonormali, Bessel e l'identità di Perseval, che trovi su [KF] III.4 per il caso complesso vedi RS cap 2 parr 1-4; per richiami su Fourier va bene un qualunque testo, in particolare [KF]).
Sempre su [S] o su [G], si studi il **Teorema della proiezione**, che ho svolto a lezione.
Non considererò mai spazi di Hilbert non separabili, e solo spazi di dimensione infinita, se non esplicitamente indicato.

2.1 Proiettori

Sia M un sottospazio chiuso di H, sia P_M il proiettore su M che esiste per il teorema della proiezione. Mostrare che

$$(P_n f, g) = (f, P_n g) = (P_n f, P_n g)$$

2.2 Sottospazi ortogonali

Sia M un sottospazio vettoriale di H, e sia

$$M^\perp = \{v \in H |\ \forall z \in M\ (z,v) = 0\}.$$

Prova che

a. $M^\perp$ è un chiuso

b. $\overline{M}^\perp = M^\perp$

c. $M^{\perp^\perp} = \overline{M}$

d. Se M è chiuso:

$$H = M \oplus M^\perp$$

mentre in generale

$$H = \overline{M} \oplus M^\perp$$

2.3 Disuguaglianza di Bessel

Definisco *sistema ortonormale* una successione $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, tale che

$$(e_k, e_h) = \delta_{kh}$$

Chiamerò invece *sistema ortogonale* una successione $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, tale che $\{\phi_k/\|\phi_k\|\}_{k\in\mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale.
Sia P_n il proiettore su span$\{e_k\}_{k=1}n$, cioé s $f \in H$

$$P_n f = \sum_{k=1}^{n} \hat{f}_k e_k \quad \text{dove } f_k = (e_k, f)$$

e

$$\|P_n f\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |f_k|^2$$

La disuguaglianza di Bessel asserisce che, se $f \in H$

$$\sum_{k=1}^{n} |f_k|^2 \leq \|f\|^2.$$

Questa disuguaglianza è conseguenza del "teorema di Pitagora":

$$\|f - P_n f\|^2 = \|f\|^2 - \|P_n f\|^2$$

da cui segue appunto

$$\|P_n f\|^2 \leq \|f\|^2$$

cioè la lunghezza della proiezione è minore o uguale della lunghezza del vettore.

Dimostrazione.

$$\|f - P_n f\|^2 = (f - P_n f, f - P_n f) = \|f\|^2 - (P_n f, f) - (f, P_n, f) + \|P_n f\|^2$$

Ma, come segue dal teorema della proiezione, $(g, P_n f) = (P_n, g, f) = (P_n g, P_n f)$, dunque

$$\|f - P_n f\|^2 = \|f\|^2 - (P_n f, P_n f) - (P_n f, P_n, f) + \|P_n f\|^2 = \|f\|^2 - \|P_n\|^2$$

2.4 Sistemi ortonormali completi in spazi separabili

TODO: definizione di sistema ortonormale completo (base ortonormale)
condizioni equivalenti per essere sist. ortonor. completo
esistenza in spazi separabili via ortogonalizzazione di Gramm-Schmidt

2.5 Completezza della base di Fourier

Assumi come noto che ogni funzione f periodica in $C^1([-\pi,\pi],\mathbb{C})$, sia limite uniforme del suo sviluppo in serie di Fourier, e che le funzioni $C^1_0([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ siano dense in $L^2((-\pi,\pi),\mathbb{C})$, Prova che $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ è una base per $L^2((-\pi,\pi]),\mathbb{C})$, con la seguente traccia.

a. Sia $P_n f$ la proiezione di f su $\mathrm{span}\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\}_{|k|\le n}$. Ripercorrendo la dimostrazione della disuguaglianza di Bessel nota che

$$\|f-P_nf\|^2=\|f\|^2-\|P_nf\|^2$$

b. Come conseguenza, poiché $\|P_nf\|^2=\sum_{|k|\le n}|\hat{f}_k|^2$ è monotona crescete in n, nota che

$$\|f-P_nf\|^2$$

è monotona decrescente.

c. Data $f\in L^2$, per densità, dato $\varepsilon>0$ esiste $f_\varepsilon\in C^1_0$ tale che $\|f-f_\varepsilon\|<\varepsilon$.

d. Per il teorema di Fourier, esiste N_ε tale che

$$\|f_\varepsilon-P_{N_\varepsilon}f_\varepsilon\|_\infty<\varepsilon$$

e dunque

$$\|f_\varepsilon-P_{N_\varepsilon}f_\varepsilon\|<\sqrt{2\pi}\varepsilon$$

e. Per la monotonia descritta al punto b., se $N\ge N_\varepsilon$

$$\|f-P_Nf\|^2\le\|f-P_{N_\varepsilon}f\|^2$$

f. Per il teorema della proiezione

$$\|f-P_{N_\varepsilon}f\|^2\le\|f-P_{N_\varepsilon}f_\varepsilon\|^2$$

g. Concludi usando la disuguaglianza triangolare.

Esercizio 1. Funzioni pari e dispari

Considera $L^2((-a,a),\mathbb{R})$. Mostra che

$$M^p=\{f\in L^2((-a,a),\mathbb{R}):\ f(x)=f(-x)\text{ q.o. }\}$$

$$M^d=\{f\in L^2((-a,a),\mathbb{R}):\ f(x)=-f(-x)\text{ q.o. }\}$$

sono due sottospazi chiusi ortogonali tra loro, e che

$$L^2((-a,a),\mathbb{R})=M^p\oplus M^d$$

Esercizio 2. Basi per $L^2((0,\pi))$

Usando l'esercizio precedente, dimostra che $\{\sin(kx)\}_{k\ge1}$ è una sistema ortogonale completo per $L^2((0,\pi))$ (prolunga per disparità...).
Analogamente, prova che $\{\cos(kx)\}_{k\ge0}$ è un sistema ortogonale completo per $L^2((0,\pi)$ (prolunga per parità...).

2.6 Autofunzioni di ∂_x^2 in $[0,\pi]$

Nota che $\{\sin(kx)\}_{k\geq 1}$ è un sistema ortogonale di autofunzioni di ∂_x^2, con condizioni di Dirichlet omogenee al bordo. Gli autovalori sono $-k^2$ e sono tutti semplici (cioè l'autospazio corrispondente ha dimensione 1). Osserva che $\sin(kx)$ ha $k-1$ zeri interni all'intervallo.
Analogamente, $\{\cos(kx)\}_{k\geq 0}$ è un sistema ortogonale di autofunzioni di ∂_x^2, con condizioni di Neumann omogenee al bordo. Gli autovalori sono $-k^2$ e sono tutti semplici (cioè l'autospazio corrispondente ha dimensione 1). Osserva che $\cos kx$ ha k zeri interni all'intervallo.
In generale, la $k-$esima funzione della base ha k zeri nell'intervallo ($\sin kx$ è la $k-1$-esima funzione).

2.7 Basi in $L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$

Sia $\{\phi_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base ortonormale per $L^2(\Omega_1)$ e sia $\{\psi_j(x)\}_{j\in\mathbb{N}}$ in $L^2(\Omega_2)$. Allora

$$\{\phi_i(x)\psi_j(y)\}_{i,j\in\mathbb{N}^2} \text{ è una base ortonormale per } L^2(\Omega_1\times\Omega_2)$$

L'ortonormalità è di verifica immediata. Sia ora $f(x,y)\in L^2(\Omega_1\times\Omega_2)$. Allora esiste finito

$$\int_{\Omega_1} \mathrm{d}x\, |\phi_i(x)| \int_{\Omega_2} \mathrm{d}y\, |\psi_j(y)|\, |f(x,y) \tag{2}$$

Infatti, poiché $\|\psi_j\|=1$, usando Cauchy-Schwartz l'integrale a destra è stimato da

$$\left(\int_{\Omega_2} |f(x,y)|^2\right)^{1/2}$$

che è una funzione in $L^2(\Omega_1)$, perché $f\in L^2(\Omega_1\times\Omega_2)$. Dunque il suo prodotto con $|\phi_i(x)|$ è in L^1, cioè l'integrale (2) esiste finto e vale il teorema di Fubini:

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} \phi_i(x)\,\psi_j(y)\,f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\Omega_1}\mathrm{d}x\,\phi_i(x)\int_{\Omega_2}\mathrm{d}y\psi_j(y)f(x,y)$$

Sia ora f ortogonale a $\phi_i(x)\psi_j(y)$ per ogni coppia di indici $i,j\in\mathbb{N}^2$. Ne segue, per l'identità scritta sopra,

$$0=\int_{\Omega_1}\mathrm{d}x\,\phi_i(x)\int_{\Omega_2}\mathrm{d}y\psi_j(y)f(x,y)$$

Poiché $\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale,

$$0=\int_{\Omega_2}\mathrm{d}y\,\psi_j(y)f(x,y)$$

sul complementare di un insieme $Z_j\subset\Omega_1$ di misura nulla. Sia $Z=\bigcup Z_j$; Z è di misura nulla, e sul suo complementare

$$0=\int_{\Omega_2}\mathrm{d}y\,\psi_j(y)f(x,y) \text{ per ogni } j$$

Poiché $\{\psi_j(y)\}_{j\in\mathbb{N}}$ è una base ortonormale, $f(x,y)=0$ q.o. in y, se $x\in Z$. Sia W_x l'insieme su cui $f(x,y)$ non è nulla, con $x\in Z$. L'insieme $\{(x,y)|\,x\in Z, y\in W_x\}$ è contenuto in $Z\times\Omega$ che ha misura nulla, dunque è misurabile e ha misura nulla. Ma allora f è nulla quasi ovunque in $\Omega_1\times\Omega_2$.

In conclusione, non esistono funzioni ortogonali a tutte le funzioni del sistema ortonormale $\phi_i(x)\psi_j(y)$. Ne segue che questo sistema è in effetti una base ortonormale.

Si può generalizzare questo esempio, si veda su [RS] il paragrafo sul prodotto tensore di due spazi di Hilbert.

3 Polinomi di Legendre

3.1 Basi di polinomi

Considera $L^2((-1,1))$. Sia $\phi_k(x)$ il sistema ortonormale che si ottiene ortogonalizzando con Gramm-Schmidt la successione di funzioni $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$.
Usando la densità delle funzioni continue in L^2, e il teorema di Weierstrass sull'approssimazione uniforme mediante polinomi delle funzioni continue, dimostra che $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale completo.
I passi da fare sono gli stessi dell'esercizio 2.5 sulla base trigonometrica.

Osserva che $\phi_k(x)$ è un polinomio di grado n, che è pari per n pari, e dispari per n dispari. Inoltre, se $k < n$

$$\int_{-1}^{1} x^k \phi_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

e, a meno di coefficienti moltiplicativi, ϕ_n è l'unico polinomio di grado n ortogonale al sottospazio generato da 1, x, $\ldots x^{n-1}$.

3.2 $D^n(x^2-1)^n$

Indico con D la derivata d/dx. Ricordo la formula di Leibniz

$$D^n(fg) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k f\, D^{n-k} g$$

e che, per $k \leq n$

$$D^k x^n = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

Provare che $D^n(x^2-1)^n$ è un polinomio di grado n e i seguenti fatti.

a. se $m < n$:

$$D^m(x^2-1)^n = D^m((x-1)^n(x+1)^n) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} D^k(x-1)^n\, D^{m-k}(x+1)^n$$

dunque in $x = \pm 1$ vale 0.

b. con sviluppo analogo, prova che

$$D^n(x^2-1)^n\big|_{x=\pm 1} = (\pm 1)^n 2^n n!$$

c. Integrando iterativamente per parti, prova che se ϕ è una funzione regolare,

$$(\phi, D^n(x^2-1)^n) = (-1)^n (D^n\phi, (x^2-1)^n)$$

d. concludi che a meno di costanti moltiplicative, $D^n(x^2-1)^n$ coincide con il polinomio ortonormalizzato ϕ_n dell'esercizio precedente.

3.3 I polinomi di Legendre G_n

Sia

$$G_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D^n(x^2-1)^n$$

Prova che

a. $G_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n n!^2} x^n + \dots$

b. $G_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$

c. $(G_n, G_n) = \frac{(2n)!}{2^n n!^2}(x^n, G_n)$

d. $(x^n, G_n) = \frac{1}{2^n n!}(x^n, D^n(x^2-1)^n)$

e. $(x^n, D^n(x^2-1)^n) = (-1)^n n! \int_{-1}^1 (x^2-1)^n \, \mathrm{d}x$

f. Integrando successivamente per parti,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (x^2-1)^n \, \mathrm{d}x &= \int_{-1}^1 (x-1)^n (x+1)^n \, \mathrm{d}x = \\ &= -\frac{n}{n+1} \int_{-1}^1 (x-1)^{n-1}(x+1)^{n+1} \, \mathrm{d}x = \\ &= \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)} \int_{-1}^1 (x-1)^{n-2}(x+1)^{n+2} \, \mathrm{d}x = \\ &= (-1)^n \frac{n!^2}{(2n)!} \int_{-1}^1 (x+1)^{2n} \, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

g. $\int_{-1}^1 (x+1)^{2n} \, \mathrm{d}x = 2^{2n+1}/(2n+1)$

Concludi che

$$(G_n, G_m) = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$$

3.4 L'equazione di Sturm-Liouville per G_n

Qui indico le derivate con l'apice: $Df = f' = df/dx$. Considera il polinomio

$$((1-x^2)G_n')'$$

Mostra che è di grado n, e che il coefficiente di x^n è $-n(n+1)\frac{1}{2^n n!}$.

Integrando per parti, mostra che

$$(((1-x^2)G_n')', G_m) = -\int_{-1}^1 (1-x^2)G_n' G_m' = (((1-x^2)G_m')', G_n)$$

Concludi che per $n \neq m$

$$(((1-x^2)G_n')', G_m) = 0.$$

Usando che $((1-x^2)G_n')' = -n(n+1)\frac{1}{2^n n!}x^n + \dots$, mostra che

$$(((1-x^2)G_n')', G_n) = -n(n+1)(G_n, G_n)$$

Concludi che per ogni m,

$$(((1-x^2)G_n')' + n(n+1)G_n, G_m) = 0$$

e dunque G_n risolve l'equazione di Sturm-Liouville

$$((1-x^2)G_n')' = (1-x^2)G_n'' - 2xG_n' = -n(n+1)G_n$$

3.5 * Zeri di G_n

G_n soddisfa un'equazione differenziale lineare del secondo ordine. Usa questo fatto e che G_n non è identicamente nulla, per provare che ogni zero interno a $(-1,1)$ di G_n è semplice (cioè se $x_0 \in (-1,1)$ e $G_n(x_0) = 0$, allora $G_n'(x_0) \neq 0$.
Dimostra, per induzione completa, che G_n ha esattamente n zeri distinti nell'intervallo $(-1,1)$. Puoi usare il fatto che, dati $x_1 \dots x_k$ distinti, il polinomio $\prod_{i=1}^{k}(x - x_i)$ ha grado n e cambia segno negli zeri x_i.

4 Altre basi di polinomi

4.1 L^2_w

Sia $w(x) \geq 0$ su Ω aperto di $\mathbb{R}^n$. Si definisce lo spazio pesato L^2_w attraverso il prodotto scalare

$$(f,g)_w = \int_\Omega w(x)\, f(x) g(x)\, \mathrm{d}x$$

Supponi che $w(x) = 0$ al più su un sottoinsieme di misura nulla di Ω, e mostra che l'operatore

$$U : L^2_w(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

definito da

$$Uf = \sqrt{w} f$$

è una biezione che conserva il prodotto scalare (cioè è una **isometria**):

$$(f,g)_w = (Uf, Ug).$$

Supponendo che w sia continua, prova che le funzioni continue a supporto compatto sono dense in $L^2_w(\Omega)$, sapendo che sono dense in $L^2(\Omega)$.
Suggerimento. Sia $\Omega_{\delta,M} = \{x | \delta < w(x) < M\}$, con $\delta > 0$, $M > 0$, che è un aperto di Ω per l'ipotesi di continuità su w, e sia data $f \in L^2_w(\Omega)$. Per M sufficientemente grande e δ sufficientemente piccolo, $\int_{\Omega \setminus \Omega_{\delta,M}} wf^2 < \varepsilon$. Inoltre, esiste f_ε continua a supporto compatto in $\Omega_{\delta,M}$ tale che

$$\int_{\Omega_{\delta,M}} (f - f_\varepsilon)^2 < \varepsilon^2$$

etc. . . .

4.2 Polinomi in spazi pesati

Sia I un intervallo limitato e sia w sommabile su I:

$$\int_I \mathrm{d}x w(x) < +\infty$$

Prova che $\mathrm{span}\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è denso in $L^2_w(I)$, usando la densità delle funzioni continue in L^2_w, e che le funzioni continue sono limite uniforme di polinomi.

4.3 Basi in spazi pesati

Considera lo spazio pesato

$$L^2_w((-1,-1))$$

con $w = 1/\sqrt{1-x^2}$, dotato del prodotto scalare

$$(f,g)_w = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} f(x)g(x)$$

Con il cambiamento di variabile $\cos x = \vartheta$ si ha

$$\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}\vartheta$$

dunque

$$(f,g)_w = \int_0^{\pi} f(\cos\vartheta)g(\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta$$

Nota che

$$\mathcal{A} : L^2_w((-1,1)) \to L^2((0,\pi))$$

definito da

$$(\mathcal{A}f)(\theta) = f(\cos\theta)$$

è un'isometria.
Poiché $\{\cos(n\vartheta)\}_{n\geq 0}$ è un sistema ortonormale completo in $L^2((0,\pi))$, ottieni che

$$T_n = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos x), \quad n \in \mathbb{N}$$

è un sistema ortogonale completo il $L^2_w((-1,1))$. Ne segue che

$$(1-x^2)^{-1/4}T_n(x)$$

è una sistema ortogonale completo il $L^2((-1,1))$

4.4 Polinomi di Tchebyshev

Poiché

$$\begin{aligned}\cos(n\vartheta) + \mathrm{i}\sin(n\vartheta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\vartheta} = (\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta)^n = \\ = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^k\vartheta\,\mathrm{i}^{n-k}\sin^{n-k}\vartheta\end{aligned}$$

Passando alle parti reali, ottieni che

$$\cos(n\vartheta) = \cos^n\vartheta - \binom{n}{2}(\cos\vartheta)^{n-2}\sin^2\vartheta + \binom{n}{4}(\cos\vartheta)^{n-4}\sin^4\vartheta - \dots$$

Da questa espressione e dal fatto che $\sin 2\vartheta = 1 - \cos^2\vartheta$ ottieni che

$$T_n = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos x)$$

detto $n-$esimo polinomio di Tchebyshev, è un polinomio di grado n.

La normalizzazione è tale che $T_n(x) = x^n + dots$. Dimostralo usando lo sviluppo del binomio in

$$\cos^n\vartheta = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta}}{2}\right)^2$$

Usando che $D^2_\vartheta\cos(n\vartheta) = -n^2\cos(n\vartheta)$, e che

$$\partial_\theta = -\sqrt{1-x^2}\,\partial_x$$

mostra che T_n risolve

$$\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}T_n')' = -n^2 T_n$$

che corrisponde al problema di Sturm-Liouville

$$(\sqrt{1-x^2}T_n')' = -n^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n$$

Esplicitando le derivate di T_n:

$$(1-x^2)T_n'' - xT_n' = -n^2 T_n$$

4.5 Polinomi di Hermite

Considera $L^2_w(\mathbb{R})$, con $w = \mathrm{e}^{-x^2}$ e considera i polinomi di Hermite

$$H_n = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} D^n \mathrm{e}^{-x^2}$$

Mostra che

a. $H_n(x)$ è un polinomio di grado n

b. $H_n(x) = 2^n x^n + \dots$

c. $|D^n(\mathrm{e}^{-x^2})| \leq c_{n,\varepsilon} \mathrm{e}^{-(1-\varepsilon)x^2}$ per $\varepsilon \in (0,1)$ (questa stima serve per poter fare gli integrali per parti nel punto successivo).

d. Mostra che per ogni ϕ regolare che non diverga più di $\mathrm{e}^{\alpha x^2}$, con $\alpha in (0,1)$, vale

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2} \phi(x) H_n(x)\, \mathrm{d}x = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} \phi(x) D^n \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} D^n \phi(x) \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x$$

e. $(x^k, H_n)_w = 0$ per $k < n$

f. $(x^n, H_n)_w = \int_{\mathbb{R}} D^n x^n \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x = n!\sqrt{\pi}$

g. $z_n = (H_n, H_n)_w = 2^n (x^n, H_n) = 2^n n! \sqrt{\pi}$

Se ne conclude che H_n è una famiglia di polinomi di grado n, che costituisce un sistema ortogonale in $L^2_w(\mathbb{R})$, e dunque

$$\frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \mathrm{e}^{-x^2/2} H_n(x)$$

è un sistema ortonormale di $L^2(\mathbb{R})$. Successivamente, proveremo che è un sistema ortonormale completo. Per esercizio potete provare a mostrare che

$$\operatorname{span}\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$$

è denso in L^2_w (affermazione equivalente alla completezza dei polinomi di Hermite) ma è improbabile che ci riusciate usando argomenti elementari.

4.6 L'equazione di Sturm-Liouville per i polinomi di Hermite

Calcoliamo preliminarmente H_n'. Poiché H_n ha grado n, H_n' ha grado $n-1$, e, per il punto b. dell'esercizio precedente, $H_n' = n2^n x^{n-1} + \dots = 2nH_{n-1} + \dots$ Ne segue che

$$H_n' = 2nH_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} c_k H_k$$

Troviamo i coefficienti c_k. Sia $k \leq n-2$:

$$(H_n', H_k) = c_k(H_k, H_k)$$

D'altra parte

$$(H_n', H_k) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2} H_n'(x) H_k(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2} H_n(x) \left(-2xH_k(x) + H_k'(x)\right)\mathrm{d}x$$

che è 0 perché $xH_k(x)$ e H_k' sono polinomi di grado minore di n. Dunque

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}$$

Considera ora

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\mathrm{e}^{-x^2} H_n'\right)' H_m\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2} H_n' H_m' = -4nm(H_{n-1}, H_{m-1})$$

Usando la definizione di z_n al punto f. dell'esercizio precedente,

$$(H_{n-1}, H_{m-1})_w = z_{n-1}\delta_{n-1,m-1} = z_{n-1}\delta_{n,m} = \frac{z_{n-1}}{z_n}(H_n, H_m)_w = \frac{1}{2n}(H_n, H_n)$$

Ne segue che per ogni m,

$$(\mathrm{e}^{x^2}(\mathrm{e}^{-x^2} H_n')', H_m)_w = -2n(H_n, H_m)_w$$

Quindi, per ortonormalità dei polinomi $\{H_m\}_{m\in\mathbb{N}}$,

$$\mathrm{e}^{x^2}(\mathrm{e}^{-x^2} H_n')' = -2nH_n$$

Equivalentemente, H_n risolve il problema di Sturm-Liouville

$$(\mathrm{e}^{-x^2} H_n')' = -2n\mathrm{e}^{-x^2} H_n$$

e anche

$$H_n'' - 2xH_n' = -2nH_n$$

4.7 Polinomi di Laguerre

Considera $L^2_w(\mathbb{R}^+)$, con $w = \mathrm{e}^{-x}$ e considera i polinomi di Laguerre

$$L_n = \mathrm{e}^x D^n(x^n \mathrm{e}^{-x})$$

Mostra che

a. $L_n(x)$ è un polinomio di grado n

b. $L_n(x) = (-1)^n x^n + \cdots + n!$

c. $|D^n(x^n \mathrm{e}^{-x}| \leq c_{n,\varepsilon}\mathrm{e}^{-(1-\varepsilon)x}$, per $\varepsilon \in (0,1)$ (questa stima serve per poter fare gli integrali per parti nel punto successivo).

d. Per ogni ϕ regolare che non diverga più di $\mathrm{e}^{\alpha x}$ con $\alpha \in (0,1)$,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\phi(x)L_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \phi(x)D^n x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = (-1)^n \int_0^{+\infty} D^n\phi(x) x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

e. $(x^k, L_n)_w = 0$ per $k < n$

f. $(x^n, L_n)_w = (-1)^n \int_0^{+\infty} D^n x^n x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = (-1)^n n! \int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = (-1)^n n!^2$

g. $(L_n, L_m)_w = n!^2 \delta_{n,m}$

Se ne conclude che L_n è una famiglia di polinomi di grado n, che costituisce un sistema ortogonale in $L^2_w(\mathbb{R}^+)$, e dunque

$$\frac{1}{n!}\mathrm{e}^{-x/2} L_n(x)$$

è un sistema ortonormale di $L^2(\mathbb{R}^+)$. Successivamente, proveremo che è un sistema ortonormale completo. Per esercizio potete provare a mostrare che

$$\mathrm{span}\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$$

è denso in $L^2_w(\mathbb{R}^+)$ (affermazione equivalente alla completezza dei polinomi di Laguerre) ma è improbabile che ci riusciate usando argomenti elementari.

4.8 L'equazione di Sturm-Liouville per i polinomi di Laguerre

Calcoliamo per parti

$$\int_0^{+\infty} \left(x\mathrm{e}^{-x} L_n'\right)' L_m = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} L_n' L_m' = \int_0^{+\infty} \left(x\mathrm{e}^{-x} L_m'\right)' L_n$$

Poiché

$$\left(x\mathrm{e}^{-x} L_n'\right)' = \mathrm{e}^{-x}(xL_n'' + (1-x)L_n')$$

e xL_n'' ha grado $n-1$ mentre $(1-x)$ ha grado n, ne segue che per $m \geq n$ il primo integrale l'integrale può essere diverso da zero solo se $m = n$. Analogamente, per $m \leq n$ l'ultimo integrale può essere diverso da zero solo se $m = n$. Quindi l'integrale è nullo se $m \neq n$.
Calcoliamone il valore per $m = n$:

$$xL_n'' + (1-x)L_n' = -n(-1)^n x^n + \dots = -nL_n + \dots$$

Dunque per ogni m:

$$\int_0^{+\infty} \left(x\mathrm{e}^{-x} L_n'\right)' L_m = -n(L_n, L_m)$$

Per ortogonalità dei polinomi di Legendre concludo che

$$\left(x\mathrm{e}^{-x} L_n'\right)' = -nL_n$$

(qui non serve la completezza, perché non si esce dallo spazio dei polinomi). Equivalentemente

$$xL_n'' + (1-x)L_n' = -nL_n$$

4.9 * Ottimalità di G_n

Sia G_n l'$n-$esimo polinomio di Legendre, e sia $C_n = (2n)!/(2^n n!)$ il coefficiente di x^n in G_n. Il polinomio G_n/C_n è dunque monico. Dimostra che tra tutti i polinomi monici di grado n, G_n/C_n è quello con la minima norma quadratica.
Suggerimento: vedi CH pag 86.

4.10 * Ottimalità di T_n

Sia T_n l'$n-$esimo polinomio di Tchebyshev. Mostra che tra tutti i polinomi monici di grado n, è quello che minimizza la norma L^∞.
Suggerimento: vedi CH pag 89.

4.11 * Zeri dei polinomi ortogonali

Sia $\{\phi_n(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ la famiglia di polinomi che si ottiene per ortonormalizzazione di $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ nello spazio pesato $L^2_w((a,b))$, con $w \geq 0$, nullo al più agli estremi a e b. Usando lo stesso ragionamento del punto 3.5 mostra che ϕ_n ha esattamente n zeri semplici in (a,b). Mostra anche che non è necessario conoscere a priori la semplicità degli zeri.

5 Operatori limitati

Se B_1 e B_2 sono due spazi di Banach, indico con $\mathcal{L}(B_1, B_2)$ lo spazio (di Banach) degli operatori limitati da B_1 a B_2, e con $\mathcal{L}(B)$ lo spazio degli operatori limitati da B in B.
Se $T \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$, indico con $\operatorname{Ker} T$ il kernel (nucleo) di T:

$$\operatorname{Ker} T = \{x \in B_1 |\, Tx = 0\} \subset B_1$$

e con $\operatorname{Range} T$ l'immagine di T:

$$\operatorname{Range} T = \{Tx \in B_2 |\, x \in B_1\} \subset B_2$$

5.1 Limitatezza e continuità

$T : B_1 \to B_2$ è limitato se e solo se è continuo.
Se T è limitato

$$\|Tx - Ty\|_{B_2} = \|T(x-y)\|_{B_2} \leq \|T\|\, \|x-y\|_{B_2}$$

dunque è lipschitziano e quindi continuo.
Se T è continuo, è continuo in 0, dunque dato $\varepsilon = 1$, esiste $\delta > 0$ tale che se $\|x\|_{B_1} \leq \delta$ allora $\|Tx\|_{B_2} \leq 1$. Poiché

$$Tx = \frac{\|x\|)B_1}{\delta} T\left(\frac{\delta x}{\|x\|_{B_1}}\right)$$

e l'argomento di T ha norma δ, vale

$$\|Tx\|_{B_2} \leq \frac{\|x\|)B_1}{\delta}$$

quindi T è limitato e $\|T\| \leq 1/\delta$

5.2 Lo spazio degli operatori limitati

Indico con $\mathcal{L}(B_1, B_2)$ lo spazio degli operatori limitati. Dimostra che è uno spazio vettoriale e che la norma operatoriale è in effetti una norma.
Mostriamo che è uno spazio completo rispetto alla norma. Sia T_n una successione di operatori limitati, di Cauchy rispetto alla norma. Per ogni $x \in B_1$:

$$\|T_n x - T_m x\|_{B_1} \leq \|T_n - T_m\|\, \|x\|_{B_2}$$

dunque $T_n x$ è di Cauchy in B_2. Poiché B_2 è completo, $T_n x$ converge a un elemento di B_2 che indico con Tx.
È facile mostrare che Tx è lineare. Resta da mostrare che è limitato e che è il limite in norma operatore di T_n. Poiché $T_m x \to Tx$ in B_1, Infine

$$\|(T - T_n)x\| = \lim_{m\to+\infty} \|T_m x - T_n x\| \leq \limsup_{n\to+\infty} \|T_m - T_n\|\, \|x\|$$

Ma fissato $\varepsilon > 0$, esiste N tale che se $m, n \geq M$ $\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$, dunque per $n \geq N$

$$\|(T - T_m)x\| \leq \varepsilon \|x\|$$

Questa disuguaglianza implica che T è limitato e che

$$\lim_{m \to +\infty} \|T - T_n\| = 0$$

5.3 Prodotto tra operatori

Siano A e B in $\mathcal{L}(H)$. Mostra che $AB \in \mathcal{L}(H)$ e che

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$$

5.4 Norma del proiettore

Sia M un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert H. Sia $\mathbb{P}_M$ il proiettore su M. Mostra che è un operatore lineare, che è continuo (per il teorema della proiezione), e che la sua norma è 1.

5.5 Isometrie tra spazi pesati

Mostra che l'operatore U dell'esercizio 4.1 è limitato e che ha norma 1.

5.6 l_2

Sia l_2 lo spazio delle successioni $\hat{f} = \{\hat{f}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ con quadrato sommabile, dotato del prodotto scalare

$$(\hat{f}, \hat{g})_{l_2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \overline{\hat{f}}_k \hat{g}_k$$

Si dimostra facilmente che l_2 è uno spazio di Hilbert.
Sia H uno spazio di Hilbert separabile, e sia $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sua base. Mostra che l'operatore U da H in l_2 definito da

$$Uf = \hat{f} = \{\hat{f}_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \quad \hat{f}_k = (e_k, f)$$

è un operatore lineare continuo biettivo, che conserva il prodotto scalare (cioè è una isometria che dà un isomorfismo tra H e l_2).
Come conseguenza, esiste un solo spazio di Hilbert separabile di dimensione infinita, a meno di isomorfismi.

Suggerimento: se $\hat{f} \in l_2$ allora $\sum_{k=1}^{n} \hat{f}_k e_k$ è di Cauchy e dunque converge a una qualche $f \in H$ per completezza di H, e $\hat{f}_k$ sono proprio i coefficienti di Fourier di f. Ne segue che U è una biezione. Dati $f, g \in H$,

$$(f, g) = \lim_n (\sum_{k \leq n} \hat{f}_k e_k, g) = \lim_n \sum_{k \leq n} \overline{\hat{f}}_k \hat{g}_k = (\hat{f}, \hat{g})_{l_2}$$

5.7 L'operatore ∂_x

Considera $L^2((-\pi, \pi), \mathbb{C})$. Per i vettori della base $e_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}/\sqrt{2\pi}$ è ben definita la derivata:

$$\partial_x \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\sqrt{2\pi}} = \mathrm{i}k \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\sqrt{2\pi}}$$

(inoltre ∂_x è diagonale su questa base). Certamente si può estendere ∂_x per linearità a tutti i polinomi trigonometrici (cioè le combinazioni lineari finite della base di Fourier), che sono densi in $L^2((-\pi,\pi),\mathbb{C})$. Però ∂_x non è un operatore limitato, infatti

$$\| \partial_x e_k\|^2 = k^2 = k^2\|e_k\|^2$$

dunque $\sup_{v\neq 0} \| \partial_x v\|/\|v\| = +\infty$.

Molti operatori interessanti sono illimitati, e in genere sono definibili solo su sottoinsiemi densi di uno spazio di Hilbert. Indicherò con $\mathcal{D}(T)$ il dominio di definizione di un operatore T (eventualmente illimitato), e in genere assumerò che

$$\overline{\mathcal{D}(T)} = H.$$

5.8 Estensione per continuità di un operatore limitato

Sia $T : \mathcal{D}(T) \to B_2$, con $\mathcal{D}(T)$ denso in B_1. Dimostra che se T è limitato su $\mathcal{D}(T)$, cioè se

$$\sum_{f\in\mathcal{D}(T)} \frac{\|Tf\|_{B_2}}{\|f\|_{B_1}} \leq C$$

allora esiste un unico operatore limitato da B_1 a B_2 che estende T e la sua norma è $\leq C$ (estendi per continuità e verifica le proprietà dell'estensione che hai trovato).

6 Trasformata di Fourier

Indicherò con S^∞ lo spazio di Schwartz, cioè le funzioni C^∞ da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$, con le derivate che decrescono più rapidamente di ogni polinomio:

$$S^\infty = \{f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})|\ \ \forall k,n \geq 0\ \ \exists c_{k,n}\ \ \forall x \in \mathbb{R}\,(1 + |x|^k)|D^n f| \leq c_{k,n}\}.$$

In [FM] par. 3.2 ho provato che la trasformata di Fourier:

$$(\mathcal{F}f)(\lambda) = \hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x} f(x)\,\mathrm{d}x$$

è biettiva da S^∞ in S^∞, e che la sua inversa è

$$(\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

Inoltre $\mathcal{F}$ (e $\mathcal{F}^{-1}$) è un'isometria rispetto al prodotto L^2:

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(\lambda)}\hat{g}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Questa identità equivale all'identità distribuzionale

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x-y)}\,\mathrm{d}\lambda = \delta(x-y)$$

6.1 Trasformata di Fourier in L^2

Mostra che $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^{-1}$ si estendono a $L^2(\mathbb{R})$ usando la densità di S^∞ in L^2, che le estensioni conservano il prodotto scalare, e che $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \mathbf{I} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}$.
Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$, mostra che

$$f(x)\mathcal{X}\{|x| < M\} \to f(x) \text{ in } L^2(\mathbb{R})$$

La trasformata di Fourier di $f(x)\mathcal{X}|x| < M$ esiste per ogni λ ed è una funzione continua (per convergenza dominata, *vedi anche* l'esercizio 6.4), ed è in L^2.
Per continuità di $\mathcal{F}$,

$$\hat{f}(\lambda) = \lim_{M \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_M^M \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Quindi per ogni $f \in L^2$, q.o. in λ esiste

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x} f(x)\,\mathrm{d}x$$

come valore principale, e definisce una funzione in L^2.

6.2 Completezza dei polinomi di Hermite

La completezza in $L^2_w(\mathbb{R})$ con $w = \mathrm{e}^{-x^2}$ dei polinomi di Hermite è equivalente al fatto che se $f \in L^2_w$ verifica per ogni $n \in \mathbb{N}$ che $(x^n, f)_w = 0$, allora f deve essere nulla (perché?).

Sia dunque $f \in L^2_w(\mathbb{R})$, con $(x^n, f)_w = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si mostri che $\mathrm{e}^{\delta|x|} \in L^2_w(\mathbb{R})$, per ogni $\delta > 0$. Ne segue che

$$\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{\delta|x|} f(x) \in L^1(\mathbb{R})$$

Ma allora, per convergenza dominata,

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(\mathrm{i}\lambda)^n}{n!} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_R \mathrm{e}^{-x^2} \frac{(\mathrm{i}\lambda)^n}{n!} f(x)\,\mathrm{d}x$$

e tutti i termini della serie sono nulli, dunque

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\lambda.$$

Dimostra che $\mathrm{e}^{-x^2} f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ (usa che $\mathrm{e}^{-2x^2} \le \mathrm{e}^{-x^2}$). Poiché la trasformata di Fourier conserva la norma L^2 ne segue che

$$\mathrm{e}^{-x^2} f(x) = 0 \quad \text{q.o.}$$

e quindi f è nulla in $L^2_w(\mathbb{R})$.

6.3 Completezza dei polinomi di Laguerre

La completezza in $L^2_w(\mathbb{R}^+)$ con $w = \mathrm{e}^{-x}$ dei polinomi di Laguerre è equivalente al fatto che se $f \in L^2_w(\mathbb{R}^+)$ verifica per ogni $n \in \mathbb{N}$ che $(x^n, f)_w = 0$, allora f deve essere nulla.

Seguendo il [CH], sembra che, usando la trasformazione $x = y^2$ si possa mostrare che la completezza dei polinomi in $L^2_{\mathrm{e}^{-y^2}}(\mathbb{R})$ sia equivalente alla completezza dei polinomi in $L^2_{\mathrm{e}^{-x}}(\mathbb{R}^+)$. Però c'è qualche dettaglio che non torna, quindi, seguendo il suggerimento di uno di voi, faccio una dimostrazione diretta usando lo stesso procedimento usato per la completezza dei polinomi di Hermite.

Sia dunque $f \in L^2_{\mathrm{e}^{-x}}$ e sia $(x^n, f)_w = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Con il cambiamento di variabili $x = z^2$ si ha

$$0 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-z^2} z^{2n+1} f(z^2)\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{+\infty} |z|\mathrm{e}^{-z^2} z^{2n} g(z)\,\mathrm{d}z$$

dove $g(z) = f(z^2)$. La funzione g è in $L^2_{|z|\mathrm{e}^{-z^2}}(\mathbb{R})$, infatti

$$\int_{\mathbb{R}} |z|\mathrm{e}^{-z^2} g^2(z) = \int_{\mathbb{R}} |z|\mathrm{e}^{-z^2} f^2(x^2) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} f^2(x)$$

Si mostri che $\mathrm{e}^{\delta|z|} \in L^2_{|z|\mathrm{e}^{-z^2}}$, per ogni $\delta > 0$. Ne segue che

$$\mathrm{e}^{-z^2}|z|\mathrm{e}^{\delta|z|}g(x) \in L^1(\mathbb{R})$$

Ma allora, per convergenza dominata,

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z} z^n |z| g(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-z^2} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(\mathrm{i}\lambda)^n}{n!} z^n |z| g(z)\,\mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_R \mathrm{e}^{-z^2} \frac{(\mathrm{i}\lambda)^n}{n!} z^n |z| g(z)\,\mathrm{d}z.$$

I termini con n dispari sono nulli perché $|z|g(z)$ è pari. Se $n = 2k$ l'integrale è

$$\int_R \mathrm{e}^{-z^2} z^{2k}|z|g(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

per l'ipotesi. Dunque

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}|z|g(z)\,\mathrm{d}z = 0 \quad \forall\lambda.$$

Poiché $\mathrm{e}^{-z^2}|z|g(z)$ è anche in $L^2(\mathbb{R})$ (usa che $|z|\mathrm{e}^{-2z^2} \le c\mathrm{e}^{-z^2}$), e la trasformata di Fourier conserva la norma L^2 ne segue che

$$\mathrm{e}^{-z^2}|z|g(z) = 0 \quad \text{q.o.}$$

e quindi g è nulla q.o, da cui $f = 0$ q.o..

6.4 Trasformata di Fourier in L^1

Mostra che $\mathcal{F}$ si più estendere da S^∞ a $L^1(\mathbb{R})$ e che questa estensione verifica

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$$

con $\|\mathcal{F}f\|_\infty \le \|f\|_1/\sqrt{2\pi}$.
Per provare la continuità di $\mathcal{F}f(\lambda)$ puoi usare la convergenza dominata.

Inoltre, se $f \in C^1$, $f, f \in L^(\mathbb{R})$ allora

$$\mathcal{F}f'(\lambda) = \mathrm{i}\lambda\mathcal{F}f(\lambda)$$

dunque

$$|\mathcal{F}f(\lambda)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}|\lambda|}\|f'\|_{L^1}$$

e quindi tende a 0 per $\lambda \to \pm\infty$. Per densità delle funzioni C^1 a supporto compatto in L^1, prova che se $f \in L^1(\mathbb{R})$, allora

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty} \mathcal{F}f(\lambda) = 0$$

(in pratica stai dimostrando il lemma di Rienmann-Lebesgue).

6.5 Iniettività della trasformata di Fourier in L^1

Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, dati a, b tali che $-\infty < a < b < +\infty$, considera la funzione

$$g(x) = \int_a^b f(x+t)\,\mathrm{d}t = \int_{a+x}^{b+x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

e mostra che è continua in a, b, x.

Mostra che $g \in L^1$, con $\|g\|_1 \leq (b-a)\|f\|_1$, e che $g \in L^2$:

$$\|g\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x |g(x)|^2 \leq \int_a^b \mathrm{d}t_1 \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x |f(x+t_1)| \int_a^b \mathrm{d}t_2 |f(x+t_2)| \leq (b-a)\|f\|_1^2$$

Mostra che

$$\hat{g}(\lambda) = \hat{f}(\lambda) \int_a^b \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t} \, \mathrm{d}t.$$

Quindi se $\hat{f}(\lambda) \equiv 0$ allora $\hat{g}(\lambda) \equiv 0$. Poiché $g \in L^2$ e $\mathcal{F}$ è un'isometria in L^2, ne segue che

$$\|g\|_2 = \|\hat{g}\|_2 = 0$$

e dunque $g(x) = 0$ quasi ovunque in x, ma essendo g continua $g(x) \equiv 0$. Ma allora, dalla definizione di g, segue che f deve essere nulla quasi ovunque.

7 Operatori da H in sé

Considero adesso un caso particolare di operatori lineari, quelli che vanno da H in $\mathbb{R}$ per spazi reali (in $\mathbb{C}$ per spazi complessi). Tali operatori vengono detti **funzionali lineari**. Nel caso finito dimensione, una applicazione lineare da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ è

$$Lx = \sum_{i=1}^{n} z_i x_i$$

per opportuni coefficienti $z_i, i = 1 \dots n$, cioè

$$Lx = (z, x)$$

In dimensione infinita, fissato $z \in H$ il funzionale

$$Lx = (z, x)$$

è lineare continuo, e poiché $|Lx| \leq \|z\| \, \|x\|$, scegliendo $x = z$ si ottiene che

$$\|L\| = \|z\|.$$

Anche in dimensione infinita i funzionali lineari sono tutti e soli quelli ottenuti mediante prodotto scalare con un vettore fissato, come mostra il seguente teorema.

7.1 Teorema di rappresentazione di Riesz

Sia $L \in \mathcal{L}(H)$ (con H reale o complesso), cioè L è un funzionale lineare continuo. Essendo L lineare, $\operatorname{Ker} L$ è un sottospazio chiuso. Se $\operatorname{Ker} L = H$, la scelga $z = 0$ dimostra il teorema. Mostriamo invece che se $\operatorname{Ker} L$ non è tutto H, il suo ortogonale ha dimensione 1.

Siano $v_1, v_2 \in (\operatorname{Ker} L)^{\perp}$ non nulli: sia

$$Lv_1 = \alpha_1 \quad Lv_2 = \alpha_2$$

(entrambi non nulli, per ipotesi sulle v_1 e v_2, che sono nell'ortogonale del nucleo). Ma allora

$$L(v_1/\alpha_1 - v_2/\alpha_2) = 0$$

e dunque $(v_1/\alpha_1 - v_2/\alpha_2) \in \operatorname{Ker} L$. Ma per ipotesi v_1 e v_2 sono non nulli e ortogonali al nucleo di L, dunque

$$v_1/\alpha_1 - v_2/\alpha_2 = 0$$

Ne segue che esiste un vettore v_0 di norma 1 tale che

$$(\operatorname{Ker} L)^\perp = \{\alpha v_0 | \ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Poiché L è continuo, $\operatorname{Ker} L$ è chiuso, dunque (vedi punto 2.2)

$$H = \operatorname{Ker} L \oplus (\operatorname{Ker} L)^\perp.$$

Sia $v \in H$; decomponendolo

$$v = (v_0, v)v_0 + (v - (v_0, v)v_0)$$

dove $(v_0, v)v_0$ è la proiezione di v su $(\operatorname{Ker} L)^\perp$ e dunque $v - (v_0, v)v_0 \in \operatorname{Ker} L$. Ne segue

$$Lv = (v_0, v)Lv_0 = (z, v) \quad \text{ e } \|L\| = \|z\|$$

con $z = Lv_0\ v_0$.

Per uno spazio di Banach B, lo spazio di Banach di tutti i funzionali lineari e continui è detto **duale** di B e si indica con B'. Per uno spazio di Hilbert H il duale si identifica con H stesso mediante il teorema di rappresentazione di Riesz.

La possibilità di identificare H' con H permette di definire l'**aggiunto** di un operatore da H a H (nota che per uno spazio di Banach B l'aggiunto è un operatore in $\mathcal{L}(B')$)

7.2 Operatore aggiunto

Sia $A \in \mathcal{L}(H)$, fissa un vettore $x \in H$ e considera l'applicazione

$$H \ni y \to (x, Ay) \in \mathbb{R}$$

È evidentemente un funzionale lineare in y, e verifica

$$|(x, Ay)| \leq \|x\| \, \|Ay\| \leq \|A\| \, \|x\| \, \|y\|$$

Per il teorema di rappresentazione, esiste $\tilde{x}$ tale che per ogni y:

$$(x, Ay) = (\tilde{x}, y)$$

È facile dimostrare che $\tilde{x}$ dipende linearmente da x, dunque esiste l'operatore lineare A^* tale che $\tilde{x} = A^*x$, dunque

$$(x, Ay) = (A^*x, y)$$

Passando ai coniugati si ottiene

$$(Ay, x) = \overline{(y, Ax)} = \overline{(A^*y, x)} = (x, A^*y)$$

Proviamo che A^* è limitato.

$$\|A^*x\| = \sup_{\|y\|=1} (A^*x, y) = \sup_{\|y\|=1} (x, Ay) \leq \|A\| \, \|x\|$$

Ne segue A^* è limitato e che

$$\|A^*\| \leq \|A\|$$

Allo stesso modo,

$$\|Ay\| = \sup_{\|x\|=1}(x, Ay) = \sup_{\|x\|=1}(A^*x, y) \leq \|A\| \, \|y\|$$

dunque $\|A\| \leq \|A^*\|$ e dalle due disuguaglianze si ottiene

$$\|A^*\| = \|A\|.$$

Inoltre

$$A^{**} = A$$

infatti per ogni x d y,

$$(A^{**}x, y) = (x, A^*y) = (Ax, y).$$

Infine, sempre a proposito delle norme, sia $x \neq 0$:

$$\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x) \leq \|A^*A\| \, \|x\|^2 \leq \|A\| \, \|A^*\| \, \|x\|^2$$

Dividendo per $\|x\|^2$ e passando al sup si ottiene

$$\|A\|^2 \leq \|A^*A\| \leq \|A\| \, \|A^*\| = \|A\|^2$$

quindi

$$\|A^*A\| = \|A\|^2$$

Definizione: A è **autoaggiunto** se $A^* = A$.

7.3 Inverso dell'aggiunto

Mostra che

$$(AB)^* = B^*A^*.$$

Inoltre, sia A invertibile. Mostra formalmente, che

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1*})$$

Nell'esercizio precedente ho usato la parola *formalmente* perché fin'ora ho glissato su un punto importante: se A è un operatore biettivo, è facile vedere che A^{-1} è un operatore lineare, ma non ho mai verificato, se non in casi particolari, se A^{-1} fosse un operatore limitato. In realtà la continuità dell'inverso è un fatto generale che discende dal lemma di Baire (o da una sua conseguenza detta "teorema dell'applicazione aperta") D'ora in poi, invece di fare dimostrazioni *ad hoc*, darò per assunto che, se A è limitato e biettivo, allora A^{-1} è limitato (come viene dimostrato in qualunque corso di analisi avanzata). Inoltre

$$1 = \|\mathbf{I}\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\| \, \|A^{-1}\| \text{ e dunque } \|A\| \, \|A^{-1}\| \geq 1.$$

Più in generale, questo teorema è vero in spazi di Banach.

Nel caso di spazi vettoriali reali di dimensione finita, le matrici autoaggiunte sono le matrici simmetriche, nel caso di spazi vettoriali complessi di dimensione finita la matrice associata all'aggiunto è la coniugata della trasposta.

7.4 Matrici infinite

Sia $A \in \mathcal{L}(H)$, e sia $\{e_k\}$ una base per H. Posso definire la matrice infinita

$$A_{ij} = (e_i, Ae_j)$$

Mostra che

$$\widehat{Ax}_i = \sum_j A_{ij}\hat{x}_j$$

e che

$$A^*_{ij} = \overline{A}_{ji}$$

cioè la matrice associata all'aggiunto è la coniugata della trasposta.

7.5 Operatori di moltiplicazione

Sia h una funzione data, e sia $A \in \mathcal{L}(L^2)$ dato da

$$(Af)(x) = h(x)f(x)$$

Mostra che è un operatore limitato se e solo se $\|h\|_\infty < +\infty$ e che la sua norma è

$$\|A\| = \|h\|_\infty$$

(nota anche che in genere non esiste f tale che $\|Af\| = \|h\|_\infty \|f\|$; deduci da questa informazione che la sfera unitaria di uno spazio infinito dimensionale non è compatta). Il suo aggiunto è

$$(A^*f)(x) = \overline{h(x)}f(x)$$

Sia z_k una successione, e sia $B \in \mathcal{L}(l_2)$ dato da

$$(Bx)_k = z_k x_k$$

Mostra che è limitato se e solo se z_k è limitata, e che

$$\|B\| = \sup_k |z_k|$$

L'aggiunto è

$$(B^*x)_k = \overline{z_k} x_k$$

7.6 Operatori di convoluzione

Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e sia

$$(Af)(x) = (g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

Se f è il L^2, la convoluzione in Fourier diventa un operatore di moltiplicazione

$$(\mathcal{F}Af)(\lambda) = \sqrt{2\pi}\hat{g}(\lambda)\hat{f}(\lambda)$$

Usando il fatto che $\mathcal{F}$ manda L^1 nelle funzioni continue e limitate, deduci che se $g \in L^1$ allora A è limitato e

$$\|A\| \leq \|g\|_1$$

Mostra questa affermazione anche usando direttamente la convoluzione.
La funzione $g(x-y)$ di chiama **nucleo integrale** dell'operatore A.
Mostra che A^* ha nucleo integrale $g(y-x)$, dunque A è autoaggiunto se e solo se g è una funzione pari. Nota che la parità di una funzione reale g è equivalente alla realtà della sua trasformata di

Fourier (il senso di quest'ultimo punto dovrebbe essere chiaro alla luce della seconda parte del punto 7.5).

7.7 Operatori integrali

Sia $g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$, e sia

$$(Af)(x) = \int_\Omega g(x,y) f(y)\, \mathrm{d}y$$

g è detto **nucleo integrale** dell'operatore. L'aggiunto A^* ha nucleo $g(y,x)$
Mostra che se $g \in L^2(\Omega \times \Omega)$ allora A è limitato.

Nota che l'ipotesi $g \in L^2(\Omega \times \Omega)$ non è una condizione necessaria: nell'esempio precedente in nucleo $g(x-y)$ non è certamente quadro sommabile in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

7.8 Lo shift su l_2

Sia $S : l_2 \to l_2$ definito da

$$S(x_0, x_1, x_2 \dots) = (0, x_0, x_1 \dots)$$

cioè S è l'operatore che shifta in avanti di un posto la successione, mettendo 0 come primo elemento. Prova i seguenti fatti.

a. S è iniettivo, infatti

$$\operatorname{Ker} S = \{0\}$$

ma non suriettivo, infatti

$$\operatorname{Range} S = \{0\} \times l_2 \subset l_2$$

(ricorda che invece un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^n$ in sé è iniettiva se e solo se è suriettiva).

b. S conserva il prodotto scalare, ma non è un isomorfismo da S in sé.

c. L'aggiunto di S è definito da

$$S^*(x_0, x_1, x_2 \dots) = (x_1, x_2 \dots)$$

che è lo shift all'indietro.

d. $S^* S = \mathbf{I}$ ma $SS^* \neq \mathbf{I}$

e.

$$\operatorname{Ker} S^* = \mathbb{R} \times 0^{\mathbb{N}} \quad \operatorname{Range} S^* = l_2$$

7.9 La trasformata di Fourier come operatore

Mostra che

$$\mathcal{F}^* = F^{-1}$$

dunque $\mathcal{F}$ è un operatore **unitario**, cioè il suo aggiunto coincide con l'inverso.

Riassumo qui i risultati principali sulle equazioni lineari in spazi di dimensione finita, e discuto la loro estensione al caso di spazi di dimensione infinita.
Sia A una matrice $n \times n$ in campo complesso, e sia b assegnato, e cerca $x \in \mathbb{C}^n$ tale che

$$Ax = b$$

SL 1. Se $\det A \neq 0$, per ogni b esiste una ed una sola soluzione: A è invertibile, e l'equazione omogenea associata ha solo la soluzione nulla.

SL 2. Se $\det A = 0$, l'equazione omogenea associata ammette un sottospazio non banale di soluzioni, e l'equazione $Ax = b$ ammette soluzione (non unica) se il rango della matrice completa è uguale al rango di A (Rouché-Capelli). Questa affermazione é infatti equivalente al fatto che b è combinazione lineare delle colonne di A, cioè che b è nel $\mathrm{Range}\, A$

La nozione di determinate e di rango di una matrice non si esportano facilmente al caso infinito-dimensionale, ma i risultati precedenti possono essere riscritti in termini più adatti al caso infinito dimensionale.
Premetto un'osservazione valida in generale negli spazi di Hilbert.

7.10 $(\mathbf{Range}\, A)^{\perp} = \mathbf{Ker}\, A^*$

Sia $y \in \mathrm{Range}\, A$, dunque esiste z tale che $y = Az$;

$$\begin{gathered}(y, x) = 0 \ \forall y \in \mathrm{Range}\, A \iff (Az, x) = 0 \ \forall z \\ \iff (z, A^*x) = 0 \ \forall z \iff x \in \mathrm{Ker}\, A^*\end{gathered}$$

Dunque

$$(\mathrm{Range}\, A)^{\perp} = \mathrm{Ker}\, A.$$

La stessa conclusione vale scambiando A e A^*
Da questo fatto, in dimensione finita, se A è un operatore da $\mathbb{C}^n$ in sé:

$$\mathbb{C}^n = \mathrm{Range}\, A \oplus \mathrm{Ker}\, A^* = \mathrm{Range}\, A^* \oplus \mathrm{Ker}\, A \tag{3}$$

inoltre, poiché il rango di una matrice è il massimo numero di colonne linearmente indipendenti, e anche il massimo numero di righe linearmente indipendenti,

$$\dim\ \mathrm{Range}\, A = \ \dim\ \mathrm{Range}\, A^*$$

da cui, usando la doppia decomposizione di $\mathbb{C}^n$ fatta sopra, si ottiene

$$\dim\ \mathrm{Ker}\, A = \ \dim\ \mathrm{Ker}\, A^*$$

Il teorema di Rouché Capelli si può dunque riformulare così: $Ax = b$ ha soluzione se e solo se b è nell'immagine di A, cioè se e solo se b è ortogonale al nucleo di A^*. Se $\mathrm{Ker}\, A$ è banale, allora lo è anche quello di A^* (perché hanno la stessa dimensione) e dunque per qualunque b il sistema ha soluzione.
Riassumendo, in dimensione finita

df 1. $\mathbb{C}^n = \mathrm{Range}\, A \oplus \mathrm{Ker}\, A^*$

df 2. $\mathbb{C}^n = \mathrm{Range}\, A^* \oplus \mathrm{Ker}\, A$

df 3. $\dim \mathrm{Ker}\, A = \dim \mathrm{Ker}\, A^*$

Da questi fatti segue che A è invertibile se e solo se $\mathrm{Ker}\, A \neq \{0\}$, infatti vale la seguente catena di equivalenze:

- A è suriettivo se e solo se $\mathrm{Range}\, A = \mathbb{C}^n$
- $\mathrm{Range}\, A = \mathbb{C}^n$ se e solo se $\mathrm{Ker}\, A^*$ è banale (per **df. 2**)

- $\operatorname{Ker} A^*$ è banale se e solo se $\operatorname{Ker} A$ è banale (per **df. 3**
- $\operatorname{Ker} A$ è banale se e solo se A è iniettivo.

Inoltre **df. 2** afferma che $Ax = b$ ha soluzione se e solo se b è ortogonale a $\operatorname{Ker} A^*$, e la soluzione non è unica se i kernel non sono banali.

In dimensione infinita risultati di questo tipo (che sono veri solo per opportune classi di operatori) si chiamano **teoremi dell'alternativa**, perché affermano che o $Ax = b$ ha soluzione per ogni b, o ha soluzione solo se b è ortogonale al nucleo di A^*.

7.11 Dimensione infinita

Considera l'operatore S di shift nell'esempio 7.8 e verifica che anche in questo caso

$$l_2 = \operatorname{Range} S^* \oplus \operatorname{Ker} S = \operatorname{Range} S \oplus \operatorname{Ker} S^*$$

Però S ha nucleo banale dunque è iniettivo, ma non è invertibile. Inoltre S^* ha nucleo non banale, dunque in dimensione infinita non vale l'uguaglianza delle dimensioni dei nuclei di un operatore e del suo aggiunto, e nemmeno quella tra le dimensioni delle immagini.

Sia ora $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ l'operatore di moltiplicazione

$$Bf(x) = \frac{1}{1+x^2} f(x)$$

B è autoaggiunto, dunque $\operatorname{Ker} B$ e $\operatorname{Ker} B^*$ hanno la stessa dimensione, che è zero infatti B è iniettivo. Però B non è suriettivo, infatti mostra che

$$1/(1+|x|) \in L^2(\mathbb{R})$$

ma la soluzione di

$$\frac{1}{1+x^2} f(x) = \frac{1}{1+|x|} \quad \text{è} \quad f(x) = \frac{1+x^2}{1+|x|} \notin L^2(\mathbb{R})$$

Dunque in questo caso

$$L^2(\mathbb{R}) \neq \operatorname{Range} B \oplus \operatorname{Ker} B^*$$

Quello che accade è che $\operatorname{Range} B$ non è chiuso; nota che $\operatorname{Range} B$ contiene tutte le funzioni continue a supporto compatto (che è un sottospazio invariante per B), e quindi è denso il $L^2(\mathbb{R})$.

Anche in dimensione infinita vale che i vettori dell'immagine di A^* sono ortogonali ai vettori del nucleo di A, però non è detto che l'immagine di un operatore sia un sottospazio chiuso, mentre il kernel lo è essendo la controimmagine di un punto mediante un operatore continuo. Dunque

$$(\operatorname{Range} A)^{\perp} = \operatorname{Ker} A$$

e

$$H = \overline{\operatorname{Range} A}^{\perp} \oplus \operatorname{Ker} A^* = \overline{\operatorname{Range} A^*}^{\perp} \oplus \operatorname{Ker} A$$

Quindi si può sperare di riprodurre i risultati finito dimensionali solo per classi di operatori che abbiano l'immagine chiusa e per cui l'invertibilità coincida con la banalità del nucleo.

In dimensione infinita gli operatori che più somigliano a quelli dei casi finito dimensionali sono gli **operatori di rango finito**.
Per definizione T è di rango finito se e solo se la dimensione del $\operatorname{Range} T$ è finita. In particolare questo implica che il $\operatorname{Range} T$ è un sottospazio chiuso, essendo finito dimensionale.

Prima di studiarli, premetto una definizione. Dati due vettori a e b, indico con $a \otimes b$ il loro **prodotto tensoriale**[1] come l'operatore in $\mathcal{L}(H)$ definito da

$$a \otimes b\, f = a(b, f)$$

Nota che la matrice associata a $a \otimes b$ è la matrice che si ottiene moltiplicando il vettore colonna di a per il vettore riga b coniugato, cioè $(a \otimes b)_{ij} = a_i \overline{b_j}$.
La sua norma operatoriale è $\|a\| \, \|b\|$ (esercizio) e il suo aggiunto è

$$(a \otimes b)^* = b \otimes a.$$

Infatti

$$((a \otimes b)^* y, x) = (y, a \otimes b\, x) = (y, a(b, x)) = (b, x)(y, a) = (b\overline{(y, a)}, x) = (b(a, y), x) = (b \otimes a\, y, x)$$

Verifica per esercizio che se $\{e_k\}_{k=1}^n$ è una base ortonormale per un sottospazio finito M, allora

$$\sum_{k=1}^n e_k \otimes e_k \text{ è il proiettore su } M$$

7.12 Operatori di rango finito

Sia T è un operatore di rango finito, e sia $\{p_i\}_{i=1}^n$ una base per $\operatorname{Range} T$. Per ogni f si può decomporre Tf nella base per $\operatorname{Range} T$:

$$Tf = \sum_{i=1}^n (p_i, Tf) p_i = \sum_{i=1}^n (T^* p_i, f) p_i = \sum_{i=1}^n (q_i, f) p_i$$

dove $q_i = T^* p_i$. Usando la definizione di prodotto tensore,

$$T = \sum_{i=1}^n p_i \otimes q_i$$

da cui

$$T^* = \sum_{i=1}^n q_i \otimes p_i$$

Ne segue che l'immagine di T^* è lo span dei vettori q_i dunque anche T^* è di rango finito.
Per esercizio, mostra che se q_n è combinazione linearmente di $q_1, \dots q_{n-1}$, allora $\operatorname{Range} T$ ha dimensione inferiore a n, contro l'ipotesi che $\{p_i\}_{i=1}^n$ sia una sua base.

$\operatorname{Ker} T$ ha dimensione infinita e dunque T non è un operatore invertibile, inoltre $\operatorname{Range} T^*$ è chiuso (perché di dimensione finita) dunque

$$H = \operatorname{Ker} T^* \oplus \operatorname{Range} T$$

e $Tx = b$ ha soluzione (non unica) se e solo se b è ortogonale al nucleo di T^*
In pratica gli operatori di rango finito sono degli operatori finito dimensionali, immersi in uno spazio infinito dimensionale... quindi la teoria delle equazioni lineari per questi operatori

[1] Non è veramente il prodotto tensoriale di a e b, perché, per come è definito, $a \otimes b$ è una forma bilineare su $H' \times H$, mentre il prodotto tensore è definibile, per esempio, come forma bilineare su $H' \times H'$, vedi [RS]. Nel caso di H reale la differenza non si nota.

è banale. Più significativo è il caso di perturbazioni di rango finito dell'operatore identità, cioè lo studio di $\mathbf{I} - T$. La soluzione di equazioni del tipo

$$(\mathbf{I} - T)x = b$$

è infatti interessante perché coincide con lo studio dell'invertibilità di operatori del tipo $\lambda \mathbf{I} - T$, cioè con il **problema agli autovalori** per T, che studieremo in seguito.

7.13 $\mathbf{I} - T$ con T di rango finito

Sia T un operatore di rango finito dato da

$$T = \sum_{i=1}^{n} p_i \otimes q_i$$

Sia M il sottospazio finito (e dunque chiuso) generato dai vettori p_i e q_i, con $i \in 1, \dots n$. Poiché M è chiuso

$$H = M \oplus M^{\perp}$$

Per definizione di M:

$$\operatorname{Range} T \subset M, \quad \operatorname{Range} T^* \subset M \text{ da cui } M^{\perp} \subset \operatorname{Ker} T^*, \quad M^{\perp} \subset \operatorname{Ker} T$$

Poiché H si decompone in somma diretta di M e $M^{\perp}$, posso scrivere i suoi elementi $z \in M$ come coppie di vettori $\binom{z_M}{z_\perp}$ con $z_m \in M$ e $z_\perp \in M^{\perp}$, oppure come $z = z_m + z_\perp$ a seconda della convenienza.
Per quanto affermato sopra:

- $$(\mathbf{I} - T)\begin{pmatrix} x_M \\ x_\perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - T)x_m \\ x_\perp \end{pmatrix}$$

  $$(\mathbf{I} - T^*)\begin{pmatrix} x_M \\ x_\perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - T^*)x_m \\ x_\perp \end{pmatrix}$$

  cioè $\mathbf{I} - T$ e $\mathbf{I} - T^*$ portano M in sé e coincidono con l'identità su $M^{\perp}$. Inoltre su M sono uno l'aggiunto dell'altro (con abuso di notazione indico gli operatori e la loro restrizione a M nello stesso modo).

- $$\operatorname{Ker}(\mathbf{I} - T) = \begin{pmatrix} \operatorname{Ker}(\mathbf{I} - T) \\ 0 \end{pmatrix}$$

  $$\operatorname{Ker}(\mathbf{I} - T^*) = \begin{pmatrix} \operatorname{Ker}(\mathbf{I} - T^*) \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Poiché M ha dimensione finita, i due kernel hanno la stessa dimensione in M e in tutto H e tale dimensione è finita.

- $$\operatorname{Range}(\mathbf{I} - T) = \begin{pmatrix} \operatorname{Range}(\mathbf{I} - T) \\ M^{\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\operatorname{Ker}(\mathbf{I} - T^*))^{\perp} \\ \{0\}^{\perp} \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}(\mathbf{I} - T^*)^{\perp}$$

  (attenzione, l'ultima identità non è un fatto generale).

In definitiva, per $\mathbf{I} - T$ valgono gli stessi risultati del caso finito dimensionale, e $\dim \operatorname{Ker}(\mathbf{I} - T)$ è finito.

Un'osservazione finale: se $\operatorname{Ker}(\mathbf{I} - T)$ è banale, esiste l'inverso che è un operatore limitato. Nel caso in cui il kernel non sia banale, e l'equazione $(\mathbf{I} - T)x = b$ abbia soluzione, la soluzione è della forma $x = x_0 + x_1$, con $x_0 \in \operatorname{Ker}(\mathbf{I} - T)$ soluzione qualunque dell'omogenea, e x_1 unica soluzione di

$$(\mathbf{I} - T)x_1 = b \quad \text{con } x_1 \in (\operatorname{Ker}(\mathbf{I} - T))^{\perp}$$

La soluzione in x_1 è unica perché $\mathbf{I} - T$ ristretto all'ortogonale al suo kernel è anche iniettivo oltre a essere suriettivo, dunque è invertibile e l'inverso è continuo. In particolare esiste C tale che $\|x_1\| \leq C\|b\|$. Una stima di questo tipo, cioè che a meno della soluzione dell'omogenea, la soluzione dell'equazione è ottenuta da b mediante un operatore limitato, sarà vera tutte le volte che potremo dimostrare un teorema dell'alternativa.

7.14 Equazioni integrali di Fredholm

Considero $L^2(\Omega)$ e sia $k(x, y)$ un **nucleo integrale** assegnato e sia g una funzione data. L'equazione

$$f(x) - \int_{\Omega} k(x, y) f(y) \, \mathrm{d}y = g(x)$$

è detta equazione integrale di Fredholm. Sia

$$Kf(x) = \int_{\Omega} k(x, y) f(y)$$

Verifica che

$$K^* f(x) = \int_{\Omega} k(y, x) f(y)$$

Il nucleo k è **separabile** se

$$k(x, y) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x) q_i(y)$$

con p_i e q_i in $L^2(\Omega)$. In tal caso

$$Kf(x) = \sum_{i=1}^{n} (q_i, f) p_i(x)$$

è di rango finito, quindi per l'equazione

$$(\mathbf{I} - K)f = g$$

valgono le conclusioni descritte prima.

Nella dimostrazione del teorema dell'alternativa per gli operatori di rango finito, abbiamo proiettato su M che contiene il range di K e di K^*. nella pratica si procede esplicitamente, limitandosi a proiettare sul range di K^*. Come esempio userò operatori integrali a nucleo separabile, ma la teoria è del tutto generale.

7.15 Nuclei separabili - versione astratta

Trasforma esplicitamente il problema di trovare soluzioni all'equazione di Fredholm $f - Kf = b$ per un nucleo separabile in un problema finito dimensionale. Sia k un nucleo separabile, e K l'operatore associato:

$$Kf(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x) \int_{\Omega} q_i(y) f(y) \, \mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{n} p_i(x)(q_i, f)$$

Siano $A_{ij} = \int_\Omega q_i(x)p_j(x)\,\mathrm{d}x$. Moltiplica scalarmente l'equazione per q_i:

$$(q_i, f) - \sum_{j=1}^{n}(q_i, p_j)(q_j, f) = (q_i, b)$$

Indica con $f_i = (q_i, f)$ e $b_i = (q_i, b)$. Si ottiene il sistema

$$f_i - \sum_{j=1}^{n} A_{ij} f_j = b_i \quad ß = 1 \dots n$$

Se la matrice $\mathbf{I} - A$ è invertibile, il sistema ha sempre soluzione, e la soluzione del sistema originario è

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j p_j(x) + b(x)$$

(riconosci che sull'ortogonale ai p_j la funzione f coincide con b). Se la matrice non è invertibile, il sistema ha soluzione se e solo il vettore $(b_1, \dots b_n)$ è ortogonale al nucleo della matrice $\mathbf{I} - A^*$. Considera l'equazione aggiunta

$$g(x) - \sum_{j=1}^{n} q_j(x) \int_\Omega p_j(y)g(y) = 0$$

e moltiplicala scalarmente per p_j indicando con $g_i = (p_i, g)$. Ottieni l'equazione omogenea aggiunta

$$g_i - \sum_{j=1}^{n} A_{ji} g_j = 0$$

Se questo sistema lineare ha soluzioni non banali, il kernel di $\mathbf{I} - K^*$ è dato dalle funzioni g tali che

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i q_i(x)$$

La condizione di ortogonalità di un vettore b a queste soluzioni è

$$(b, g) = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} g_i(q_i, b) = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} g_i b_i = 0$$

cioè esattamente l'ortogonalità del vettore $(b_1, \dots b_n)$ ai vettori $(g_1, \dots g_n)$ nel nucleo della matrice $\mathbf{I} - A^*$.

7.16 Un esempio

Mostra che l'equazione

$$f(x) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} xy^3 f(y)\,\mathrm{d}y = g(x)$$

ha sempre soluzione, e determinala. Sia ha

$$f(x) - \frac{x}{2}\int_{-1}^{1} y^3 f(y)\,\mathrm{d}y = g(x)$$

dunque se fosse noto il valore di

$$C_f = \int_{-1}^{1} y^3 f(y)$$

la soluzione sarebbe semplicemente

$$f(x) = g(x) + \frac{1}{2}C_f x$$

Moltiplicando per x^3 l'equazione e integrando, si ottiene un equazione per C_f:

$$\int_{-1}^{1} x^3 f(x)\,\mathrm{d}x - C_f \int_{-1}^{1} \frac{x^4}{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^3 g(x)\,\mathrm{d}x$$

Cioè

$$C_f - \frac{1}{5}C_f = \int_{-1}^{1} x^3 g(x)\,\mathrm{d}x$$

che ha sempre soluzione:

$$C_f = \frac{5}{4}\int_{-1}^{1} x^3 g(x)\,\mathrm{d}x$$

Dunque l'equazione di partenza è sempre risolubile. Noto infine che le soluzioni dell'omogenea si ottengono per $g = 0$ e sia ha $C_f = 0$ e dunque $f = 0$, cioè il nucleo è banale.

Sia ora

$$f(x) - \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} xy^3 f(y)\,\mathrm{d}y = g(x)$$

Mostra che ha soluzione se $g(x) = x^2$, ma non se $g(x) = x$. Infatti, procedendo come sopra, definisco

$$C_f = \int_{-1}^{1} y^3 f(y)\,\mathrm{d}y$$

moltiplico l'equazione per x^3 e integro, ottenendo

$$C_f - C_f = \int_{-1}^{1} x^3 g(x)\,\mathrm{d}x$$

che non ha soluzione se $\int_{-1}^{1} x^3 g(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$, e in tal caso l'equazione di partenza non ha soluzione. Invece, se $\int_{-1}^{1} x^3 g(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$, l'equazione per C_f è risolta da qualunque C_f dunque la soluzione è data da

$$f(x) = c\frac{5}{2}x + g(x)$$

Nota che $\{cx\}_{c\in\mathbb{R}}$ è il sottospazio delle soluzioni dell'omogenea, mentre $\{cx^3\}_{c\in\mathbb{R}}$ è il sottospazio delle soluzioni dell'omogenea del problema aggiunto.

Esercizio 3. Equazioni integrali

Risolvi le seguenti equazioni integrali con nucleo separabile simmetrico con $f, g \in L^2([0, 2\pi]; \mathbb{R})$

$$f(x) - \int_{0}^{2\pi} \cos(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y = \sin x$$

$$\pi f(x) - \int_{0}^{2\pi} \cos(x+y) f(y)\,\mathrm{d}y = \cos x$$

$$\pi f(x) - \int_{0}^{2\pi} \cos(x+y) f(y)\,\mathrm{d}y = \sin x$$

$$f(x) - \int_{0}^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(x-y)} f(y)\,\mathrm{d}y = g(x)$$

(qui considera f e g a valori complessi, e risolvi per ogni λ reale)

Esercizio 4. Autovettori di $a \otimes b$
Siano $a, b \in H$ non nulli, trova autovalori e autovettori di $a \otimes b$, trova anche autovettori e autovalori dell'aggiunto, mostrando che gli autovalori sono gli stessi (ma in generale non gli autovettori).

8 Serie di Neumann

Estendiamo la teoria fatta per $I - T$ con T di rango finito. La teoria di questa estensione è iniziata con lo sviluppo in serie di polinomi dei nuclei integrali regolari, che evidentemente dà un'approssimazione di rango finito all'operatore integrale. Qui presento direttamente la versione astratta dei risultati.

8.1 Operatori piccoli e serie di Neumann

In dimensione finita, se A è una matrice invertibile e B una matrice qualunque, per continuità del determinante,

$$\text{se } |\varepsilon| \text{ è suff. piccolo, allora } \det(A - \varepsilon B) \neq 0$$

e dunque $A - \varepsilon B$ è invertibile. L'uso della norma operatoriale permette di chiarire meglio il valore di ε. Consideriamo per semplicità $A = \mathbf{I}$. Ricordando che

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k \in \mathbb{N}} x^k$$

vorremmo provare che

$$(\mathbf{I} - B)^{-1} = \sum_{k \in \mathbb{N}} B^k$$

La serie a destra (detta serie di Neumann) è totalmente limitata se $\|B\| < 1$ infatti

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \|B^k\| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \|B\|^k = \frac{1}{1 - \|B\|}$$

dunque converge in norma ad operatore limitato. Per la convergenza totale, possiamo moltiplicare a sinistra termine a termine per $I - B$ e ottenere

$$(\mathbf{I} - B) \sum_{k \in \mathbb{N}} B^k = \sum_{k \in \mathbb{N}} (B^k - B^{k+1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} B^k - \sum_{k=1}^{+\infty} B^k = B^0 = \mathbf{I}$$

e, poiché B commuta con tutte le sue potenze, lo stesso si ottiene moltiplicando a destra. Dunque la serie di Neumann effettivamente definisce l'inverso di $\mathbf{I} - B$.

Dimostra per esercizio che se A è invertibile e $\|B\| < 1/\|A^{-1}\|$ allora

$$(A - B)^{-1} = (\mathbf{I} - A^{-1}B)^{-1} A^{-1} = \sum_{k \in \mathbb{N}} (A^{-1}B)^k A^{-1} = A^{-1} \sum_{k \in \mathbb{N}} (BA^{-1})^k$$

e le serie convergono se $\|A^{-1}B\| < 1$, ma $\|A^{-1}B\| \leq \|A^{-1}\| \, \|B\|$. Ne segue che il sottoinsieme degli operatori invertibili è un aperto nella topologia data dalla norma operatoriale.

8.2 Equazioni integrali di Volterra

Un'equazione del tipo

$$f(x) - \int_0^x k(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y = b(x)$$

Si chiama equazione di Volterra. Nota che se vuoi trovare una soluzione dell'equazione non omogenea

$$\dot{f}(t) = a(t) f(t) + g(t)$$

integrando da 0 a t ottieni

$$f(t) - \int_0^t a(s) f(s)\,\mathrm{d}s = f(0) + \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s$$

e questa è un'equazione di Volterra. (in generale le equazioni differenziali ordinare si possono trasformare in equazioni integrali).
Nota anche che questo è un caso particolare di equazione di Fredholm.

8.3 Equazioni di Fredholm e di Volterra per nuclei continui

Considero funzioni in $\Omega = [0, \ell]$, e assumo che il nucleo sia una funzione continua e limitata $|k(x,y)| \leq M$. Indico con

$$\begin{aligned} K_F f &= \int_0^\ell k(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y \\ K_V f &= \int_0^x k(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^\ell k(x,y) \mathcal{X}\{y < x\}\, f(y)\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

E considero le due equazioni di Fredholm e Volterra corrispondenti, con μ numero reale.

$$f - \mu K_F f = b \qquad f - \mu K_V f = b$$

È facile provare che

$$|K_F f(x)| \leq M\ell \|f\|_\infty$$

e che la stessa stima vale per $K_V f$. Dunque, per $|\mu|\, M < 11$, entrambe le equazioni sono risolte dalla serie di Neumann applicata a b, sommata in L_∞. In particolare, nel caso di Fredholm, riconosci la serie di Neumann dentro la seguente espressione di f in funzione di b, ottenuta iterando l'equazione:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^n \int_{\Omega^n} k(x, y_1) k(y_1, y_2) \ldots k(y_{n-1}, y_n) b(y_n)\,\mathrm{d}y_1 \cdots$$

In realtà, l'equazione di Volterra è risolubile per ogni μ, come è facile provare. Stimiamo infatti $K_V^n b$:

$$\begin{aligned} |K_V^n b| &\leq \left| \int_0^x \mathrm{d}y_1 k(x, y_1) \int_0^{y_1} \mathrm{d}y_2 k(y_1, y_2) \ldots \int_0^{y_{n-1}} \mathrm{d}y_n k(y_{n-1}, y_n) b(y_n) \right| \leq \\ &\leq M_1^n \int_0^x \mathrm{d}y_1 \int_0^{y_1} \mathrm{d}y_2 \ldots \int_0^{y_{n-1}} |b(y_n)|)\,\mathrm{d}y_n \sqrt{l} \|b\|_{L^2} M_1^n \ell^{n-1}/(n-1)! \end{aligned}$$

dunque la serie di $\mu^n K_V^n b$ converge per qualunque μ.

8.4 Equazioni di Fredholm e di Volterra per nuclei L^2

Dimostra che se $k \in L^2((0,\ell)^2$ allora K_F e K_v sono due operatori limitati, e dunque per μ piccolo le equazioni

$$f - \mu K_F f = b \quad \text{e} \quad f - \mu K_V f = b$$

hanno soluzione per ogni b,

Assumi che $|k(x,y)| \le p(x)q(y)$ con $p,q \in L^2((0,\ell)$, che puoi assumere, per comodità, più grandi di 1. Mostra iterativamente che puoi stimare $K_V^n b$ con

$$\|K_V^n b\|^2 \le \ell^{n-1}\|b\|\,\|p\|\left(\int_0^x \mathrm{d}y_1 \int_0^{y_1} \mathrm{d}y_2 \dots \int_0^{y_{n-1}} \mathrm{d}y_n q^2(y_1)p^2(y_1)\cdots q^2(y_n)p^2(y_n)\right)^{1/2}.$$

Usa il fatto che, se $\alpha(y_1 \dots y_n)$ è positiva e simmetrica per permutazioni delle variabili, allora

$$\int_0^x \mathrm{d}y_1 \int_0^{y_1} \mathrm{d}y_2 \dots \int_0^{y_{n-1}} \mathrm{d}y_n \alpha(y_1,\dots y_n) = \frac{1}{n!}\int_{[0,x]^n} \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n \alpha(y_1,\dots y_n)$$

per concludere che

$$\|K_V^n\| \le \frac{(c\ell)^{n-1}}{\sqrt{n!}}$$

e che dunque $f - \mu K_V f = b$ ha sempre soluzione.

Passo ora a piccole perturbazioni di operatori di rango finito. Premetto un'osservazione, facile da dimostrazione: sia A è un operatore di rango finito, e sia B un operatore limitato, allora

$$AB \text{ e } BA \text{ sono di rango finito.}$$

8.5 Piccole perturbazioni di operatori di rango finito

Sia K un operatore di rango finito, R un operatore con $\|R\| < 1$, $T = R + K$. Per l'operatore $I - T$ vale il teorema dell'alternativa di Fredholm.

Considero l'equazione

$$(I-T)x = b \text{ che riscrivo } (I-R)x - Kx = b$$

Chiamo $A = I - R$, che è un operatore invertibile perché R ha norma minore di 1. Inverto *a destra* l'equazione (il risultato si ottiene anche invertendo a sinistra, ma ci si intreccia un po').

$$Ax - Kx = b \iff Ax - KA^{-1}Ax = b \iff (\mathbf{I} - KA^{-1})Ax = b$$

Indico con $\tilde{K} = KA^{-1}$, che è un operatore di rango finito perché K lo è.

$$(\mathbf{I} - \tilde{K})Ax = b \text{ ha soluzione in } x \iff (\mathbf{I} - \tilde{K})y = b \text{ ha soluzione in } y$$

Posso usare la teoria svolta per gli operatori di rango finito e concludere che

prf 1. l'equazione ha soluzione per ogni b se e solo se $\operatorname{Ker}(\mathbf{I} - \tilde{K})$ è banale

prf 2. le dimensioni di $\operatorname{Ker}(\mathbf{I} - \tilde{K})$ e $\operatorname{Ker}(\mathbf{I} - \tilde{K}^*)$ sono uguali

prf 3. se i kernel hanno dimensione non nulla, l'equazione ha soluzione se e solo se b è ortogonale al $\operatorname{Ker}(\mathbf{I} - \tilde{K}^*)$.

Per completare la dimostrazione, dobbiamo riportare queste informazioni a livello dell'operatore $\mathbf{I} - T$. Cominciamo dall'ultima, ricordando che

$$\tilde{K}^* = (KA^{-1})^* = A^{*-1}K^*$$

Dunque y è nel nucleo di $I - \tilde{K}^*$ se e solo se

$$x = A^{*-1}K^*x \iff A^{*-1}A^*x = A^{*-1}K^* \iff A^{*-1}(A^* - K^*)x = 0 \iff (I - T^*)x = 0$$

perché A^* è invertibile. Dunque l'affermazione **prf 3** è equivalente a

$$b \in \text{Range}\,(I - T) \iff b \perp \text{Ker}\,(I - T^*)$$

da cui segue anche che Range $(I - T)^*$ è chiuso. Resta da provare che

$$\dim \text{Ker}\,(I - T) = \dim \text{Ker}\,(I - T^*)$$

da cui segue, usando **prf 3**, la **prf 1**. Sappiamo che

$$\dim \text{Ker}\,(I - \tilde{K}) = \dim \text{Ker}\,(I - \tilde{K}^*) = \dim \text{Ker}\,(I - T)$$

però Ker $(I - \tilde{K})$ non è uguale al Ker $(I - T)$, infatti

$$x = \tilde{K}x \iff x = KA^{-1}x = AA^{-1}x = KA^{-1}x \iff A^{-1} \in \text{Ker}\,(I - T)$$

cioè

$$\text{Ker}\,(I - \tilde{K}) = A^{-1}\text{Ker}\,(I - T)$$

Essendo A invertibile, A conserva la dimensione dei sottospazi, e dunque si ottiene che i due nuclei hanno la stessa dimensione.

Come complemento, si noti che lo stesso risultato vale per l'equazione aggiunta $(I - T^*)x = b$, dunque si ottiene che anche l'immagine di $I - T^*$ è chiusa e quindi

$$H = \text{Ker}\,(\mathbf{I} - T) \oplus \text{Range}\,(\mathbf{I} - T^*)$$

Per esercizio puoi provare a fare una istruttiva dimostrazione di questa decomposizione, partendo da

$$H = \text{Ker}\,(\mathbf{I} - \tilde{K}) \oplus \text{Range}\,(\mathbf{I} - \tilde{K}^*)$$

usando il fatto che

$$(x, y) = (A^{-1}Ax, A^*A^{*-1}y) = (AA^{-1}Ax, A^{*-1}y) = (Ax, A^{*-1}y)$$

e dunque x e y sono ortogonali se e solo se lo sono Ax e $A^{*-1}y$.

Nello studio dell'equazione delle onde e nella meccanica quantistica è essenziale studiare il problema agli autovalori

$$Tx = \lambda x \text{ cioè } (\lambda\,\mathbf{I} - T)x = 0$$

Il risultato perturbativo precedente si può applicare a questa equazione solo se la perturbazione R ha norma più piccola di λ. Dunque se vogliamo usare il teorema dell'alternativa per studiare il problema agli autovalori per ogni λ, dobbiamo considerare operatori che sono di rango finito a meno di una perturbazione arbitrariamente piccola. Dobbiamo cioè identificare quali sono gli operatori che sono limite di operatori di rango finito, che risultano essere un sottospazio più largo dei soli operatori di rango finito.
Per farlo però è necessario occuparsi della "compattezza debole" negli spazi di Hilbert.

9 Convergenza debole

L'estensione dei teoremi dell'alternativa a una classe di operatori più ampia di quella degli operatori di rango finito è un argomento ha a che fare con la compattezza in spazi di Hilbert. Osservo innanzi tutto che i chiusi e limitati in spazi di Hilbert infinito dimensionali non sono compatti. L'esempio più semplice è quello costituito dalla successione di una base

ortonormale: sono tutti vettori di norma 1, ma sono a due a due ortogonali, dunque $\|e_k - e_h\| = \sqrt{2}$ e la successione non può convergere.
D'altra parte, se K è un operatore di rango finito, l'immagine mediante K di un insieme limitato è un limitato in un sottospazio finito dimensione e dunque è precompatto. Mostrerò che questa è esattamente la proprietà conservata da operatori che sono limite di operatori di rango finito.

Però è più semplice formulare questa parte di teoria in termini di successioni **debolmente convergenti**: in termini fisici, si sposta lo sguardo dalla successione agli osservabili, cioè ai prodotti scalari con altri vettori.

9.1 Definizione di convergenza debole

La successione f_n converge debolmente a f e si indica con

$$f_n \rightharpoonup f, \iff \forall g \in H \ (g, f_n) \to (g, f)$$

Non è difficile provare che il limite debole è unico, e che se $f_n \to f$ in norma, allora $f_n \rightharpoonup f$. Inoltre in spazi di dimensione finita $f_n \rightharpoonup f$ se e sole se $f_n \to f$ in norma (lo si dimostri per esercizio). In dimensione infinita l'equivalenza è falsa, come mostra questo esempio.
Sia $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormale infinito, allora

$$e_n \rightharpoonup 0$$

infatti,

$$(e_n, g) = \hat{g}_n \to 0 \text{ perché } \sum_n |\hat{g}_n|^2 \leq \|g\|^2$$

per la disuguaglianza di Bessel. D'altra parte $\|e_n\| = 1$, dunque e_n non converge a 0 in norma. Chiamerò spesso **convergenza forte** la convergenza in norma.

In analisi funzionale e nelle applicazioni la convergenza debole è utilissima perché i limitati di uno spazio di Hilbert sono **debolmente precompatti** per successioni (chi è più esperto di analisi funzionale, può confrontare questo risultato con la compattezza $*-$debole dei limitati in uno spazio di Banach, separabile e non.)

9.2 Compattezza debole dei limitati

Sia data una successione $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ limitata, cioè $\|f^n\| \leq C$ uniformemente in n. Allora esiste una sottosuccessione debolmente convergente.
La prova è semplice se si utilizza la decomposizione in una base. Infatti, se e_k sono i vettori di una base, per ogni k fissato la successione $n \to (e_k, f^n)$ è limitata. In particolare lo è (e_0, f^n), da cui dunque posso estrarre una sottosequenza che converge a un numero z_0. Procedendo estraendo da questa sottosuccessione un'opportuna sottosuccessione (che indico ancora con f^n), ottengo anche la convergenza di $(e_1, f^n) \to z_1$. Usando il consueto argomento diagonale, trovo un'unica sottosequenza tale che, per ogni k

$$\lim_{n\to+\infty}(e_k, f^n) \to z_k$$

Sia ora g nello span di $e_0, \ldots e_m$:

$$(g, f^n) \to \sum_{k=0}^{m} \overline{\hat{g}_k}\, z_k$$

inoltre

$$\left|\sum_{k=0}^{m} \overline{\hat{g}_k} z_k\right| = \lim_n |(g, f^n)| \leq C\|g\|$$

Scegliendo per g il vettore $\sum_{k=0}^{m} z_k e_k$ ottengo che

$$\sum_{k=0}^{m} |z_k|^2 \leq C$$

per ogni m; dunque $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in l_2$ e quindi $f = \sum_{k\in\mathbb{N}} z_k e_k \in H$. Dunque su ogni sottospazio finito generato da vettori della base, la successione converge debolmente a $f = \sum_k z_k e_k$ (in realtà converge in norma, perché in spazi finito dimensionali la convergenza debole coincide con quella in norma). Sia ora $g \in H$ e sia m tale che $\|g - P_m g\| < \varepsilon$, dove P_m è il proiettore su $\text{span}\{e_k\}_{k=0}^{m}$:

$$|(g, f^n) - (g, f)| \leq |(g - P_m g, f^n - f)| + |(P_m g, f^n - f)| \leq \varepsilon(\|f^n\| + \|f\|) + |(P_m g, f^n - f)|$$

ma $\|f^n\|$ è limitata da C e il secondo termine a m fissato converge a 0 in n. Dunque

$$(g, f^n) \to (g, f).$$

9.3 Limitatezza delle successioni debolmente convergenti

È un po' più complicato provare che le successioni debolmente convergenti sono limitate, mentre è facile provare che

$$\text{se } f^n \rightharpoonup f \text{ allora } \|f\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f^n\|$$

Infatti

$$\|f\|^2 = \lim_{n\to+\infty} (f^n, f) \leq \|f\| \liminf_{n\to+\infty} \|f^n\|.$$

e dividendo per $\|f\|$ si ottiene la tesi.
Che $\|f^n\|$ sia una successione limitata è un'altra conseguenza del Lemma di Baire, e non verrà qui dimostrato.

9.4 Convergenza debole su sottospazi densi

Sia f^n limitata e supponiamo che

$$(g, f^n)\ to(g, f)$$

per $g \in W$, con W sottospazio denso di H. Allora $f^n \rightharpoonup f$.
Infatti, sia $g \in H$. Poiché W è denso, dato ε esiste $g_\varepsilon \in W$ tale che $\|g - g_\varepsilon\| < \varepsilon$. Dunque

$$|(g, f^n) - (g, f)| \leq |(g - g_\varepsilon, f^n)| + |(g_\varepsilon, f^n - f)| \leq C\varepsilon + |(g_\varepsilon, f^n - f)|$$

e il secondo membro tende a 0 in n a ε fissato. Dunque $(g, f^n) \to (g, f)$.

9.5 Convergenza debole e basi ortonormali

Sia data una base ortonormale $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$; usando le conclusioni del punto precedente, prova che $f^n \rightharpoonup f$ se e solo f^n è limitata e

$$\hat{f}_k^n \to \hat{f}_k \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}.$$

In pratica, la convergenza debole è equivalente alla convergenza puntuale dei coefficienti di Fourier, assunta la limitatezza.

Come controesempio a questa equivalenza nel caso di non limitatezza della successione, considera

$$f^n = \sum_{i=n+1}^{2n} e_i.$$

Prova che per ogni e_k vale $(e_k, f^n) \to 0$, d'altra parte calcola $\|f^n\|$ e mostra che diverge. Trova $g \in H$ tale che (g, f^n) non tende a 0.

9.6 (convergenza debole, convergenza forte)

Se $f^n \rightharpoonup f$ e $g^n \to g$ in norma, allora

$$(f^n, g^n) \to (f, g)$$

Infatti

$$|(f^n, g^n) - (f, g)| \leq |(f^n, g^n - g)| + |(f^n - f, g)| \leq \|f^n\| \, \|g^n - g\| + |(f^n - f, g)|$$

Il primo termine tende a 0 perché $g^n \to g$ in norma e $\|f^n\|$ è limitata, il secondo tende a 0 perché $f^n \rightharpoonup f$.
Notare che se $f^n \rightharpoonup f$ e $g^n \rightharpoonup g$ non è in generale vero che $(f^n, g^n) \to (f, g)$. Per esempio $e_n \rightharpoonup 0$, ma $(e_n, e_n) = 1$

9.7 Convergenza debole per oscillazione

Analogamente al caso $l_2(\mathbb{N})$, in $l_2(\mathbb{Z})$ $e_k \rightharpoonup 0$ per $k \to \pm\infty$. Usando l'isometria tra $L^2((-\pi, \pi), \mathbb{C})$ e $l_2(\mathbb{Z})$, si ottiene che la successione $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ converge debolmente a 0 per $k \to \pm\infty$. Questa asserzione è evidentemente un caso particolare del Lemma di Rienmann-Lebesgue, perché equivale a

$$\lim_{k \to \pm\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}x = 0$$

per $f \in L^2((-\pi, \pi), \mathbb{C})$ (che implica $f \in L^1((-\pi, \pi), \mathbb{C})$).

9.8 Convergenza debole per concentrazione

Sia g positiva a supporto in $(-M, M)$ e di integrale 1. Come noto,

$$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} g(\frac{x}{\varepsilon}) \to \delta(x)$$

nel senso delle distribuzioni; sia $f_\varepsilon = \sqrt{g_\varepsilon}$. Ovviamente $\|f_\varepsilon\|_{L^2} = 1$, mentre

$$f_\varepsilon \rightharpoonup 0 \text{ per } \varepsilon \to 0$$

infatti se h è una funzione limitata,

$$(h, f_\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}} h(x) \sqrt{g(x/\varepsilon)} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\varepsilon} \int_{-M}^{M} h(\varepsilon x) \sqrt{g(x)} \, \mathrm{d}x$$

che tende a 0. Estendere a $h \in L^2(\mathbb{R})$.

9.9 Convergenza debole per traslazione all'infinito

Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$, e sia $f_n(x) = f(x - n)$ la sua traslazione a destra di n, che ne conserva la norma L^2. È facile mostrare che $f_n \rightharpoonup 0$. Sia infatti $g \in L^2(\mathbb{R})$. Poiché anche f è il $L^2(\mathbb{R})$, dato $\varepsilon > 0$ esiste M tale che

$$\int_{|x|>M} f^2 < \varepsilon \text{ e } \int_{|x|>M} g^2 < \varepsilon$$

Sia ora $n > 2M$

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)| \, |f(x-n)| \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{n/2} |g(x)| \, |f(x-n)| + \int_{n/2}^{+\infty} |g(x)| \, |f(x-n)|$$

Usando Cauchy-Schwartz, il primo termine risulta minore di $\|g\|_{L^2(\mathbb{R})}\|f\|_{L^2((-\infty,-n/2))}$, il secondo di $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}\|g\|_{L^2((n/2,+\infty))}$, entrambi stimati da costante per ε perché $n/2 > M$.
In pratica, la norma di $f_n(x) = f(x-n)$ si sposta verso $+\infty$, e dunque, integrando f_n contro una funzione g di L^2 che ha norma concentrata al finito, si ottiene una quantità evanescente.

9.10 Convergenza debole in trasformata di Fourier

L'isometria data dalla trasformata di Fourier trasforma la convergenza debole per oscillazione (cioè Rienmann-Lebesgue, *vedi* 6.4) in convergenza debole per traslazione all'infinito e viceversa. Infatti, se $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu x} f(x)\right)(\lambda) = \hat{f}(\lambda - \mu).$$

Usando l'esempio precedente e che $\mathcal{F}$, essendo un'isometria, porta successioni debolmente convergenti in successioni debolmente convergenti, se ne deduce che, per ogni $g \in L^2(\mathbb{R})$;

$$\lim_{\mu\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu x} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Nota che $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ implica che il prodotto è in $L^1(\mathbb{R})$.

Può essere utile rivedere alcuni degli esempi precedenti in termini di convergenza forte e debole di operatori.

9.11 Definizione di convergenza forte e debole per operatori

Data la successione $T_n \in \mathcal{L}(H)$ e $T \in \mathcal{L}(H)$

- T_n converge in norma a T se $\|T_n - T\| \to 0$
- T_n converge **fortemente** a T se, per ogni $x \in H$, $T_n x$ converge in norma a Tx, cioè $\|T_n x - Tx\| \to 0$
- T_n converge **debolmente** a T se $T_n x \rightharpoonup T$ cioè per ogni $y \in H$ $(y, T_n x) \to (y, Tx)$

Osserva che T_n converge debolmente a T se e solo se, per ogni $f \in H$, la successione $T_n f$ converge debolmente a Tf.

9.12 Convergenza forte di sequenze di proettori

Data una base, sia P_n il proiettore su $\operatorname{span}\{e_k\}_{k\leq n}$ La successione P_n converge fortemente all'identità, infatti dato x

$$\|x - P_n x\|^2 = \sum_{k<n} |\hat{x}_k|^2 \to 0$$

perchè è il resto di una serie convergente (la serie è convergente per la disuguaglianza di Bessel). Equivalentemente, $\mathbf{I} - P_n$, che è il proiettore ortogonale su $\operatorname{span}\{e_k\}_{k\geq n+1}$, converge fortemente a 0. D'altra parte $\mathbf{I} - P_n$ è il proiettore sull'ortogonale, dunque ha norma 1 e la convergenza non vale in norma.

Questa analisi permette di scrivere l'identità

$$\mathbf{I} = \sum_{k\in\mathbb{N}} e_k \otimes e_k$$

valida se $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale completo, dove la serie converge fortemente ma non in norma.

9.13 Operatori di traslazione

Sia $S_\mu \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ definito da

$$S_\mu f(x) = f(x - \mu)$$

Alla luce dell'esempio 9.9 è immediato verificare che S_μ tende debolmente a 0 per $\mu \to +\infty$ e mostriamo che nel limite $\mu \to +\infty$, tende debolmente a 0.

Usando l'isometria data dalla trasformata di Fourier, si ottiene che anche l'operatore di moltiplicazione

$$f \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu x} f(x)$$

tende debolmente a 0.

Infine, sia $S^n \in \mathcal{L}(\ell_2)$ l'iterato n-esimo dello shift a destra di un posto, cioè lo shift a destra di n posti. Mostra per esercizio che S^n, che conserva la norma ℓ_2, tende a 0 e debolmente ma non fortemente, Considera ora il suo aggiunto S^{n*} che è lo shift a sinistra di n posti. Mostra che come operatore ha norma 1, e che tende fortemente a 0, per la disuguaglianza di Bessel.

Torniamo alla convergenza debole di successioni.

9.14 Un esempio utile in ℓ_2

Come mostrato sopra, una successione di vettori ortonormali converge debolmente a 0. Generalizziamo questo esempio. Sia $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ un sistema ortonormale, sia P_n il proiettore su $\operatorname{span}\{e_k\}_{k \leq n}$ e $P_n^\perp$ il proiettore sull'ortogonale, che è infinito-dimensionale. Sia f^n una successione limitata, cioè $\|f^n\| \leq C$, con f^n nell'ortogonale di $\operatorname{span}\{e_k\}_{k \leq n}$, cioè $P_n^\perp f_n = f_n$> Allora $f^n \rightharpoonup 0$. Infatti, l'operatore di proiezione $P_n^\perp$ converge fortemente a 0, dunque data $g \in H$, $P_n^\perp g$ converge in norma a 0, cioè $\|P_n^\perp g\| \to 0$. Quindi

$$|(g, f^n)| = |(P_n^\perp g, f^n)| \leq \|P_n^\perp g\| \, \|f^n\| \to 0$$

infatti la prima uguaglianza vale perché $P_n^\perp f^n = f^n$, la seconda perché $\|f^n\|$ è limitata.

10 Operatori compatti

Torniamo ai teoremi dell'alternativa.

10.1 Definizione di operatore compatto

Definizione: T è un **operatore compatto** se e solo se porta insiemi limitati in insiemi precompatti. Prova che T è compatto se e solo se $f_n \rightharpoonup f$ implica $Tf_n \to Tf$, cioè $\|Tf_n - Tf\| \to 0$.

10.2 Proprietà degli operatori compatti

oc 1. se T è compatto e B è limitato, allora TB e BT sono compatti (per esercizio).

oc 2. Gli operatori di rango finito sono compatti (per esercizio).

oc 3. Il sottospazio degli operatori compatti è chiuso, cioè se $T_n \to T$ e T_n sono compatti, allora T è compatto.

oc 4. Il sottospazio degli operatori di rango finito è denso nel sottospazio degli operatori compatti, cioè T è compatto se e solo se è limite di operatori di rango finito

Proviamo **oc 3**: sia $f_n \to f$ e sia $T_m \to T$, con T_m compatti. Per ogni n ed m:

$$\|Tf_n - Tf\| \leq \|T - T_m\| (\|f_n\| + \|f\|) + \|T_m f_n - T_m f\|$$

Per m abbastanza grande, $\|T - T_m\|$ è piccolo, e a m fissato, essendo T_m compatto, $\|T_m f_n - T_m f\| \to 0$ in n. Dunque $\|Tf_n - Tf\|$ va a zero e quindi T è compatto.

Se T_m sono operatori di rango finito, e $T_m \to T$, allora T è compatto per il punto precedente. Proviamo il viceversa, cioè che per ogni T compatto, T è limite di operatori di rango finito.
Fissiamo una base e sia P_n il proiettore su $\text{span}\{e_k\}_{k=0}^n$ e $P_n^\perp$ il proiettore sull'ortogonale. Sia $T_n = TP_n$. Per costruzione T_n è di rango finito e $T - T_n = TP_n^\perp$. Supponiamo per assurdo che $\|T - T_n\| = \|TP_n^\perp\|$ non tenda a 0, dunque passando a una sottosequenza che indico ancora con n, $\|TP_n^\perp\| \geq \ell > 0$. Quindi esiste una successione f_n di vettori di lunghezza 1 che posso prendere nell'ortogonale a $\text{span}\{e_k\}_{k=0}^n$, tali che

$$\|Tf_n\| = \|TP_n^\perp f_n\| \geq \ell$$

Ma come abbiamo dimostrato al punto 9.14, $f_n \rightharpoonup 0$, e dunque, essendo T compatto, $\|Tf_n\| \to 0$, che è assurdo.

Come abbiamo dimostrato al punto 8.5, se un $T = K + R$, K è di rango finito e R ha norma inferiore a 1, allora per T valgono i teoremi dell'alternativa. Questo è proprio il caso degli operatori compatti.

10.3 Teorema dell'alternativa per operatori compatti

Se T è compatto, per l'operatore $\lambda \mathbf{I} - T$, con $\lambda \neq 0$, valgono i teoremi dell'alternativa.
Infatti, T si può approssimare con precisione arbitraria con operatori di rango finito, dunque per $\varepsilon < |\lambda|$, esiste R_ε di norma minore di ε, e K_ε di rango finito tale che

$$\lambda \mathbf{I} - T = (\lambda \mathbf{I} - R_\varepsilon) - K_\varepsilon$$

con $(\lambda \mathbf{I} - R_\varepsilon)$ invertibile. Procedendo come nel punto 8.5 si dimostra la tesi.
Come corollario, si ottiene il risultato 8.5 anche per operatori compatti.

10.4 Piccole perturbazioni di operatori compatti

Sia K un operatore compatto, R un operatore con $\|R\| < 1$, $T = R + K$. Per l'operatore $I - T$ vale il teorema dell'alternativa di Fredholm.

Premetto agli esempi di operatori compatti, qualche osservazioni sulla compattezza in ℓ_2.

10.5 Un compatto il ℓ_2

Sia $\alpha > 0$, e sia

$$W = \{\hat{f} \in l_2 | \sum_{k \geq 0} (|1 + |k|^{2\alpha}) |\hat{f}_k|^2 \leq c < +\infty\}$$

W è un compatto di ℓ_2. Sia infatti $\hat{f}^n$ una successione in W. Per ogni k,

$$(1 + |k|^{2\alpha}) |\hat{f}_k^n|^2 < c$$

dunque per sottosequenze, $\hat{f}_k^n$ converge in n (va usato il solito argomento diagonale; continuo a indicare con $\hat{f}^n$ le varie sottosequenze); chiamo $\hat{z}$ il limite. Per il lemma di Fatou:

$$\sum_{k \geq 0} (|1 + |k|^{2\alpha}) |\hat{z}_k|^2 \leq \liminf_{n \to +\infty} \sum_{k \geq 0} (|1 + |k|^{2\alpha}) |\hat{f}_k^n| \leq c$$

e dunque $\hat{x} \in W$. Mostro che la convergenza è forte:

$$\sum_{k\geq 0} |\hat{f}_k^n - \hat{z}_k|^2 = \sum_{k=0}^{m} |\hat{f}_k^n - \hat{z}_k|^2 + \sum_{k=m+1}^{+\infty} |\hat{f}_k^n - \hat{z}_k|^2 \frac{1+|k|^{2\alpha}}{1+|k|^{2\alpha}} \leq \sum_{k=0}^{m} |\hat{f}_k^n - \hat{z}_k|^2 + \frac{2c}{1+m^{2\alpha}}$$

Scegliendo m abbastanza grande, il secondo termine può essere reso piccolo a piacere, mentre il primo, a m fissato, tende a 0.

Come applicazione, osserva che se $f \in L^2((-\pi,\pi),\mathbb{C})$ è derivabile e la derivata è in L^2, allora

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|^2)|\hat{f}_k|^2 < +\infty$$

Dunque avere derivata limitata in norma L^2 è una condizione sufficiente per la compattezza.

Generalizza questo esempio mostrando che se α_k è una successione positiva divergente, l'insieme

$$W = \{\hat{f} \in \ell_2 | \sum_{k\geq 0} (|1+\alpha_k^2)|\hat{f}_k|^2 \leq c\}$$

è compatto.

A complemento di questo esempio, dimostra che l'insieme $\{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \int (1+|x|^2)|f(x)|^2 \,\mathrm{d}x \leq c\}$ non è compatto (costruisci un controesempio con le funzioni a supporto in D compatto di $\mathbb{R}^n$, per le quali la limitatezza dell'integrale proposto non dà nessuna informazione aggiuntiva oltre alla limitatezza della norma).

10.6 Esempi di operatori compatti

Sia α_k una successione positiva divergente, e sia $T : \ell_2 \to \ell_2$

$$(T\hat{f})_k = \frac{1}{\alpha_k}\hat{f}_k$$

Mostriamo che T è compatto. Infatti se $\hat{f}^n$ è limitata in norma da c,

$$T\hat{f}^n \in \{\hat{g} \in l_2 | \quad \sum_{k\geq 0} (|1+\alpha_k^2)|\hat{g}_k|^2 < 2c^2\}$$

che è un compatto di ℓ_2, come mostrato nell'esempio precedente. Dunque da $T\hat{f}^n$ si estrae una sottosequenza fortemente convergente.

Anche gli operatori definiti da

$$(T\hat{f})_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k}\hat{f}_k \quad \text{e } (T\hat{f})_0 = 0$$

e

$$(T\hat{f})_k = \frac{1}{\alpha_k}\hat{f}_{k+1}$$

sono compatti, perché composizione di un operatore compatto e un operatore di shift, che è limitato.

10.7 Nuclei L^2

Ricordo che se $g_i(x)$ è una base per $L^2(\Omega)$ allora $g_i(x)g_j(y)$ è una base per $L^2(\Omega\times\Omega)$ (*vedi* 2.7). Sia dunque $k(x,y) \in L^2(\Omega\times\Omega)$. Per quanto detto sopra, k è il limite in L^2 di $\sum_{i,j\leq m} c_{ij} g_i(x) g_j(y)$ per opportuni c_{ij}. Dunque l'operatore associato a k è limite di operatori di rango finito (verificare per esercizio questa affermazione). Ne segue che è compatto.

10.8 Nuclei $\ell_2(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$

Analogamente, sia $k_{ij} \in \ell_2(\mathbb{N}^2)$, cioè

$$\sum_{ij} |k_{ij}|^2 < +\infty$$

Allora l'operatore

$$(K\hat{f})_i = \sum_j k_{ij} \hat{f}_j$$

è compatto, infatti se ne ottengono approssimazioni di rango finito troncando la serie, e il resto tende a zero in ℓ_2 per l'ipotesi di sommabilità dei coefficienti k_{ij}. In dettaglio, sia P_m l'operatore di proiezione sulle prime m componenti, e sia $K_m = KP_m$, cioè l'operatore che ha come elementi di matrice

$$k_{ij} \mathcal{X}\{j \leq m\}$$

Ora

$$\|K - K_m\| = \|KP_m^\perp\|$$

Dunque è sufficiente provare che se $k \in \ell_2(\mathbb{N}^2)$ allora $\|KP_m^\perp\| \to 0$, per ottenere che $K_m \to K$ in norma. Procediamo esplicitamente:

$$|(KP_m^\perp \hat{f})_i| \leq \sum_{j \geq m+1} |k_{ij}| \, |\hat{f}_j| \leq \left(\sum_{j \geq m+1} |k_{ij}|^2 \right)^{1/2} \|\hat{f}\|$$

Quadrando e sommando in i, dividendo per $\|f\|$ e passando al sup su $\|f\| = 1$:

$$\|KP_m^\perp\| \leq \sum_{j \geq m+1} \sum_{i \geq 0} |k_{ij}|^2$$

Ma la serie in j è convergente, dunque il suo resto $\sum_{j=m+1}^{+\infty}$ tende a 0 in m, e questo prova la tesi.

10.9 Nuclei singolari

Sia Ω dominio limitato di $\mathbb{R}^n$, sia $g(x, y)$ un nucleo regolare e limitato. Considera l'operatore integrale

$$Kf(x) = \int_\Omega \frac{g(x, y)}{|x - y|^\alpha} f(y) \, \mathrm{d}y$$

Mostra che il nucleo è L^2 (e dunque K è continuo e compatto) se $\alpha < n/2$.

Si può provare che K è compatto per $\alpha < n$. Cominciamo con il provare che è continuo:

$$|Kf(x)|^2 \leq \|g\|_\infty^2 \int_{\Omega \times \Omega} \frac{1}{|x - y_1|^\alpha |x - y_2|^\alpha} |f(y_1)| \, |f(y_2)| \, \mathrm{d}y_1 \, \mathrm{d}y_2.$$

Ora, poiché $ab \leq (a^2 + b^2)/2$

$$|Kf(x)|^2 \leq \|g\|_\infty^2 \int_\Omega \mathrm{d}y_1 \frac{|f(y_1)|^2}{|x - y_1|^\alpha} \int_\Omega \frac{1}{|x - y_2|^\alpha} \, \mathrm{d}y_2$$

e il secondo integrale è limitato, uniformemente in x, da

$$\int_\Omega \frac{1}{|x - y_2|^\alpha} \, \mathrm{d}y_2 \leq c(\text{diam } \Omega)^{n-\alpha}$$

con $n - \alpha > 0$ per ipotesi. Inserendo questa stima nella disuguaglianza precedente e integrando in x si ottiene la limitatezza di K.

Per provare la compattezza di K per $\alpha < n$, si procede in modo analogo, evitando accuratamente di passare al quadrato nei nuclei... Sia $M > 0$ e

$$K_M f = \int_{\{|x-y|>1/M\}\cap\Omega} \frac{g(x,y)}{|x-y|^\alpha} f(y)\,\mathrm{d}y$$

Poiché il nucleo è

$$\mathcal{X}\{|x-y| > 1/M\} \frac{g(x,y)}{|x-y|^\alpha}$$

che è limitato, e dunque in L^2, K_M è un operatore compatto. Mostriamo che tende in norma a K.

$$|(K - K_M)f(x)| \leq \|g\|_\infty \int_{\{|x-y|<1/M\}\cap\Omega} \frac{|f(y)|}{|x-y|^\alpha}\,\mathrm{d}y$$

Quadrando e usando che

$$|f(y_1)|\,|f(y_2)| \leq (|f(y_1)|^2 + |f(y_2)|^2)/2$$

ottieni

$$|(K - K_M)f(x)|^2 \leq \|g\|_\infty^2 \int_{\{|x-y_1|<1/M\}\cap\Omega} \frac{|f(y_1)|^2}{|x-y_1|^\alpha}\,\mathrm{d}y_1 \int_{|x-y_2|<1/M} \frac{\mathrm{d}y_2}{|x-y_2|^\alpha}$$

ma l'ultimo integrale è pari a costante per $1/M^{n-\alpha}$. Integrando in x ottieni

$$\|(K - K_M)f\|^2 \leq \|g\|_\infty M^{-2(n-\alpha)} \|f\|^2$$

dunque se $n > \alpha$ allora K_M converge in norma a K, che quindi è compatto.

10.10 Operatori compatti in $\ell_2(\mathbb{Z})$

Mostra che se $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k| = \|a\|_{\ell_1}$ è limitata, allora l'operatore

$$(A\hat{x})_k = \sum_{h\in\mathbb{Z}} a_{k-h}\hat{x}_h$$

è continuo (copia la dimostrazione della continuità degli operatori integrali dell'esempio 10.9).
Mostra che A non è compatto. Infatti, se $e_i = \{\delta_{ki}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sono i vettori della base canonica, $e_i \rightharpoonup 0$ per $i \to \pm\infty$. D'altra parte $(Ae_i)_k = a_{k-i}$, dunque $\|Ae_i\|^2 = \sum_k |a_k|^2 = \|a\|_{\ell_2}$ che è una costante che non può tendere a 0 per $i \to +\infty$

11 Il teorema spettrale per operatori compatti autoaggiunti

Se T è compatto, per l'equazione $(\lambda\mathbf{I} - T)x = b$ valgono i teoremi dell'alternativa. Questo fatto permette di affrontare e risolvere il problema di trovare una base di H di autovettori di T se T è compatto e autoaggiunto.
Premetto qualche definizione.

11.1 Definizione di insieme risolvente

Sia $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore limitato. Sia $\lambda \in \mathbb{C}$. Si chiama **insieme risolvente** l'insieme dei λ per i quali $\lambda\mathbf{I} - T$ è biettivo (e dunque ha inverso continuo). In tal caso l'operatore $R_\lambda(T) = (\lambda\mathbf{I} - T)^{-1}$ è detto **operatore risolvente**.

Il nome risolvente per $R_\lambda(T)$ è evidentemente dovuto al fatto che questo operatore risolve l'equazione $\lambda f - Tf = b$, per b assegnato.

11.2 Definizione di spettro

Si chiama spettro di T l'insieme

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \rho(T)$$

cioè $\lambda \in \sigma(T)$ se e solo se $\lambda \mathbf{I} - T$ non è invertibile. Posso succedere tre cose:

- $\lambda \mathbf{I} - T$ non è iniettivo; ma allora il suo nucleo è non banale, cioè l'equazione agli autovalori $Tf = \lambda f$ ha soluzioni non banali. In tal caso λ è un autovalore e f è un autovettore. L'insieme degli autovalori è detto **spettro puntuale** ed è indicato con $\sigma_p(T)$.
- $\lambda \mathbf{I} - T$ è iniettivo ma non suriettivo, Range $(\lambda \mathbf{I} - T)$ è denso in H ma $(\lambda \mathbf{I} - T)^{-1}$ (che esiste) non è limitato. In tal caso si dice che λ appartiene allo **spettro continuo** $\sigma_C(T)$.
- $\lambda \mathbf{I} - T$ è iniettivo ma non suriettivo, e Range $(\lambda \mathbf{I} - T)$ non è denso. In tal caso si dice che λ appartiene allo **spettro residuo** $\sigma_R(T)$.

11.3 Lo spettro dello shift

L'operatore $S \in \ell_\in$ di shift a destra ha uno spettro abbastanza facile da determinare. Intanto è evidente che l'equazione agli autovalori $S\hat{f} = \lambda \hat{f}$ ha solo la soluzione nulla per qualunque λ, dunque S non ha spettro puntuale. D'altra parte, se $|\lambda| > 1$ allora λ è nel risolvente, perché l'operatore si inverte mediante la serie di Neumann, infatti $\|S\| = 1$.
Considero ora l'aggiunto S^*. È facile provare che ogni λ con $|\lambda| < 1$ è nello spettro puntale: il corrispondente autovettore è $\{\lambda^k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_2$, e la serie dei quadrati è convergente. Poiché $\|S^*\| = 1$, i λ di modulo maggiore di uno sono nel risolvente. Poiché lo spettro è chiuso, ne segue che anche il bordo della palla unitaria deve essere nello spettro di S^*. Poiché lo spettro puntale di S è vuoto, il bordo della palla unitaria è lo spettro continuo di S^*.
Dunque, poiché

$$\ell_2 = \mathrm{Ker}\,(\bar{\lambda}\mathbf{I} - S^*) \oplus \overline{\mathrm{Range}\,(\lambda \mathbf{I} - S)}$$

ne segue che Range $(\lambda \mathbf{I} - S)$ non è denso in ℓ_2 se $|\lambda| < 1$, e dunque $\lambda < 1$ sono tutti valori nello spettro residuo di S.
Poiché lo spettro è chiuso, anche il bordo della palla unitaria è nello spettro, e, poiché se λ ha modulo 1 il kernel di $\bar{\lambda} - S$ è vuoto, si tratta dello spettro continuo di S.

Per esercizio, si provi a mano la non invertibilità di $\lambda - S$ e $\lambda - S^*$, nel caso $|\lambda| = 1$.

11.4 Lo spettro degli operatori di moltiplicazione

Sia g una funzione reale continua limitata e non costante e sia $(M_g f) = g(x)f(x)$ l'operatore di moltiplicazione associato, che dunque è autoaggiunto.
Se λ è nell'immagine della funzione g, allora λ è nello spettro di M_g perché $\lambda f - M_g f = b$ dovrebbe essere risolta da $f(x) = b(x)/(\lambda - g(x))$ che non è in L^2. Lo spettro puntuale è però vuoto, dunque $\lambda \mathbf{I} - M_g$ è sempre iniettivo e l'immagine è sempre densa. D'altra parte, se λ non è nell'immagine di g l'operatore è invertibile.
In conclusione, lo spettro di M_g coincide con lo spettro continuo, ed è l'intervallo reale tra il minimo e il massimo di $g(x)$.

11.5 Proprietà del risolvente

- $\rho(T)$ è non vuoto ed è aperto. Infatti, se $|\lambda| > \|T\|$, l'operatore $\lambda\,\mathbf{I} - T$ è invertito dalla sua serie di Neumann:
$$(\lambda\,\mathbf{I} - T) = \lambda^{-1} \sum_{k \in \mathbb{N}} T^n / \lambda^n$$
che converge perché $\|T/\lambda\| < 1$. Il risolvente è aperto perché se λ_0 è nel risolvente, posso scrivere
$$\lambda\,\mathbf{I} - T = \lambda_0\,\mathbf{I} - T - (\lambda_0 - \lambda)\,\mathbf{I}$$
Poiché esiste $R_{\lambda_0}(T)$, posso scrivere
$$\lambda\,\mathbf{I} - T = (\mathbf{I} - (\lambda_0 - \lambda)(R_{\lambda_0}(T)))(R_{\lambda_0}(T))^{-1}$$
e
$$\mathbf{I} - (\lambda_0 - \lambda) R_{\lambda_0}(T)$$
è invertibile se $\lambda_0 - \lambda$ è sufficientemente piccolo.

- La funzione $\rho(T) \ni \lambda \to R_\lambda(T) \in \mathcal{L}(H)$ è **analitica**, nel senso che è sviluppabile in serie di potenze intorno a ogni $\lambda_0 \in \rho(T)$. Infatti, segue dal punto precedente che
$$(\lambda\,\mathbf{I} - T)^{-1} = \sum_{k \in \mathbb{N}} (\lambda_0 - \lambda)^k R_{\lambda_0}(T)^{k+1}$$
In particolare, date $f, g \in H$, la funzione
$$\rho(T) \ni \lambda \to (f, R_\lambda(T) g) \in \mathbb{C}$$
è una funzione olomorfa (cioè analitica complessa) da un aperto di $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$, perché sviluppabile in serie di potenze intorno a ogni punto del dominio.

- lo spettro è chiuso ed è contenuto in $\{\lambda : \ |\lambda| \le \|T\|\}$, come segue dal punto precedente.

- Lo spettro è non vuoto. Infatti se $\sigma(T) = \emptyset$, $\rho(T) = \mathbb{C}$, ma allora per ogni $f, g \in H$ la funzione $\lambda \to (f, R_\lambda(T) g)$ sarebbe una funzione **intera**, cioè da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$. D'altra parte, per $|\lambda| > \|T\|$,
$$\|R_\lambda(T)\| \le |\lambda^{-1}| \sum_{k \in \mathbb{N}} (\|T\|/|\lambda|)^k = 1/(|\lambda| - \|T\|)$$
che tende a 0 per $|\lambda \to +\infty$ (non è strano: per $|\lambda|$ grande $\lambda\,\mathbf{I} - T$ è praticamente $\lambda\,\mathbf{I}$, il cui inverso è $\mathbf{I}/\lambda$). Ma allora la funzione $\lambda \to (f, R_\lambda(T) g)$ è intera e limitata, dunque per il teorema di Liouville è costante, e poiché tende a 0 all'infinito è proprio nulla. Ne seguirebbe che $R_\lambda(T)$ dovrebbe essere l'operatore nullo, assurdo in quanto invertibile.

- Per ogni λ e μ, $R_\lambda(T)$ e $R_\mu(T)$ commutano, e vale l'**identità del risolvente**:
$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu$$
Questa uguaglianza è la versione operatoriale dell'identità
$$\frac{1}{\lambda - t} - \frac{1}{\mu - t} = \frac{\mu - t - \lambda + t}{(\lambda - t)(\mu - t)} = \frac{\mu - \lambda}{(\lambda - t)(\mu - t)}$$
Infatti, essendo $\mathbf{I} = R_\lambda(T)(\lambda\,\mathbf{I} - T) = (\mu\,\mathbf{I} - T) R_\mu(T)$,
$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = R_\lambda(T)(\mu\,\mathbf{I} - T) R_\mu(T) - R_\lambda(T)(\lambda\,\mathbf{I} - T) R_\mu(T) = (\mu - \lambda) R_\lambda(T) R_\mu(T)$$
da cui segue la commutativià, infatti
$$(\mu - \lambda) R_\lambda(T) R_\mu(T) = -(R_\mu(T) - R_\lambda(T)) = -(\lambda - \mu) R_\mu(T) R_\lambda(T)$$
e dividendo per $\lambda - \mu$ si ha la tesi.

Nel caso di operatori compatti autoaggiunti, la teoria degli autovalori è simile a quella del caso finito-dimensionale. Iniziamo però con una proposizione generale che riguarda gli operatori autoaggiunti.

11.6 Forma quadratica associata a T

Se T è autoaggiunto, la sua norma operatoriale coincide con l'estremo superiore sulla sfera unitaria della forma quadratica associata, cioè

$$\sup_{\|f\|=1} |(f, Tf)| = \|T\|$$

Lo dimostro. Sia $\gamma = \sup_{\|f\|=1} |(f, Tf)|$; è immediato che $\gamma \leq \|T\|$. Dimostro il viceversa: per cominciare

$$(f+g, T(f+g)) - (f-g, T(f-g)) = 2(g, Tf) + 2(f, Tg) = 2(g, Tf) + 2(Tf, g)$$

Il membro di sinistra è stimato in modulo da

$$\gamma(\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2) = 2\gamma(\|f\|^2 + \|g\|^2)$$

Sia ora $\|f\| = 1$, e sia $g = Tf/\|Tf\|$, che dunque è di modulo 1. Il membro di destra diventa

$$2\|Tf\| + 2\|Tf\|$$

Quindi:

$$4\|Tf\| \leq 2\gamma(\|f\|^2 + \|g\|^2) = 4\gamma$$

Passando al sup su f di modulo 1, si ottiene

$$T = \sup_{\|f\|=1} |(f, Tf)|$$

11.7 Autovalori e forme quadratiche

Se T è un operatore simmetrico, la forma quadratica (f, Tf) è reale per ogni f, infatti

$$(f, Tf) = (Tf, f) = \overline{(f, Tf)}.$$

Nel caso finito dimensionale, è semplice mostrare che i punti stazionari di (f, Tf) su sfera unitaria $\|f\|^2$ sono esattamente gli autovettori di f di norma 1. Infatti, consideriamo i punti stazionari della forma quadratica vincolata

$$f \to (f, Tf) - \lambda((f, f) - 1)$$

dove λ è il moltiplicatore di Lagrange. Derivando in f, si ottiene la condizione di stazionarietà:

$$2Tf - 2\lambda f = 0 \text{ cioè } Tf = \lambda f$$

Dunque f è autovettore, e il moltiplicatore di Lagrange è un autovalore.

Questa fatto vale anche per operatori compatti autoaggiunti, come seguirà dal teorema spettrale. Qui dimostro il seguente caso particolare. Sia

$$M = \sup_{\|f\|=1} (f, Tf), \quad \text{e} \quad m = \inf_{\|f\|=1} (f, Tf)$$

Se $M > 0$ allora M è autovalore, e il sup è raggiunto sui corrispondenti autovettori; se $m < 0$ allora m è autovalore, e l'inf è raggiunto sui corrispondenti autovettori. In particolare, ricordando che se

T è autoaggiunto allora $\|T\| = \sup_{\|f\|=1} |(f, Tf)|$, ne segue che o $M = \|T\|$ o $m = -\|T\|$, dunque o $\|T\|$ o $-\|T\|$ è autovalore di T.
Dimostro che se $M > 0$ allora M è autovalore (il caso $m < 0$ si dimostra con la stessa tecnica). Per definizione, esiste una sequenza $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $\|f_k\| = 1$, tale che

$$M = \lim_{k\to+\infty} (f_k, Tf_k)$$

Per limitatezza, $f_k \rightharpoonup f$ per sottosequenze, con $\|f\| \leq \liminf_{k\to+\infty} \|f_k\| = 1$. Poiché T è compatto, $Tf_k \to Tf$ in norma, e dunque

$$(f, Tf) = \lim_{k\to+\infty} (f_k, Tf_k) = M.$$

La norma di $\|f\|$ deve essere 1, in caso contrario:

$$(f/\|f\|, T(f/\|f\|)) = M/\|f\|^2 > M$$

e dunque M non sarebbe il sup. Sia ora $\|g\| = 1$, e consideriamo la funzione

$$\phi(\alpha) = \frac{(f + \alpha g, T(f + \alpha g))}{\|f + \alpha g\|^2}$$

Poiché T è autoaggiunto, $\phi(\alpha)$ è reale, e per $|\alpha| < 1$ è ben definita, infatti

$$\|f + \alpha g\| > |\|f\| - \|\alpha g\|\,| = 1 - |\alpha|$$

Poiché $\phi(0) = M$ e $\phi(\alpha) \leq M$ per $|\alpha| < 1$, deve essere $\phi'(0) = 0$. Calcolo $\phi'(0)$:

$$\left.\frac{\partial}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} (f + \alpha g, T(f + \alpha g)) = (g, Tf) + (f, Tg) = 2\mathcal{R}e(g, Tf)$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} (f + \alpha g, f + \alpha g) = (g, f) + (f, g) = 2\mathcal{R}e(g, f)$$

Dunque

$$0 = \phi'(0) = 2\mathcal{R}e(g, Tf) - 2\mathcal{R}e(g, f)(f, Tf) = 2(\mathcal{R}e(g, Tf) - M\mathcal{R}e(g, f))$$

Sostituendo ig a g si ottiene

$$0 = 2(\mathcal{I}m(g, Tf) - M\mathcal{I}m(g, f))$$

Sommando le due espressioni, e dividendo per due, concludo che

$$(g, Tf) - M(g, f) = 0 \text{ cioè } (g, (Tf - Mf)) = 0$$

Per l'arbitrarietà di g, segue che $Tf = Mf$, cioè M è autovalore.

11.8 Raggio spettrale per un operatore compatto autoaggiunto

Si definisce raggio spettrale il numero

$$r(T) = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|.$$

Naturalmente $r(T) \leq \|T\|$, perché se $|\lambda| > \|T\|$ allora $\lambda \in \rho(T)$. Se T è compatto e autoaggiunto, o $\|T\|$ o $-\|T\|$ è un autovalore di T, dunque $r(T) = \|T\|$.

11.9 Lo spettro di un operatore compatto autoaggiunto

Se T è compatto autoaggiunto, per ogni $\lambda \neq 0$ per l'operatore $\lambda\mathbf{I} - T$ vale il teorema dell'alternativa, dunque o λ è nel risolvente, o λ è un autovalore e l'autospazio $\mathrm{Ker}\,(\lambda\mathbf{I} - T)$ ha dimensione finita. Così come in dimensione finita, è semplice provare le due seguenti affermazioni

- gli autovalori sono reali: infatti se $Tf = \lambda f$ allora $\lambda\|f\|^2 = (f, Tf) = (Tf, f) = \overline{\lambda}\|f\|^2$ da cui $\lambda = \overline{\lambda}$.
- se $Tf = \lambda f$ e $Tg = \mu g$ con $\lambda \neq \mu$ e f e g non banali, allora $(f, g) = 0$. Infatti, moltiplicano la prima uguaglianza per g si ha

  $$\lambda(g, f) = (g, Tf) = (Tg, f) = \mu(g, f)$$

  Se $\lambda \neq \mu$, deve essere (g, f)

Dunque lo spettro di T, ad esclusione dello 0, è fatto da autovalori che sono al più numerabili (se così non fosse, lo spazio H, ammetterebbe un sistema non numerabile di vettori ortonormali, in contrasto con la separabilità).
Inoltre, gli autovalori possono accumulare solo in 0. Considera una (sotto) successione di autovalori distinti λ_k, e sia e_k un autovettore di norma 1, di autovalore λ_k, cioè

$$Te_k = \lambda_k e_k$$

Essendo una sequenza ortonormale, $e_k \rightharpoonup 0$. Per compattezza di T, $Te_k \to 0$ in norma. Ma allora $|\lambda_k| = \|T_e k\| \to 0$, dunque la (sotto) successione converge a 0.

Resta da interrogarsi sul ruolo di 0. Se 0 non è un autovalore, poiché T è autoaggiunto,

$$H = \operatorname{Ker} T \oplus \overline{\operatorname{Range} T} = \overline{\operatorname{Range} T}$$

Cioè $\operatorname{Range} T$ è denso. Mostriamo che non può essere tutto H, cioè che T non può essere invertibile. Se lo fosse, sia $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormale e sia f_k tale che $f_k = T^{-1}e_k$. Per continuità dell'inverso, $\|f_k\| \leq \|T^{-1}\|$, dunque per sottosequenze $f_k \rightharpoonup f$. Per compattezza di T, $e_k = Tf_k \to Tf$ in norma, ma questo è impossibile perché i vettori e_k sono ortonormali e dunque non possono convergere fortemente.
In conclusione, se 0 non è un autovalore, allora $0 \in \sigma_c(T)$.

11.10 Il teorema spettrale per operatori compatti autoaggiunti

Sia M il sottospazio di H

$$M = \bigoplus_{\lambda\in\sigma_p(T)} \operatorname{Ker}(\lambda\mathbf{I} - T)$$

Ricordo che è una somma al più numerabile di sottospazi finito dimensionali (a parte eventualmente $\operatorname{Ker} T$ che può essere infinito), e la somma è diretta perché i sottospazi sono a due a due ortogonali.
Mostriamo che M è tutto H. Supponiamo per assurdo che $M^\perp$ sia un sottospazio (chiuso) non vuoto di H. L'operatore T ristretto a $M^\perp$ ha immagine in $M^\perp$, in quanto autoaggiunto. Infatti, se f è ortogonale a $\operatorname{Ker} \lambda\mathbf{I} - T$, con $\lambda \neq 0$, allora

$$(f, g) = 0 \text{ per ogni } g : \ Tg = \lambda g$$

Ne segue

$$(Tf, g) = (f, Tg) = \lambda(f, g) = 0 \text{ per ogni } g \in \operatorname{Ker}(\lambda\mathbf{I} - T)$$

cioè T mappa l'ortogonale al $\operatorname{Ker}(\lambda\mathbf{I} - T)$ in sé. Infine, poiché T è autoaggiunto,

$$H = \operatorname{Ker} T \oplus \overline{\operatorname{Range} T}$$

cioè $\operatorname{Range} T$ è comunque nell'ortogonale al nucleo.
D'altra parte, T ristretto a $M^\perp$ è autoaggiunto, dunque ha almeno un autovalore di modulo pari alla sua norma. Ma questo è assurdo perché Mrt è ortogonale allo spazio di tutti gli autovettori.

Esercizio 5. Dimensione finita del nucleo

La dimostrazione dei teoremi dell'alternativa per $\lambda \mathbf{I} - T$ con $\lambda \neq 0$, usa l'approssimazione con operatori di rango finito, e dunque si ottiene immediatamente che la dimensione $\mathrm{Ker}\,(\lambda \mathbf{I} - T)$ è finita.
D'altra parte è anche una facile conseguenza della definizione di operatore compatto. Sia dunque T compatto, e supponi che $\mathrm{Ker}\,(\lambda \mathbf{I} - T)$ è non banale per un qualche $\lambda \neq 0$, prova che ha dimensione finita.

Esercizio 6. Stazionarietà degli autovettori

Sia T compatto autoaggiunto, e sia $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una base ortonormale di autovettori per T. Allora

$$Tf = \sum_k \lambda_k f_k e_k$$

Prova 'a mano' che $\|T\| = \max_k |\lambda_k|$ (questo fatto è già stato mostrato a proposito del raggio spettrale degli operatori compatti autoaggiunti).
Nella base,

$$(f, Tf) = \sum_k \lambda_k |f_k|^2$$

Prova che per ogni k, e_k è un punto stazionario per la forma quadratica, vincolata a $\|f\|^2 = 1$.

11.11 Il risolvente di un operatore compatto autoaggiunto

Sia T compatto autoaggiunto, e sia $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ la base di autovettori in cui si decompone:

$$T = \sum_k \lambda_k e_k \otimes e_k$$

(mostra che la serie convergenza in norma). Sia $\lambda \in \rho(T)$, e consideriamo l'equazione seguente, con b assegnato:

$$\lambda f - Tf = b$$

Moltiplicandola scalarmente per e_k, si ottiene

$$\lambda \hat{f}_k - \lambda_k \hat{f}_k = \hat{b}_k$$

che è risolta da

$$\hat{f}_k = \hat{b}_k / (\lambda - \lambda_k)$$

Poiché se $\lambda \in \rho(T)$ allora λ ha distanza finita dallo spettro puntuale, il denominatore è in modulo maggiore di una costante, dunque si può scrivere

$$R_\lambda(T) = \sum_k \frac{1}{\lambda - \lambda_k} e_k \otimes e_k$$

In questo caso la serie converge in senso forte, perchè $|\lambda - \lambda_k| \geq \delta > 0$ per un qualche δ, ma la convergenza non è in norma perché $1/|\lambda - \lambda_k|$ non va a 0 in k.

Osserva che se $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua, si può definire l'operatore

$$\phi(T) = \sum_k \phi(\lambda_k) e_k \otimes e_k$$

(mostra che in effetti la serie converge in senso forte). Questa possibilità è uno degli scopi dell'analisi spettrale, che si estende agli operatori autoaggiunti (ma compare lo spettro continuo) e ad alcuni operatori illimitati (*vedi* [RS] capitoli VII e VIII).

11.12 Spettro di un operatore compatto

Se T è compatto ma non è autoaggiunto, non vale il teorema spettrale. Però restano vere le seguenti affermazioni

- Se $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \rho(T)$ o $\lambda \in \sigma_p(T)$.
- 0 è nello spettro (cioè T non è invertibile).
- Se $\lambda \neq 0$ è un autovalore, allora è un autovalore isolato, cioè non è punto di accumulazione per $\sigma(T)$.

La dimostrazione nel caso autoaggiunto sfrutta il fatto che se v_k è una sequenza di vettori di norma uno, con $Tv_k = \lambda v_k$, e i λ_k sono distinti, allora $v_k \rightharpoonup 0$, perché sono un sistema ortonormale, e dunque per compattezza di T, $Tv_k \to 0$, da cui $\lambda_k = (v_k, \lambda_k v_k) = (v_k, Tv_k) \to 0$.
Anche nel caso autoaggiunto $v_k \rightharpoonup 0$. Infatti, la dimensione del nucleo di $T - \lambda_k I$ è uguale alla dimensione del nucleo dell'aggiunto $T^* - \overline{\lambda_k}$ che dunque è non vuoto. Inoltre, se $T^* w_n = \overline{\lambda_n} w_n$, allora

$$\lambda_k(w_n, v_k) = (w_n, \lambda_k v_k) = (w_n, Tv_k) = (T^* w_n, v_k) = (\overline{\lambda_n} w_n, v_k) = \lambda_n(w_n, v_k)$$

da cui segue che $(w_n, v_k) = 0$ se $\lambda_n \neq \lambda_m$. Sia M_k il sottospazio generato dagli autovettori w_i di T^* di autovalori $\overline{\lambda_i}$, con $i \leq k$. Poiché gli autovalori sono distinti, M_{k+1} contiene strettamente M_k. Il vettore v_k è ortogonale a M_{k-1}, dunque, procedendo come nell'esempio 9.14, $v_k \rightharpoonup 0$ (per provarlo, mostra che esiste un sistema ortonormale z_i, tale che M_k è generato da $\{z_i\}_{i=1}^k$, etc...).

11.13 Operatori di Hilbert-Schmidt

T è un operatore di Hilbert-Schmidt se per una qualche base $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$,

$$\text{tr } T^*T = \sum_k (T^*Te_k, e_k) = \sum_k \|Te_k\|^2 + \infty$$

Nota che questo numero è la **traccia** della matrice infinita associata a T^*T.
Sia U un operatore unitario, mostra che tr $U^*AU =$ tr A. Oppure, equivalentemente, mostra che la traccia di un operatore non dipende dalla base scelta.

Mostra che $T \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$ è di Hilbert-Schmidt se e solo se è un operatore integrale con nucleo in L^2.
Mostra che T autoaggiunto è di Hilbert-Schmidt se e solo se

$$\sum_{\lambda\in\sigma_p(T)} |\lambda_k|^2 < +\infty$$

11.14 Operatori diagonali

Sia T un operatore diagonale in una base $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, cioè

$$Te_k = \lambda_k e_k$$

e supponi che i λ_k siano reali (nota che T è dunque un operatore di moltiplicazione).

Mostra che T è limitato se e solo se $\sup_k |\lambda_k|$ è finito, e che

$$\|T\| = \sup_{k\in\lambda_k} |\lambda_k|$$

Mostra che T è autoaggiunto.

Mostra che se dim Ker $(\lambda_k \mathbf{I} - T)$ è finita per ogni k con $\lambda_k \neq 0$, e 0 è l'unico punto di accumulazione dei λ_k non nulli, allora T è compatto. Suggerimento: riscrivi T come

$$T = \sum_n \lambda_n P_n$$

dove i λ_n sono distinti, e P_n è il proiettore sul sottospazio finito dimensionale di autovalore λ_n. Concludi mostrando che se $\lambda_n \to 0$ (o se sono in numero finito), allora T è limite di operatori di rango finito e dunque compatto.

Nota che non è necessaria nessuna ipotesi sulla sommabilità degli autovalori; in particolare esistono operatori compatti che non sono di Hilbert-Schmidt.

12 Complementi ed esercizi

Esercizio 7.

Sia $T \in \mathcal{L}(\ell_2(\mathbb{N}))$ definito da

$$(T\hat{f})_k = \frac{f_{k+1}}{k+1}$$

Mostra che è continuo e calcolane la norma. Determina T^*. Mostra che T è compatto. Prova a descrivere insieme risolvente e spettro di T e T^*.

Esercizio 8. $T^n/\|T\|^n$

Sia T compatto autoaggiunto, mostra che

$$\frac{T^n}{\|T\|^n}$$

converge in norma operatoriale a un proiettore P_M. Identifica il sottospazio M lasciato fisso da P_M.

Ordinando gli autovalori di T in modo decrescente,

$$Tf = \sum_k \hat{f}_k \lambda_k e_k$$

con $|\lambda_0| \geq |\lambda_1$. Assumo per ora che $|\lambda_1| < |\lambda_0|$, e definisco $M = \text{Ker}\, \lambda_0 \mathbf{I} - T$. Allora $\|T\| = |\lambda_0|$ e

$$\frac{T^n}{\|T\|^n} f - P_M f = \sum_{k>0} \frac{\lambda_k^n}{\lambda_0^n} \hat{f}_k e_k$$

da cui

$$\left\| \| \frac{T^n}{\|T\|^n} f - P_M f \right\| \leq \left(\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_0|} \right)^n \|f\|$$

e quindi

$$\|T^n/\|T\|^n - P_M\| \to 0.$$

Se invece $|\lambda_1| = |\lambda_0|$ definisco

$$M = \text{Ker}\,(\lambda_0 \mathbf{I} - T) \oplus \text{Ker}\,(\lambda_1 \mathbf{I} - T)$$

e procedo come sopra, notando che

$$|\lambda_2| < |\lambda_1| = |\lambda_0|$$

Il fatto che gli autovalori possano essere ordinati per modulo decrescente è conseguenza del fatto che l'unico punto di accumulazione possibile è 0. In particolare, per un operatore compatto autoaggiunto c'è il **gap spettrale**, cioè una differenza finita tra l'autovalore di massimo modulo e tutti gli altri (tranne nel caso particolare in cui λ_0 e $-\lambda_0$ siano entrambi autovalori, ma anche in questo caso tutti gli altri sono separati da $|\lambda_0|$).

Esercizio 9.

Sia $T \in \mathcal{L}(\ell_2(\mathbb{Z};\mathbb{C}))$ definito da

$$(T\hat{f})_k = \hat{f}_{k+1} + \hat{f}_{k-1} - 2\hat{f}_k$$

Mostra che è limitato e autoaggiunto, ma che non è compatto.
Trova il suo spettro, usando l'isometria con $L^2((-\pi,\pi);\mathbb{C})$ data dalla serie di Fourier:

$$f \to \{\hat{f}_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \quad \text{con } \hat{f}_k = \int_{\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Esercizio 10.

La definizione di risolvente e di spettro si può dare anche per operatori illimitati definiti su sottospazi densi. Considera l'operatore ∂_x^2 definito da $\mathbf{S}_\infty$ in sé ($\mathbf{S}_\infty$ è il sottospazio di $L^2(\mathbb{R})$ delle funzioni a decrescenza rapida). Usando l'isometria data dalla trasformata di Fourier, trova il risolvente e lo spettro.

Esercizio 11.

Sia T unitario, cioè $T^* = T^{-1}$. Mostra che lo spettro è contenuto nella circonferenza unitaria di $\mathbb{C}$ (per farlo usa che T e T^{-1} hanno norma uno per provare che il risolvente è fuori dalla circonferenza unitaria).
Mostra che se $|\lambda| = 1$, $Tf = \lambda f$ se e solo se $T^*f = \bar{\lambda} f$, e dunque i due kernel coincidono.
Come conseguenza, prova che T non ha spettro residuo,
Mostra inoltre che Range$\,(\lambda\,\mathbf{I} - T)$ è chiuso se e solo se Range$\,(\bar{\lambda}\,\mathbf{I} - T^*)$ è chiuso, dunque sia lo spettro che il risolvente sono invarianti per coniugazione.

Esercizio 12.

Sia a reale e positivo, e sia

$$T_a : f(x) \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} f(x)$$

Mostra che T_a è unitario in $L^2((-\pi,\pi);\mathbb{C})$. Determina il suo spettro al variare di a. Mostra che se a è diverso da zero, lo spettro coincide con lo spettro continuo.

Esercizio 13.

La trasformata di Fourier $\mathcal{F}$ è un operatore unitario. Mostra che $\mathcal{F}^2 f(x) = f(-x)$, e dunque che $\mathcal{F}^4 = \mathbf{I}$.
Deduci da questo fatto che i soli autovalori possibili sono ± 1 e $\pm\mathrm{i}$.
Mostra che se $\mathcal{F}f = \pm 1 f$ o $\mathcal{F}f = \pm\mathrm{i}f$ allora f ha una determinata parità, quale?
Mostra che l'esponenziale $\mathrm{e}^{-x^2/2}$ è un'autofunzione di autovalore 1. Nota che

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}y^n}\mathrm{e}^{-y^2/2} = (-\mathrm{i})^n \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy} x^n \mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

Mostra che il sottospazio $V_n = \{p(x)\mathrm{e}^{-x^2/2} |\, p \text{ polinomi di grado } n\}$, è invariante per $\mathcal{F}$. Ridefinisci i polinomi di Hermite come

$$\tilde{H}_n(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2/2}$$

Nota che $H_n(x) = (-1)^n x^n \ldots$ deduci che per ogni n c'è un autofunzione di autovalore i^n, della forma $H_n + \ldots..$, e che queste autofunzioni sono ortogonali. In questo modo, costruisci un sistema ortonormale di autofunzioni, che è completo per la completezza dei polinomi di Hermite. Usa questa base per mostrare che lo spettro di $\mathcal{F}$ coincide con lo spettro puntuale, che é fatto dalle radici quarte dell'unità.

Esercizio 14.
Sia $T \in L^2((0,1))$ dato da
$$Tf(x) = \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y$$
Mostra che è limitato e che è compatto. Determina il suo aggiunto. Trova lo spettro.

Esercizio 15.
Sia $T \in L^2((-1,1))$ dato da
$$Tf(x) = \int_{|y|<|x|} f(y)\,\mathrm{d}y$$
Mostra che è limitato e che è compatto. Determina il suo aggiunto. Trova kernel e spettro.

Esercizio 16.
Sia $g(x,y)$ limitata in $[0,1]^2$ e considera l'operatore integrale di Volterra.
$$Tf(x) = \int_0^x g(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y$$
Mostra che è limitato e che è compatto. Trova lo spettro, e deduci che T non può essere autoaggiunto.

Esercizio 17.
Sia $T \in \mathcal{L}^2([0,1])$ l'operatore integrale
$$Tf(x) = \int_0^1 (x+y)f(y)\,\mathrm{d}y$$
Mostra che è di rango finito, che è autoaggiunto, e trovane lo spettro.

Esercizio 18.
Sia $T \in \mathcal{L}^2([0,1])$ l'operatore integrale
$$Tf(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mu(x+y)} f(y)\,\mathrm{d}y$$
Mostra che è di rango finito, che è autoaggiunto, e trovane lo spettro.

Esercizio 19.
Sia $A \subset \Omega$ e Ω dominio di $\mathbb{R}^n$, e sia P^A l'operatore di moltiplicazione
$$P^A f(x) = \mathcal{X}\{x \in A\} f(x)$$
Mostra che P^A è un proiettore, cioè che è autoaggiunto e ${P^A}^2 = P^A$. Trova il sottospazio chiuso M di $L^2(\Omega)$ tale che P^A è il proiettore su M.

Mostra in generale che se P è autoaggiunto e $P^2 = P$, allora $M = (\operatorname{Ker} P)^\perp$, che é uno spazio chiuso, è invariante per P e che P proietta su M.

(preso dalle dispense di Pulvirenti)

Esercizio 20.
Considera la seguente famiglia di operatori in $L^2(\mathbb{R})$:

$$A_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha y^2}}{1+|x-y|^4} f(y)\,\mathrm{d}y$$

Discutine limitatezza e compattezza al variare di $\alpha \in [0, +\infty)$. Discuti in quale senso A_α converge a A_0

Considera la famiglia di operatori

$$A_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x^2}}{1+|x-y|^4} f(y)\,\mathrm{d}y$$

Discutine limitatezza e compattezza al variare di $\alpha \in [0, +\infty)$.

(riadattamento di esercizio preso dalle dispense di Pulvirenti)

Esercizio 21.
Considera $g \in L^2(\mathbb{R})$ e considera la successione

$$g_n(x) = n^\alpha g(nx)$$

Discuti il suo limite per $n \to +\infty$ al variare di α.

Considera la successione di operatori $T_n \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ definiti da

$$T_n g(x) = n^\alpha g(nx)$$

Discuti la convergenza di T_n.

(riadattamento di esercizio preso dalle dispense di Pulvirenti)

Esercizio 22.
Considera le due successioni di operatori integrali in $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R})$

$$A_n f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-n(x-y)^2} f(y)\,\mathrm{d}y$$

$$B_n f(x) = \log n \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+n(x-y)^2} f(y)\,\mathrm{d}y$$

Mostra che sono tutti operatori continui e discuti il loro limite per $n \to +\infty$.

(riadattamento di esercizio preso dalle dispense di Pulvirenti)

Esercizio 23.
Considera i seguenti insiemi in $\ell_2(\mathbb{N})$:

$$B_1 = \{\hat{f} \in \ell_2 : \ |\hat{f}_k| \leq 1/|k|^2 \ \forall k\}$$

$$B_2 = \{\hat{f} \in \ell_2 : \ |\hat{f}_k| \leq 1/\sqrt{|k|} \ \forall k\}$$

$$B_3 = B_2 \cap \{\hat{f} \in \ell_2 : \ \|f\| \leq 1\}$$

Discuti la loro compattezza.

Sia a_k una successione monotona crescente e divergente. Discuti la compattezza dell'insieme

$$B_a = \{\hat{f} \in \ell_2 : \ |\hat{f}_k| \leq 1/a_k \ \forall k\}$$

(riadattamento di esercizio preso dalle dispense di Pulvirenti)

Esercizio 24. Realtà dello spettro di un operatore autoaggiunto

Sia A autoaggiunto, dimostra che il suo spettro è reale (affermazione semplice per lo spettro puntuale), dimostrando i seguenti punti.

- $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ per ogni operatore autoaggiunto A se e solo se $\mathrm{i} \in \rho(A)$ per ogni operatore autoaggiunto A.
- $\|A + \mathrm{i}\,\mathbf{I}\|^2 = \|A\|^2 + 1$
- $\mathrm{Range}\,(A + \mathrm{i}\,\mathbf{I})$ è chiuso
- $\mathrm{Ker}\,(A + \mathrm{i}\,\mathbf{I}) = \{0\}$
- $\mathrm{i} \in \rho(A)$

Mostra anche che $\|(A + \mathrm{i}\,\mathbf{I})^{-1}\| \leq 1$.

Esercizio 25. Operatori positivi

Sia A autoaggiunto e sia $(f, Af) \geq 0$ per ogni $f \in H$. Mostra che $\sigma(A) \subset [0, +\infty)$.

Come conseguenza, se $a > 0$, $-a \in \rho(A)$, cioè $A + a\,\mathbf{I}$ è invertibile. Dai una stima di $\|(A + a\,\mathbf{I})^{-1}\|$.

Aggiungi l'ulteriore ipotesi che A sia coercivo, cioè che esista $\alpha > 0$ tale che $(f, Af) \geq \alpha\|f\|^2$. Prova che $\sigma(A) \subset [\alpha, +\infty)$. Come conseguenza, prova che un operatore coercivo autoaggiunto è invertibile.

Esercizio 26.

Considera i seguenti operatori in $L^2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
T_1 f(x) &= f(-x) \\
T_2 f(x) &= \mathrm{sgn}(x) f(x) \\
T_3 f(x) &= f(|x|) \\
T_4 f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} f(\frac{x}{2})
\end{aligned}$$

Mostra se sono autoaggiunti o se sono unitari. Calcola la norma. Trova gli autovettori, lo spettro e il risolvente.

Esercizio 27.

Qualche equazione di Volterra è risolubile esplicitamente. Sia

$$f(x) - \lambda \int_0^x \cos(x - y) f(y)\,\mathrm{d}y = \sin x$$

Mostra che

$$f'' - \lambda f' + f = 2 \sin x$$

Trovane la soluzione usando la formula di Duhamel. Più rapidamente, puoi cercare una soluzione particolare come combinazione di $\sin x$ e $\cos x$, in accordo al principio che il sottospazio generato è invariante per operatori differenziali a coefficienti costanti (nota però che per $\lambda = 0$ sei in risonanza, e dunque devi moltiplicare per il termine secolare). Il dato iniziale lo trovi usando l'equazione di partenza e la sua derivata.

Ancora più semplice è la risoluzione dell'equazione

$$f(x) - \lambda \int_0^x e^{x-y} f(f) = g(x)$$

In questo caso è sufficiente derivare una sola volta per ottenere una EDO.

Esercizio 28.

Sia T un funzionale **coercivo**, cioè esiste c tale che

$$\|Tx\| \leq c\|x\|$$

Prova che:

- T è iniettivo
- $\operatorname{Range} T$ è chiuso.
- T non è compatto
- se T è anche autoaggiunto allora T è invertibile.

Esercizio 29.

Sia $T \in \mathcal{L}(\ell_2)$ dato da

$$(T\hat{f})_k = (1 - e^{-k}) f_k$$

Equivalentemente, considera T dato da

$$T = \sum_{k \in \mathbb{N}} (1 - e^{-k}) e_k \otimes e_k$$

Mostra che è limitato, trova $\|T\|$, trova lo spettro.

Generalizza questo esercizio al caso

$$T = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k e_k \otimes e_k$$

con a_k limitata e reale. Ci sono differenze nel caso a_k complessi?

Esercizio 30.

Sia T autoaggiunto. Prova che $\sigma(T^2) = \{\lambda^2 : \quad \lambda \in \sigma(T)\}$.
Questo fatto si generalizza al caso di polinomi. Se $p(x)$ è un polinomio, l'operatore $p(T)$ ha come spettro l'immagine di $p(\sigma(T))$. Un opportuno teorema spettrale per operatori autoaggiunti permette di estendere la costruzione dell'operatore $f(T)$ al caso in cui $f(T)$ è una funzione continua $f : \sigma(T) \to \mathbb{C}$. Inoltre $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$.

Nel caso di operatori compatti, decomponendo $T = \sum_k \lambda_k e_k \otimes e_k$ si ottiene banalmente

$$f(T) = \sum_k f(\lambda_k(e_k \otimes e_k$$

e l'unica richiesta su $f(x)$ è che sia limitata e continua in 0 (nel caso di autovalori numerabili).

Esercizio 31.
Sia P il proiettore sul sottospazio chiuso M. Trova il suo spettro.

13 L'equazione di Poisson in $[a,b]$

La teoria svolta in questa sezione ha scopi puramente didattici, perchè sia la serie di Fourier che il metodo della funzione di Green ci dicono tutto sulle soluzioni di $u'' = -f$ in un intervallo $[a,b]$. D'altra parte la semplicità di questo caso rende possibile introdurre facilmente gli strumenti più sofisticati che saranno necessari per il caso in dimensioni più alte. Darò comunque le definizioni principali direttamente in $\mathbb{R}^n$.

Richiamo alcune definizioni che riguardano gli spazi di Sobolev. Come già fatto introducendo le distribuzioni, allarghiamo la nozione di derivata definendola attraverso l'**effetto** che ha sulle funzioni test. Indicherò con $\mathcal{D}(\Omega)$ le funzioni $C^\infty(\Omega)$ a supporto compatto in Ω (ricordo che Ω è aperto, dunque il supporto non tocca il bordo). Sia f una funzione regolare definita su Ω, e sia $\mathbf{w} \in \mathcal{D}(\Omega)$ un campo vettoriale. Per il teorema della divergenza

$$\int_\Omega \nabla f \cdot \mathbf{w} = -\int_\Omega f\, \nabla \cdot \mathbf{w}$$

Nota che il termine di bordo è zero perché $\mathbf{w}$ ha supporto compatto in Ω. Se ∇f è in $L^2(\Omega)$ allora

$$\left| \int_\Omega f\, \nabla \cdot \mathbf{w} \right| \leq \|\nabla f\|\, \|\mathbf{w}\|$$

Dunque l'esistenza del gradiente di f permette di integrare il prodotto tra f e la divergenza di un campo regolare, stimando il risultato con la norma del campo. Usando questa osservazione, diamo la definizione di gradiente debole. Sia $f \in L^2(\Omega)$. Diremo che f ha **gradiente debole** in $L^2(\Omega)$ se esiste una funzione vettoriale $\mathbf{u}$ tale che, per ogni campo vettoriale $\mathbf{w} \in \mathcal{D}(\Omega)$ vale

$$-\int_\Omega f \nabla \cdot \mathbf{w} = \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$$

Se esiste, il gradiente debole di f è unico, e, se f è regolare, ovviamente $\mathbf{u} = \nabla f$.

Si chiama **spazio di Sobolev** H^1 lo spazio delle funzioni $u \in L^2(\Omega)$ con gradiente debole $\nabla u \in L^2(\Omega)$. Il prodotto scalare su H^1 è

$$(u,v)_{H^1} = (u,v)_{L^2} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2}$$

dove, naturalmente

$$(\nabla u, \nabla v)_{L^2} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v.$$

Si dimostra che H^1 è effettivamente uno spazio di Hilbert, e che

$$\overline{C^\infty(\Omega)}^{H^1} = H^1$$

cioè H^1 coincide con la chiusura topologica delle funzioni $C^\infty(\Omega)$ rispetto alla norma H^1.

13.1 $H^1(a,b)$

Lo spazio $H^1(a,b)$ è lo spazio delle funzioni quadro sommabili con derivata debole quadro sommabile. Dimostro che avere la derivata in L^2 dà anche regolarità puntale alla funzione.
Sia $f \in C^\infty(a,b)$ e $\|f\| + H^1 < +\infty$. Indico con L la lunghezza dell'intervallo $L = b - a$.

1.

$$|f(x) - f(y)| \leq \int_x^y |f'| \leq \sqrt{|x-y|}\|f'\|$$

e dunque f si estende per continuità agli estremi dell'intervallo e la stima vale anche per a e b.

2. Sia $m_f = 1/L \int_a^b f$ la media di f.

$$|m_f| \leq \frac{1}{L}\int_a^b |f| \leq \frac{1}{\sqrt{L}}\|f\|$$

3. Poiché f è continua in $[a,b]$, esiste un punto $\bar{x}$ tale che $m_f = \bar{x}$. Dunque,

$$|f(x) - m_f| \leq \sqrt{L}\|f'\|$$

4. Usando i punti precedenti

$$|f(x)| \leq |f(x) - m_f| + |m_f| \leq \sqrt{L}\|f'\| + \|f\|/\sqrt{L}$$

Queste affermazioni valgono anche per $f \in H^1$, per densità. Infatti, se $f \in H^1$ esiste $f_n \in C^\infty(a,b)$ che converge a f in norma H^1, dunque $\|f_n\|_{H^1} \leq c$. Dalle stime precedenti segue che f_n sono equi-limitate e equi-hölderiane, dunque per Ascoli-Arzelà ogni sottosequenza di f_n ha una sottosequenza convergente nella norma del sup. Ma $f_n \to f$ in L^2, dunque tutte le sottosequenze convergono uniformemente a f. A questo punto si può passare al limite ottenendo la tesi.

Si provi per esercizio, senza invocare il teorema di Ascoli-Arzelà, che f_n è di Cauchy nella norma del sup.

Procedendo come sopra, è immediato dimostrare che i chiusi e limitati di H^1 sono compatti rispetto alla convergenza uniforme. Infatti la limitatezza della norma garantisce equilimitatezza e equicontinuità, e dunque si può invocare il teorema di Ascoli-Arzelà. Poiché la convergenza in norma L^∞ implica quella in norma L^2, ne segue che i limitati di H^1 sono precompatti in L^2. Si dice dunque che H^1 si **immerge compatto** il L^2.

13.2 La disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger in una dimensione

La disuguaglianza

$$|f(x) - m_f| \leq \sqrt{L}\|f'\|$$

rientra nella classe delle disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger e questo tipo di disuguaglianza ha un ruolo chiave nelle applicazioni degli spazi di Sobolev. Prima di mostrarne una, diamone la sua versione in L^2, che si ottiene integrando in x:

$$\|f - m_f\|_2^2 \leq \int_a^b \mathrm{d}x \leq L\|f'\|_2^2 = L^2\|f'\|_2^2$$

e dunque

$$\|f - m_f\|_2 \leq L\|f'\|_{L^2} \tag{4}$$

13.3 $u'' = -f$ in $H^1(a,b)$

Consideriamo di nuovo il problema di Poisson $u'' = -f$ con condizioni di Neumann omogenee. Sappiamo che f deve essere a media nulla, e che possiamo cercare la soluzione tra le funzioni a media nulla perché u è definita a meno di una costante.
Integrando contro una funzione test $\phi \in C^\infty(a,b)$, l'equazione data diventa

$$\int_a^b u'\phi' = \int_a^b f\phi$$

(il termine di bordo si annulla perché u' è 0 al bordo). Poiché ogni funzione $g \in H^1$ è limite di funzioni regolari nella norma H^1, l'uguaglianza precedente deve valere anche se $\phi \in H^1$. Chiamerò **soluzione debole** in H^1 una funzione u in H^1 per cui valga l'uguaglianza precedente per ogni $\phi \in H^1$. Noto che se $\phi = 1$, l'uguaglianza è soddisfatta per qualunque u, dunque la formulazione debole ha senso per funzioni ϕ ortogonali alle costanti. Mostriamo che u esiste unica se f è a media nulla, nel sottospazio $H^1_m = g \in H^1 : \int_a^b g = 0$, che è proprio il sottospazio ortogonale alle costanti.

Il passaggio chiave è la disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger, che assicura che se $f \in H^1_m$, allora

$$\|f\|_2 \leq L\|f'\|_2$$

Da questa disuguaglianza, infatti, segue che

$$\|f\|_{H^1_m} = \sqrt{\|f\|_2 + \|f'\|_2} \text{ e } \|f'\|_2$$

sono **norme equivalenti** in H^1_m, su cui dunque posso considerare come prodotto scalare la forma

$$(f,g)_m = \int_a^b f'g'$$

Allora, assegnata f in L^2_m (lo spazio delle funzioni L^2 a media nulla) il funzionale

$$\phi \to \int_a^b fg$$

è lineare continuo su H^1_m perchè

$$\left|\int_a^b f\phi\right| \leq \|\phi\|_2\|f\|_2 \leq \sqrt{L}\|\phi\|_{H^1_m}$$

Per il teorema di rappresentazione di Riesz, esiste unica $u \in H^1_m$ tale che, per ogni $g \in H^1_m$:

$$\int_a^b fg = (u,g)_m = \int_a^b u'g'.$$

In questo modo abbiamo trovato $u \in H^1_m$, e abbiamo anche l'unicità.

Una osservazione sulla regolarità: dalla definizione stessa di soluzione debole, scegliendo $\phi \in \mathcal{D}(a,b)$, si ottiene che f è la derivata debole di u', ed è in L^2. Dunque $u \in H^2$, che è lo spazio delle funzioni con derivata prima e seconda il L^2. Dal fatto che le funzioni di H^1 sono Hölder continue, segue facilmente che le funzioni di H^2 hanno derivata prima Hölder continua. Quindi se u è soluzione debole con $f \in L^2_m$, allora $u \in C^{1,1/2}$. Inoltre, la derivata di u si estende fino al bordo perché è hölderiana.

Se f è continua, $u \in C^2((a,b)) \cap C^1([a,b])$ e la soluzione è forte.

13.4 Simmetria dell'inverso di ∂_x^2

Nel punto precedente abbiamo risolto in H^1_m l'equazione $u'' = -f$ in forma debole, con condizioni di Neumann omogenee al bordo, per $f \in L^2_m$ (lo spazio delle funzioni L^2 a media nulla). Sia T l'operatore che a $f \in L^2_m$ associa u soluzione dell'equazione di Poisson in forma debole.
Se considero l'equazione per funzioni test $v \in \mathcal{D}((a,b)$ (e a media nulla), ottengo

$$\int_a^b u'v' = \int_a^b fv$$

Posso spostare la derivata da u' a v, ottenendo

$$\int_a^b Tf\, \partial_x^2 v = -\int_a^b fv$$

cioè $(Tf, \partial_x^2 v) = -(f, v)$. Passando all'aggiunto

$$(f, T\, \partial_x^2 v) = (f, -v)$$

Fissando v e facendo variare $f \in L^2$ ottengo che per $v \in \mathcal{D}((a,b))$

$$T^*\, \partial_x^2 v = -v$$

Cioè T^* inverte a sinistra $-\partial_x^2$. Scelgo ora f in C^∞, e dunque $Tf \in C^\infty$, ottengo che

$$(\partial_x^2 Tf, v) = -(f, v)$$

Variando v, ottengo che T inverte $-\partial_x^2$ a destra:

$$\partial_x^2 Tf = -f$$

Operando con T^* sui due membri e usando l'uguaglianza precedente, si ha

$$-Tf = T^*\, \partial_x^2 Tf = -T^* f.$$

Dunque $T = T^*$ su un sottoinsieme denso. Ma allora T è autoaggiunto come operatore in $\mathcal{L}(L^2(a,b))$.
Nota come un punto essenziale di questo argomento è la prova che $\partial_x^2 Tf = -f$ se f è regolare, e questo fatto è conseguenza della regolartià di T.

13.5 La base per ∂_x^2 con condizioni di Neumann omogenee

L'operatore T che associa f a u è dunque lineare e continuo da L^2 in H^1_m, ed è autoaggiunto da L^2_m in L^2_m. Sappiamo che i limitati di H^1_m sono precompatti il L^2, dunque pensando che T è definito da L^2_m a L^2_m, T è un operatore compatto.
Ne segue che T ammette una base di autofunzioni ϕ_k, con autovalori μ_k positivi che tendono a zero (sono positivi perchè $-\partial_x^2$ è un operatore positivo). Ricordo che $Tf = u$ con $f \in L^2_m$ e $u \in H^1_m$ è equivalente al fatto che u è soluzione debole del problema di Poisson. Dunque ϕ_k è soluzione debole del problema di Poisson con $f = \lambda_k \phi_k$, con $\lambda_k = 1/\mu_k$. Poiché $\phi_k \in L^2$, per l'analisi della regolarità che abbiano fatto al punto precedente, si ottiene che $\phi_k \in H^2$ e dunque è $C^{1,1/2}$. Usando di nuovo l'equazione, si ottiene che ϕ_k è C^2 quindi vale

$$\phi_k'' = -\lambda_k \phi_k$$

da cui segue che ϕ_k sono funzioni $C^\infty([a,b])$

Lo scopo di questa sezione è adattare questi passaggi al caso di condizioni di Dirichlet, e di estendere la teoria ai domini limitati di $\mathbb{R}^n$.

Per trattare il caso di condizioni di Dirichlet omogenee, bisogna ambientare il problema in uno spazio che tenga conto delle condizioni al contorno. In una dimensione è particolarmente semplice, perché

$$H_0^1(a,b) = \{f \in H_1(a,b) : \; f(a) = 0 = f(b)\}$$

è un sottospazio chiuso di H^1 (ricordo che le funzioni di H^1 sono $C^{1/2}$). D'altra parte in dimensione maggiore le funzioni di H^1 non sono necessariamente continue, dunque è necessario operare un modo differente.

13.6 $H_0^1(\Omega)$

Si indica con H_0^1 il sottospazio chiuso di H^1 che si ottiene da

$$\overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1} = H_0^1.$$

La definizione di questo spazio include in qualche senso la condizione al contorno omogenea di Dirichlet, infatti se $f \in H_0^1$ è regolare, allora è nulla al bordo. D'altra parte non è evidente cosa vuol dire "valore al bordo" per una funzione non regolare (per approfondimenti, *vedi* i teoremi di traccia su [S] par 7.7).
In questo spazio si ambienta perfettamente il problema di Poisson-Dirichlet. Ma prima bisogna premettere un'importante disuguaglianza.

13.7 Disuguaglianza di Poincaré in $H_0^1((a,b))$

Sia $f(x) \in C_0^\infty([a,b])$, e sia $b - a = L$. Allora, poiché per ipotesi $f(a) = 0$

$$f^2(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f^2(y)\,\mathrm{d}y = 2\int_a^x f(y)\,f'(y)\,\mathrm{d}y \leq 2\left(\int_a^b f^2\right)^{1/2}\left(\int_a^b f'^2\right)^{1/2}$$

per Cauchy-Schwartz. Integrando in x:

$$\|f\|_2^2 \leq 2L\|f\|_2\,\|f'\|_2$$

da cui

$$\|f\|_2 \leq 2L\|f'\|_2$$

Cioè se f è zero al bordo, la sua norma L^2 è stimata da una costante per la norma L^2 della derivata. Questa è la disuguaglianza di Poincaré.

13.8 Disuguaglianza di Poincaré in $H_0^1(\Omega)$

Sia $f \in C_0^\infty(\Omega)$, Prolungando f a zero in un dominio rettangolare di spigoli di lunghezza L opportuna, e usando il caso unidimensionale, è facile mostrare che

$$\|f\|_2^2 \leq 2L\|\nabla f\|_2^2 \tag{5}$$

Usa la densità di $C_0^\infty(\Omega)$ in H_0^1 per mostrare che la disuguaglianza di Poincaré (5) vale per ogni f in H_0^1 (suggerimento: sia $f_n \in C_0^\infty(\Omega)$ con $f_n \to f$ nella norma H^1; ne segue che $f_n \to f$ in L^2 e $\nabla f_n \to \nabla f$ in L^2 ...).
Osserva infine che la disuguaglianza di Poicaré non è verificata da $f = 1$ (e della costanti in generale). Questo fatto prova che H_0^1 è un sottospazio proprio di H_1.

Esercizio 32. * L'ortogonale di H_0^1
Trova l'ortogonale di $H_0^1(-1,1)$ in $H^1((-1,1)$.

Esercizio 33. * δ su funzioni $H^1(a,b)$

Sia $x_0 \in [a,b]$ e sia $Tf(x) = f(x_0)$. Prova che T è un funzionale lineare e continuo in H^1. Dunque per il teorema di Riesz esiste $\delta \in H^1$ tale che $(\delta, f)_{H^1} = f(x_0)$. Trova l'espressione esplicita di δ.

Risolvi lo stesso problema on H_0^1 e H_m^1, con il prodotto scalare dato dal prodotto L^2 delle derivate.

Esercizio 34. Poisson-Dirichlet nel caso unidimensionale

Consideriamo di nuovo il problema di Poisson $u'' = -f$, ma stavolta con condizioni di Dirichlet omogenee. Integrando contro una funzione test $\phi \in \mathcal{D}(a,b)$, l'equazione data diventa

$$\int_a^b u'\phi' = \int_a^b f\phi$$

Questa volta il termine di bordo si annulla perché ϕ è nulla al bordo. Per densità delle funzioni di $\mathcal{D}(a,b)$ in H_0^1, l'uguaglianza precedente deve valere anche se $\phi \in H_0^1$. Chiamerò soluzione debole in H_0^1 una funzione u in H_0^1 per cui valga l'uguaglianza precedente per ogni $\phi \in H_0^1$.
Il fatto che in H_0^1 valga la disuguaglianza di Poincaré permette di trattare questo problema nello stesso modo del caso delle condizioni di Neumann. Dalla disuguaglianza segue infatti che

$$\sqrt{\|f\|_2 + \|f'\|_2} \text{ e } \|f'\|_2$$

sono **norme equivalenti** in H_0^1, su cui dunque posso considerare come prodotto scalare la forma bilineare

$$(f,g)_m = \int_a^b f'g'$$

Allora, assegnata $f \in L^2$, il funzionale

$$\phi \to \int_a^b fg$$

è lineare continuo su H_0^1 perchè

$$\left|\int_a^b f\phi\right| \leq \|\phi\|_2\|f\|_2 \leq \sqrt{L}\|\phi\|_{H_0^1}$$

Per il teorema di rappresentazione di Riesz, esiste unica $u \in H_0^1$ tale che, per ogni $g \in H_0^1$:

$$\int_a^b fg = (u,g)_m = \int_a^b u'g'.$$

In questo modo abbiamo trovato $u \in H_0^1$, e abbiamo anche l'unicità.
L'analisi della regolarità è identica al caso delle condizioni di Neumann omogenee.

13.9 La base per ∂_x^2 con condizioni di Dirichlet omogenee

Per esercizio, mimando il caso di condizioni di Neumann omogenee, provare che $L^2(a,b)$ ha una base di autofunzioni della derivata seconda, che sono $C^\infty[a,b]$, e gli autovalori sono una sequenza positiva che tende a infinito.

Esercizio 35. *

Provare ad adattare questa teoria all'equazione

$$((1-x^2)u')' = -f$$

Possibile traccia f deve essere a media nulla, la spazio da considerare deve essere quello delle funzioni a media nulla con $\int_{-1}^1 (1-x^2)u'^2$ limitato. Serve però una disuguaglianza di Poicaré che assicuri la continuità in questa norma del funzionale $g \to \int gf$ con f in L^2.

14 Il Problema di Poisson in Ω

Il piano è il seguente. per il problema di Poisson con condizioni di Dirichlet omogenee abbiamo già tutti gli strumenti per ottenere un'unica soluzione debole. Resta però da discutere la regolarità, su cui richiamerò qualche teorema. Per il problema di Poisson-Neumann manca invece l'opportuna disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger, che si dimostra sotto opportune condizioni di regolarità del bordo di Ω.

14.1 Formulazione variazionale del problema di Poisson-Dirichlet

Sia Ω un dominio di $\mathbb{R}^n$ (cioè un aperto connesso e limitato). L'equazione di Poisson con condizioni di Dirichlet omogenee al bordo è

$$\begin{cases} \triangle u = -f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{6}$$

e può essere vista come il problema della determinazione del potenziale elettrostatico u data la densità di carica f, assumendo u nullo al bordo. La stessa equazione si ottiene se si cercano le soluzioni di equilibrio per l'equazione delle onde (o del calore) con forzante f, con condizioni di Dirichlet nulle al bordo.

Poiché l'equazione delle onde con forzante viene da una lagrangiana (*vedi* l'esercizio 1.1), l'equazione dell'equilibrio sarà anche l'equazione per la determinazione dei minimi dell'energia potenziale. Sia dunque $E[u]$ il funzionale che esprime l'energia

$$E[u] = \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u - \int_\Omega fu$$

La variazione prima di E si ottiene come al solito da

$$\delta E = \frac{d}{dt}\varepsilon\Big|_{\varepsilon=0} E[u+\varepsilon v] = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - fv)$$

Imponendo che v sia nulla al bordo (in accordo con le condizioni al contorno assunte su u), si ottiene che i punti u stazionari per $E[u]$ (e in particolare il punto di minimo), deve soddisfare l'equazione

$$\int_\Omega (-\triangle u - f)v = 0 \quad \forall v \text{ regolare e nulla al bordo}$$

Infatti

$$\nabla u \cdot \nabla v = \nabla \cdot (v\nabla u) - \triangle u v$$

e, usando il teorema della divergenza e il fatto che v è nulla al bordo,

$$\int_\Omega \nabla \cdot (v\nabla u) = \int_{\partial\Omega} v\, \partial_n u = 0.$$

14.2 L'equazione di Poisson in $H_0^1(\Omega)$

Definizione: $u \in H_0^1$ è una soluzione debole del problema di Poisson-Dirichlet (6) se per ogni $v \in H_0^1$ vale

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega vf$$

La disuguaglianza di Poincaré permette di risolvere immediatamente il problema dell'esistenza di u. Infatti, come nel caso unidimensionale, la norma di H^1 è equivalente, in H_0^1, alla norma data dal prodotto scalare

$$(u, v)_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

Data $f \in L^2$, per ogni $v \in H_0^1$ vale

$$\left|\int_\Omega fv\right| \leq \|f\| \, \|v\| \leq c\|f\|\|v\|_{H_0^1}.$$

Questa disuguaglianza implica che $v \to \int_\Omega fv$ è lineare continuo in H_0^1 e dunque per il teorema di Riesz esiste u che lo rappresenta mediante prodotto scalare, cioè u è soluzione debole dell'equazione di Poisson.
Risulta cosí definito

$$T : L^2 \to H_0^1 : \quad Tf = u \iff \int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega fv \quad \forall\, v \in H_0^1$$

Per analizzare l'operatore T, è necessario prima provare che $f \in C^\infty$ allora $Tf \in C^\infty$. Premetto l'enunciato del Lemma di Weyl, la cui dimostrazione trovate su [G].

14.3 Lemma di Weyl

Sia $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ una distribuzione tale che

$$\triangle u = 0$$

Allora u è una funzione armonica (e in particolare è C^∞). Per la dimostrazione vedi [G].

14.4 $T : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$

Sia $f \in C^\infty(\Omega)$, e sia

$$\bar{u} = \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

dove G è la funzione di Green in $\mathbb{R}^n$ per il problema di Poisson, e f è prolungata a 0 fuori da Ω. Come è noto (ma lo ridimostreremo più avanti), u è armonica fuori dal supporto di f, ed è C^∞ sul supporto di f, e dunque è $C^\infty(\Omega)$. Ne segue che $\bar{u} \in H^1$. È immediato verificare che, per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla(u - \bar{u}) \cdot \nabla\phi = 0$$

Spostando tutte le derivate su ϕ si ottiene

$$\int_\Omega (u - \bar{u})\triangle\phi = .0$$

Quindi il laplaciano distribuzionale di $(u - \bar{u})$ è nullo, e dunque, per il lemma di Weyl, $u - \bar{u}$ è armonica. Ne segue che u è somma di una funzione armonica e di una C^∞ e dunque è C^∞.

Esercizio 36.
Mostra che 0 non è un autovalore per T.

14.5 Simmetria di $\triangle^{-1}$

Dal punto precedente, sappiamo che se $f \in C^\infty$ allora $Tf \in C^\infty$ e dunque

$$\triangle Tf = -f$$

D'altra parte, usando la definizione di soluzione debole con $\phi \in C_0^\infty$, ottieni che

$$(f, \phi) = (\nabla Tf, \nabla\phi) = -(Tf, \triangle\phi) = -(f, T^*\triangle\phi)$$

Dunque per ogni $\phi \in C_0^\infty$,

$$T^*\triangle\phi = -\phi$$

Sia ora $f \in C_0^\infty$, allora $\triangle Tf = -f \in C_0^\infty$, dunque posso usare l'identità provata per T^* e ottenere

$$-T^* f = T^* \triangle T f = -Tf$$

Dunque T e T^* coincidono su un sottoinsieme denso di L^2, e quindi coincidono e T è autoaggiunto.

14.6 $H_1^0 \subset\subset L^2$

In dimensione 1 è stato molto semplice mostrare la compattezza in L^2 dei chiusi limitati di H^1. In dimensione maggiore è necessario qualche sforzo e qualche cautela in più.
Sia L tale che $\Omega \subset J^n$, con $J = [-L/2, L/2]^n$. Poichè se $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, allora la funzione che si ottiene prolungandola in tutto J^n con 0 è in $\subset \mathcal{D}(J^n)$, si può identificare ogni funzione di $H_0^1(\Omega)$ con una funzione di $H^1(J^n)$ periodica.
Ricordo che i coefficienti di Fourier sono definiti da

$$\hat{f}_k = \frac{1}{(2L)^{n/2}} \int_J^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi x/L} f(x) \, \mathrm{d}x$$

e che se f è regolare

$$\widehat{\nabla f}_k = \mathrm{i}k\frac{\pi}{L}.$$

Dunque la chiusura in H^1 delle funzioni C^∞ periodiche sono date in Fourier da $\hat{f}_k$ tali che

$$\|f\|_{H^1}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left((1 + |k|^2 \frac{\pi^2}{L^2} \right) |\hat{f}_k|^2 < +\infty$$

Come dimostrato nel punto 10.5, i limitati in questa norma sono compatti il $\ell_2(\mathbb{Z})$, e dunque compatti in $L^2(J^n)$. Ne segue che $H_0^1(\Omega)$ si immerge compatto in $L^2(\Omega)$.

14.7 Le autofunzioni del Laplaciano

La simmetria e la compattezza di T garantiscono che esiste una base di autofunzioni ϕ_k con autovalori μ_k decrescenti che tendono a 0 (0 non è autovalore dunque, essendo T compatto, gli autovalori sono infiniti e accumulano in 0). Dunque

$$T\phi_k = \mu_k \phi_k$$

Qualche osservazione sulla regolatià.
Sia ϕ tale che $T\phi = \mu\phi$. Come abbiamo fatto a proposito della regolarità C^∞, sia $v = \int_{\mathbb{R}^n} G(x - y)\phi(y) \, \mathrm{d}y$ dove G è la funzione di Green e ϕ_k è estesa a 0. e quindi v risolve nel senso delle distribuzioni $\triangle v = \phi$ La differenza $\mu v - \phi$ é una distribuzione a laplaciano nullo in Ω, dunque per il lemma di Weyl è una funzione armonica. Ne segue che ϕ ha la stessa regolarità di v nell'interno di Ω.
In dimensione 3 non è compicatissimo arrivare a mostrare la regolarità interna di ϕ senza prima dimostrare i teoremi di regolarità per l'equazione di Poisson. Una traccia potrebbe essere la seguente, che fa uso della cosiddetta procedura di bootstrap. Poiché $\phi \in L^2$ e G^2 è sommabile sui compatti, segue che v è limitata e dunque ϕ è limitata dentro Ω. Da questo, localizzando, si ottiene che v è continua, e dunque lo è ϕ, ma allora v è C^1 e dunque lo è ϕ, ma allora v è C^2 e dunque, iterando, si arriva a C^∞ dentro.

In dimensione maggiore di 3, la funzione di Green non è quadro sommabile intorno alla singolarità, dunque il primo passo del bootstrap non si può fare in questo modo, ed è necessario passare ad analizzare la regolarità nel senso dell'appartenenza a spazi H^k, tenendo presente che il teorema di immersione di Sobolev afferma che se la dimensione dello spazio è n, e $k > n/2$, allora le funzioni H^k sono in $C^{k-n/2}$ (se l'esponente non è intero la parte eccedente l'intero è l'esponente di hölderianità).

Rimane da considerare il problema di Poisson-Neumann in Ω, per il quale enuncerò i risultati, senza le dimostrazioni (che avete fatto nel corso di Istituzioni di Analisi Superiore). Per trattarlo sarà necessario discutere della regolarità del bordo di un dominio.

14.8 Domini C^k e domini lipschitziani

Un dominio Ω è di classe C^k se $\partial\Omega$ è, in ogni suo punto, localmente grafico di una funzione di classe C^k.
La definizione rigorosa è la seguente. Si richiede che per ogni $x \in \partial\Omega$, esista una palla B di centro x, un sistema di coordinate cartesiane (z, y), con $z \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $y \in \mathbb{R}$, con origine in x, un intorno U di 0 in $\mathbb{R}^{n-1}$ ed una funzione $\Phi \in C^k(U, \mathbb{R})$ tali che

- $\partial\Omega \cap B = \{(z, \Phi(z)) | \, z \in U\}$
- $\Omega \cap B = \{(z, y) \in B | \, z \in U, y < \Phi(z)\}$

Si dice che Ω è lipschitziano se Φ è lipschitziana. Noto che per il teorema di Rademacher, una funzione lipschitziana ha gradiente quasi ovunque, e dunque per quasi ogni $x \in \partial\Omega$, esiste l'iperpiano tangente a $\partial\Omega$ in x e quindi la derivata normale esterna (per questo serve la seconda condizione data sopra, che afferma che distinguo localmente interno ed esterno).

Noto infine che se Ω è limitato, Ω è unione finita di grafici di funzioni lipschitziane (uso la compattezza).

La condizione di lipschitizanità è quella minima che permette di dimostrare il teorema della divergenza, e permette anche di costruire un operatore di prolungamento per H^1

14.9 Teorema di prolungamento e sue conseguenze

Sia Ω limitato e lipschitziano. Esiste un dominio limitato Ω_0 che contiene compattamente Ω e un operatore lineare E da $H^1(\Omega)$ a $H^1_0(\Omega_0)$, tale che.

$$\|Ef\| \leq c\|f\| \quad \text{e} \quad Ef|_\Omega = f$$

Questo teorema asserisce che ogni funzione di $H^1(\Omega)$ è prolungabile a una funzione a supporto compatto, in un dominio più grande. Per la dimostrazione vedi [S] o [G].

Abbiamo già usato un caso facile di teorema di prolungamento: sia Ω_0 un dominio che contiene Ω, e sia

$$Ef(x) = f(x) \text{ per } x \in \Omega, \ 0 \text{ altrimenti}$$

E è un'isometria (non suriettiva) da $H^1_0(\Omega)$ a $H^1_0(\Omega_0)$. Nel caso di funzioni solo $H^1(\Omega)$ non si può invece prolungare ponendo $f = 0$ fuori da Ω, perchè la funzione che si ottiene non è in H^1.
Il teorema di prolungamento è alla base di due importanti fatti.

14.10 $H^1(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$, per Ω lipschitziano

La dimostrazione la lascio per esercizio, perché è identica al caso di H^1, a parte la necessità di usare le estensioni delle funzioni di H^1.

14.11 Teorema di Poincaré-Wirtinger

Se Ω è lipschitziano, esiste una costante c tale che per ogni $u \in H^1$

$$\|u - u_m\| \leq c\|\nabla u\|$$

La dimostrazione si può fare facilmente per assurdo: sia u_n a media nulla e normalizzata

$$\|u_n\|^2_{H^1} = \|u_n\|^2 + \|\nabla u_n\|^2 = 1$$

tale che

$$\|u_n\| \geq n\|\nabla u_n\|.$$

Per la limitatezza di $\|u_n\|$ segue che $\|\nabla u_n\| \to 0$, e dunque, usando la normalizzazione, $\|u_n\| \to 1$. Poiché $\|u_n\|_{H^1}$ è limitata, u_n converge debole in H^1 a $u \in H^1$, e dunque $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$, e $u_n \to u$ in L^2, per la compattezza dell'immersione di H^1 in L^2. Quindi

$$\|\nabla u\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|gradu_n\| = 0$$

Ma allora u è una costante (ha gradiente nullo), di media nulla, e dunque è nulla, invece, poiché u_n converge a u il L^2, $\|u\| = \lim_{n\to+\infty} \|u_n\| = 1$, che è assurdo.

14.12 Il problema di Poisson-Neumann

Come facile esercizio, si provi l'esistenza e unicità di una soluzione debole in $H^1_m(\Omega)$ (lo spazio delle funzioni H^1 a media nulla) dell'equazione

$$\triangle u = -f$$

con condizioni di Neumann omogenee, secondo le seguenti linee.

a. Mostra che può esistere una soluzione regolare del problema solo se vale la condizione di compatibilità

$$\int_\Omega f = 0$$

(usa il teorema della divergenza, o, se preferisci, la prima identità di Green)

b. Mostra che se u è soluzione, allora $u + c$ è soluzione per ogni costante c.

c. Mostra che se u è una soluzione regolare, per ogni v in $H^1(\Omega)$ vale

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega fv \tag{7}$$

(dimostralo prima per $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ e concludi per densità).

d. Nota che poiché f è a media nulla, questa identità vale se e solo se vale per $v \in H^1_m$, il sottospazio di $H^1(\Omega)$ delle funzioni a media nulla.

e. Dimostra che H^1_m è un sottospazio chiuso di H^1 e che il suo ortogonale in H^1 è il sottospazio delle funzioni costanti.

f. Usando la disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger, mostra che in H^1_m, $\|gradu\|$ è una norma equivalente a quella di H^1, che dunque puoi considerare dotato del prodotto scalare

$$(u, v)_{H^1_m} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

g. Usa il teorema di Riesz per dimostrare l'esistenza e unicità di una soluzione debole in H^1_m

h. Mostra che l'operatore $T : L^2_m \to H^1_m$ che dà la soluzione è autoaggiunto e compatto.

14.13 Le costanti ottimali per le disuguaglianze di Poincaré

Considero di nuovo il problema di Poisson-Dirichlet, in $H^1_0(\Omega)$, con $T : L^(\Omega) \to H^1_0(\Omega)$, dato da

$$Tf = u \quad \Longleftrightarrow \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega fv$$

Siano ϕ_k le autofunzioni di T, e siano μ_k gli autovalori.

A meno della questione della regolarià fino al bordo, le funzioni ϕ_k soddisfano

$$\triangle \phi_k = -\frac{1}{\mu_k}\phi_k$$

Moltiplico per ϕ_h e integro. Ottengo

$$\int_\Omega \nabla\phi_h \cdot \nabla\phi_k = \frac{1}{\mu_k}\int_\Omega \phi_h\phi_k$$

Il membro di sinistra è il prodotto scalare in $H^1_0(\Omega)$ di ϕ_k e ϕ_h, mentre a destra ho il prodotto scalare in L^2. Scegliendo ϕ_h nornalizzate in L^2, sia ottiene

$$\int_\Omega \nabla\phi_h \cdot \nabla\phi_k = \frac{1}{\mu_k}\delta_{kh}$$

Dunque ϕ_h è un sistema ortogonale anche nella norma H^1_0.

Si può provare questa uguaglianza senza usare la regolarità delle autofunzioni. Infatti, per definizione di T, per ogni $v \in H^1_0(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla T\phi_k \cdot \nabla v = \int_\Omega \phi_k v$$

Scegliendo $v = \phi_h$ e usando che $T\phi_k = \mu_k\phi_k$ ottengo

$$\delta_{kh} = \int_\Omega \phi_k\phi_h = \mu_k\int_\Omega \nabla\phi_k \cdot \nabla\phi_h$$

Questa uguaglianza ci permette di analizzare meglio la disuguaglianza di Poincaré. Infatti, data $u \in H^1_0(\Omega)$

$$u = \sum_k \hat{u}_k\phi_k \quad \text{da cui } \|u\|_2 = \sum_k |\hat{u}_k|^2.$$

Inoltre

$$\|u\|^2_{H^1_0} = (\nabla u, \nabla u) = \sum_k \frac{1}{\mu_k}|\hat{u}_k|^2$$

Dunque la migliore costante γ per la disuguaglianza di Poincaré deve soddisfare

$$\sum_k |\hat{u}_k|^2 \le \gamma^2 \sum_k \frac{1}{\mu_k}|\hat{u}_k|^2$$

Dunque $\gamma^2 = \sup_k \mu_k$, ma i μ_k sono decrescenti, quindi $\gamma^2 = \mu_0$. cioè γ è la radice del reciproco del più piccolo autovalore del laplaciano.
Lo stessa conclusione, naturalmente, vale per il caso delle condizioni di Neumann omogenee.

15 Il problema di Laplace

15.1 La funzione di Green in $\mathbb{R}^3$

Lavoro in $\mathbb{R}^3$, ma nelle altre dimensioni si ottengono gli stessi risultati con le stesse procedure. Ricordo che

$$G(x) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x|}$$

è la funzione di Green in $\mathbb{R}^3$ per il problema di Poisson, cioè, nel senso delle distribuzioni

$$\triangle G(x) = -\delta(x)$$

ovvero, per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ vale

$$\int G(x)\triangle\phi(x)\,\mathrm{d}x = -\phi(0)$$

In questo paragrafo mostrerò che se $f \in C^\alpha$, con $\alpha \in (0,1)$, allora $G * f$ è una funzione $C^{2+\alpha'}$, $\forall \alpha' < \alpha$.

Calcolo le derivate prime di G

$$\nabla G(x) = -\frac{1}{4\pi}\frac{x}{|x|^3} \quad \text{cioè} \quad \partial_i G(x) = -\frac{1}{4\pi}\frac{x_i}{|x|^3} \tag{8}$$

e calcolo le derivate seconde:

$$\partial^2_{ij}G(x) = -\frac{1}{4\pi}\,\partial_j\frac{x_i}{|x|^3} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\delta_{ij}}{|x|^3} - 3\frac{x_i x_j}{|x|^5}\right) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\delta_{ij}|x|^2 - 3x_i x_j}{|x|^5} \tag{9}$$

In notazione matriciale

$$\partial^2 G(x) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\mathbf{I}|x|^2 - 3x\otimes x}{|x|^5}$$

Si osservi che $\partial^2 G$ ha traccia nulla, cioè $\triangle G = 0$ per $x \neq 0$. È importante notare che G diverge come $1/|x|$, che è una singolarità sommabile intorno a 0, ∇G diverge come $1/|x|^2$, sommabile intorno a 0, mentre $\partial^2 G$ diverge come $1/|x|^3$, che non è sommabile intorno a 0. D'altra parte, per ogni $r > 0$,

$$\int_{|x|=r}\frac{\delta_{ij}|x|^2 - 3x_i x_j}{|x|^5}\sigma(\mathrm{d}x) = \frac{1}{r}\int_{|z|=1}(\delta_{ij} - 3z_i z_j)\sigma(\mathrm{d}z) = 0$$

(ricordo che se $|x| = r$ e $z = x/|x|$, $\sigma(\mathrm{d}x) = r^2\sigma(\mathrm{d}z)$). Infatti, se $i \neq j$ il primo termine è nullo, e il secondo è dispari in x_i e dunque ha integrale nullo. Se invece $j = j$, a meno di $1/r$ il primo termine dà 4π, il secondo, a meno di $1/r$, è

$$-3\int_{|z|=1} z_i^2\sigma(\mathrm{d}z) = -3\frac{1}{3}\int_{|z|=1}(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)\sigma(\mathrm{d}z) = -4\pi$$

e dunque la somma è nulla.

Calcolo ora le derivate distribuzionali di $G * f$. Sia $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$

$$\int \partial_{ij}\phi(x)(G*f)(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int \mathrm{d}y f(y)\int_{|x-y|>\varepsilon} G(x-y)\,\partial_{ij}\phi(x)\,\mathrm{d}x.$$

L'integrale in dx può essere riscritto come

$$\int_{|x-y|>\varepsilon} G(x-y)\,\partial_{ij}\phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{|x-y|>\varepsilon} \partial_j(G(x-y)\,\partial_i\phi(x))\,\mathrm{d}x - \int_{|x-y|>\varepsilon} \partial_j G(x-y)\,\partial_i\phi(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$\int_{|x-y|>\varepsilon} \partial_j(G(x-y)\,\partial_i\phi(x))\,\mathrm{d}x - \int_{|x-y|>\varepsilon} \partial_i(\partial_j G(x-y)\phi(x))\,\mathrm{d}x + \int_{|x-y|>\varepsilon} \partial_{ij} G(x-y)\phi(x)\,\mathrm{d}x$$

I primi due integrali sono termini di bordo. Analizzo il primo.

$$\int_{|x-y|>\varepsilon} \partial_j(G(x-y)\,\partial_i\phi(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{|x-y|=\varepsilon} n_j\,\partial_i\phi(x)\,\mathrm{d}x$$

dove $n_j = (x_j - y_j)/|x-y|$ è la componente j della normale esterna (notare il cambio di segno dovuto all'uso della normale esterna alla sfera, che è opposta alla normale esterna al dominio $|x-y|>\varepsilon$). Questo termine va a 0 perché l'integrale è stimato da $4\pi\varepsilon^2\|\nabla\phi\|_\infty$.
Il secondo termine di bordo non è invece infinitesimo:

$$-\int_{|x-y|>\varepsilon} \partial_j(G(x-y)\,\partial_i\phi(x))\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_{|x-y|=\varepsilon} n_i n_j \phi(x)\sigma(\mathrm{d}x) =$$
$$-\frac{\phi(x)}{4\pi\varepsilon^2}\int_{|z|=\varepsilon} n_i n_j \sigma(\mathrm{d}x) - \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_{|x-y|=\varepsilon} n_i n_j(\phi(x)-\phi(y))\sigma(\mathrm{d}x)$$

Il secondo termine tende a 0 perché $|\phi(x)-\phi(y)| \le c\varepsilon$ e dunque l'integrale è stimato da $c\varepsilon^3$. Il primo si calcola esplicitamente, notando che l'integrale di $n_i n_j$ è $\delta_{ij}/3$ per la misura della buccia sferica. In conclusione, il secondo termine di bordo dà

$$-\frac{\delta_{ij}}{3}\phi(y).$$

L'ultimo termine integrale ha limite non nullo.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|<\varepsilon} \partial_{ij}G(x-y)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{|x-y|\ge 1} \partial_{ij}G(x-y)\phi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{|x-y|<1} \partial_{ij}G(x-y)(\phi(x)-\phi(y))\,\mathrm{d}x$$

dove ho potuto sottrarre $\partial_{ij}G(x-y)\phi(y)$ perché ha integrale nullo in dy nella palla $\{|x-y|<1\}$
L'integrando del secondo termine è sommabile, perché

$$|\,\partial_{ij}G(x-y)(\phi(x)-\phi(y))| \le \frac{c\|\nabla\phi\|_\infty}{|x-y|^2}$$

In conclusione

$$\int \partial\phi(G*f) = -\frac{\mathbf{I}}{3}\int \phi(x)f(x)\,\mathrm{d}x + \int \mathrm{d}y f(y)\int \mathrm{d}x\,\partial^2 G(x-y)\phi(y)$$

dove l'ultimo integrale va inteso nel senso del suo valore principale, cioè come $\lim_{\varepsilon\to 0}$ degli integrali su $|x-y|>\varepsilon$.

Mostriamo ora come possiamo invertire l'ordine di integrazione, se $f \in C^\alpha$:

$$\int \partial^2\phi(x)(G*f)(x) = -\frac{\mathbf{I}}{3}\int \phi(y)f(y)\,\mathrm{d}y + \lim_{\varepsilon\to 0}\int \mathrm{d}x\phi(x)\int_{|x-y|>\varepsilon} \partial^2 G(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Il limite dell'integrale in dy nel secondo termine può essere riscritto come

$$\int_{|x-y|>1} \partial^2 G(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y + \int_{|x-y|<1} \partial^2 G(x-y)(f(y)-f(x))\,\mathrm{d}y$$

e il secondo integrale esiste finito perché, per l'hölderianità di f, l'integrando è limitato da

$$c\frac{|x-y|^\alpha}{|x-y|^3}$$

che è sommabile intorno a 0. Dunque le derivate esistono in senso classico e

$$\partial^2 G * f(x) = -\frac{1}{3}\mathbf{I}f(x) + \int \partial^2 G(x-y)f(y)$$

dove l'integrale va inteso nel senso del suo valore principale (cioè del limite su $|x-y|>\varepsilon$).

Concludo mostrando che l'integrale è hölderiano in x. Spezzo di nuovo l'integrale su $|x-y|>1$ (che è regolare in x) e su $|x-y|<1$, dove sottraggo come sopra $f(x)$. Questo secondo integrale è

$$\int_{|x-y|<1} \partial^2 G(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{|z|<1} \partial^2 G(z)f(x+z)\,\mathrm{d}z$$

La differenza tra il valore in x e in $\bar{x}$ di questo integrale è data da

$$\int_{|z|\le 1} \partial^2 G(x)\delta f$$

dove

$$\delta f = f(x+z) - f(x) - (f(\bar{x}+z) - f(\bar{z})$$

Per hölderianità:

$$|\delta f| \le c|z|^\alpha \qquad \text{e} \qquad |\delta f| \le c|x-\bar{x}|^\alpha$$

Ma allora, scelto $\gamma \in (0,1)$

$$|\delta f| = |\delta f|^\gamma |\delta f|^{1-\gamma} \le c|x-\bar{x}|^{\alpha(1-\gamma)}|z|^{\alpha\gamma}$$

Quindi:

$$\left|\int_{|z|\le 1} \partial^2 G(x)\delta f\right| \le c|x-\bar{x}|^{\alpha(1-\gamma)} \int_{|z|<1} |z|^{-(3-\alpha\gamma)}\,\mathrm{d}z \le c|x-\bar{x}|^{\alpha(1-\gamma)}$$

Poiché vale per ogni $\gamma \in (0,1)$, si ha l'hölderianità per ogni $\alpha' < \alpha$. Gli altri termini di $\partial^2(G*f)$ hanno invece la stessa regolarità di f, dunque in conclusione $G*f$ è in $C^{\alpha'}$ per ogni $\alpha' < \alpha$.
Lascio come esercizio di analisi la dimostrazione che se le derivate parziali distribuzionali di una distribuzione F sono funzioni continue, allora F è una funzione C^1 e le derivate sono distribuzionali sono derivate in senso classico.
Noto, infine, che il laplaciano di $G*f$ è la traccia della matrice delle derivate seconde, e, poiché $\partial^2 G$ ha traccia nulla, si ottiene

$$\triangle(G*f) = -\frac{1}{3}3f(x) = -f(x)$$

15.2 Potenziale di singolo strato, prime proprietà

Sia Ω limitato con bordo C^2 a tratti, e sia μ una funzione limitata su $\partial\Omega$. Il potenziale di singolo strato generato da μ è la funzione

$$u_s(x) = \int_{\partial\Omega} G(x-y)\mu(y)\sigma(\mathrm{d}y)$$

Un esempio di potenziale di singolo strato è quello generato da una distribuzione uniforme di cariche su di un piano; in questo caso il campo elettrico generato è ortogonale al piano, costante nei due semispazi, ma discontinuo sul piano (si tratta in pratica di un problema unidimensionale, dunque il potenziale è dato proprio da $-|x|/2$, la cui derivata è $-\mathrm{sgn}(x)/2$).
Per il potenziale di singolo strato valgono i seguenti risultati.

- u_s è una funzione armonica in Ω e in $\mathbb{R}^3\setminus \partial\Omega$.
- u_s è continua anche su $\partial\Omega$ se μ è limitata.
- L'integrale
$$\int_{\partial\Omega} n_0 \cdot \nabla G(x-y)\mu(y)\sigma(\mathrm{d}y)$$
esiste finito sia per $x \in \mathbb{R}^3\setminus \partial\Omega$ che per $x \in \partial\Omega$, e in quest'ultimo caso l'integrando è sommabile se μ è limitata.
- Sia τ_0 un vettore tangente a $\partial\Omega$. Se μ è hölderiana,
$$\lim_{x\to x_0^\pm} \int_{\partial\Omega} \tau_0 \cdot \nabla G(x-y)\mu(y)\sigma(\mathrm{d}y) = \int_{\partial\Omega} \tau_0 \cdot \nabla G(x_0-y)\mu(y)\sigma(\mathrm{d}y)$$
cioè le componenti tangenti del campo sono continue nell'attraversamento del bordo.

L'armonicità di u_s per $x \notin \partial\Omega$ è una semplice conseguenza dell'armonicità di $G(x)$ per $x \neq 0$. Provo la continuità: sia $x_0 \in \partial\Omega$, sia $\delta > 0$, e sia $B_\delta = B_\delta(x_0)$:

$$|u_s(x)-u_s(x_0)| \le \int_{\partial\Omega\cap B_\delta} (|G(x-y)|+|G(x_0-y)|)|\mu(y)|\,\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega\setminus B_\delta} |G(x-y)-G(x_0-y)||\mu(y)|\,\mathrm{d}y$$

Il primo integrale è stimato da costante per δ (discuto dopo i dettagli), il secondo, a δ fissato, tende a 0 se $x_0 \to x$. Dunque, dato $\varepsilon > 0$, scegliendo δ sufficientemente piccolo, e, fissato δ, scegliendo $|x-x_0|$ sufficientemente piccolo, posso ottenere $|u_s(x)-u_s(x_0)| < \varepsilon$, quindi $u_s(x) \to u_s(x_0)$.

Mostro che l'integrale su $\partial\Omega \cap B_\delta$ è di ordine δ. Suppongo che x_0 sia un punto di regolarità del bordo, e dunque c'è una funzione $\phi : U \to \mathbb{R}$, con U aperto di $\mathbb{R}^2$, tale che se $y \in \partial\Omega \cap B_\delta$, allora $y = (z, \phi(z))$. Sia z_0 tale che $x = (z_0, \phi(z_0))$. Per costruzione, se $z \in U$ allora $|z - z_0| < \delta$. Vale $\sigma(\mathrm{d}y) = \sqrt{1+|\nabla\phi(z)|^2}$. Con abuso di notazione $\mu(z) = \mu((z, \phi(z)))$. Dunque

$$\left|\int_{\partial\Omega\cap B_\delta} G(x_0-y)\mu(y)\sigma(\mathrm{d}y)\right| \le \int_U dz \frac{|\mu(z)|\sqrt{1+|\nabla\phi(z)|^2}}{4\pi\sqrt{|z-z_0|^2+|\phi(z)-\phi(z_0)|^2}} \le c\int_U \frac{\mathrm{d}z}{|z-z_0|}$$
$$\le c\int_{|z-z_0|<\delta} \frac{\mathrm{d}z}{|z-z_0|}$$

e quest'ultimo integrale è $c\delta$. L'altro integrale, con $x \neq x_0$, si stima analogamente, tenendo presente che per ogni $z' \in U$
$$\int_{|z-z_0|<\delta} \frac{\mathrm{d}z}{|z-z'|} \le \int_{|z-z'|<\delta} \frac{\mathrm{d}z}{|z-z'|} = c\delta.$$

Per quel che riguarda $\nabla u_s(x)$, ovviamente non c'è nessun problema di esistenza e regolarità per $x \notin \partial\Omega$. Mostro che l'espressione del gradiente è ben definita anche in x in $x_0 \in \partial\Omega$, ma è necessario che μ sia almeno hölderiana. Usando la carta locale definita sopra intorno a x_0, devo solo discutere dell'esistenza dell'integrale vicino a x_0 (la parte in $\Omega\setminus B_\delta$ è analitica in x, se $x \in B_\delta$):

$$\int_{\partial\Omega\cap B_\delta} \frac{-(x_0-y)}{4\pi|x_0-y|^3}\mu(y)\sigma(\mathrm{d}y) = -\int_U dz\mu(z)\sqrt{1+|\nabla\phi(z)|^2}\frac{\binom{z_0-z}{\phi(z_0)-\phi(z)}}{4\pi(|z-z_0|^2+|\phi(z)-\phi(z_0)|^2)^{3/2}}$$

Il denominatore diverge come $|z-z_0|^3$, mentre tutte le componenti del numeratore sono di ordine $z - z_0$. L'integrale può dunque esistere solo nel senso del valore principale, ma allora serve almeno μ hölderiana affinché esista.

È importante notare, peró, che se n_0 è la normale in x_0, allora $n_0 \cdot \nabla G(x - y)$ è sommabile intorno a 0. Infatti, in coordinate locali,

$$n_0 = \begin{pmatrix} -\nabla\phi(z_0) \\ 1 \end{pmatrix} / \sqrt{1 + |\nabla\phi(z_0)|^2}$$

dunque, per $y \simeq x_0$,

$$n_0 \cdot \nabla G(x_0 - y) \simeq c \frac{\phi(z_0) - \phi(z) - \nabla\phi(z_0) \cdot (z_0 - z)}{4\pi|z - z_0|^3}$$

e se ϕ è C^2, il numeratore va come $|z - z_0|^2$ e dunque la singolarità è sommabile, indipendentemente dalla regolarità di μ.
Per esercizio, si mostri la continuità delle componenti tangenti del campo, nell'ipotesi di μ hölderiana.

Esercizio 37.
Sia $\mu(x)$ hölderiana per $x \in [-1/2, 1/2]$. Mostra che l'integrale $\int_{-1/2}^{1/2} \mu(x)/x \, \mathrm{d}x$ esiste finito come valore principale in 0, mentre se $\mu(x) = 1/\ln(|x|)$ l'integrale non esiste nemmeno come valore principale (verifica che $1/\ln(|x|)$ non è hölderiana in 0).
Costruisci un esempio di potenziale di strato singolo in dimensione 2 con μ non hölderiana, in cui la componente tangente del campo è divergente.

15.3 Il salto della componente normale

Come noto dall'esempio della distribuzione piana uniforme di cariche, il campo può essere discontinuo sulla superficie.
Un semplice conto mostra questa discontinuità. Sia $x_0 \in \partial\Omega$, sia $B_\delta = B_\delta(x_0)$, sia $w \in \mathcal{D}(B_\delta)$. Non è difficile dimostrare che

$$\int_{B_\delta} \triangle w(x) u_s(x) = -\int_{\partial\Omega} w(y)\mu(y)\sigma(\mathrm{d}y)$$

(si consideri una famiglia di funzioni μ_ε regolari tali che $\mu_\varepsilon \to \mu$ in distribuzione, etc...).
L'integrale al primo membro, però, è anche uguale a

$$\int_{B_\delta} \nabla(\nabla w(x) u_s(x)) - \int_{B_\delta} \nabla w(x) \nabla u_s(x))$$

e il primo termine è 0 per le ipotesi su w. Spezzo l'integrale del secondo termine in due parti, su $B_\delta^- = B_\delta \cap \Omega$ e $B_\delta^+ \backslash \Omega$.

$$\int_{B_\delta^+} \nabla w(x) \nabla u_s(x) = -\int_{B_\delta \cap \Omega} w(x)\, \partial_n^+ u_s(x)$$

dove ho usato che $\triangle u_s = 0$ se $x \neq in\, \partial\Omega$ e ho indicato con $\partial_n^+ u_2$ il limite da sopra del gradiente di u_s per la normale esterna a Ω. Il segno meno compare perché la normale esterna a $B_\delta^+ \cap \partial\Omega$ coincide con $-n_x$. Analogamente,

$$\int_{B_\delta^-} \nabla w(x) \nabla u_s(x) = \int_{B_\delta \cap \Omega} w(x) n_x \cdot \nabla u_s^-(x)$$

Mettendo insieme i due termini, e ricordando l'uguaglianza iniziale, si ha

$$\int_{B_\delta \cap \partial\Omega} w(x)(\partial_n^+ u_s(x) - \partial_n^- u_s(x))\sigma(\mathrm{d}x) = -\int_{B_\delta \cap \partial\Omega} w(x)\mu(x)\sigma(\mathrm{d}x)$$

Per l'artibitrarietà di w, ottengo

$$\partial_n^+ u_s(x) - \partial_n^- u_s(x) = -\mu(x)$$

da cui si vede che il salto della componente normale del campo è l'opposto della densità superficiale di carica.

Purtroppo, per poter utilizzare veramente il potenziale di strato singolo, è necessario trovare non solo la differenza, ma anche l'espressione dei due limiti della componente normale del campo. Vale il seguente risultato: sia $x_0 \in \partial\Omega$, sia n_0 la normale esterna a $\partial\Omega$ in x_0, allora

$$\lim_{x \to x_0^\pm} \int_{\partial\Omega} n_0 \cdot \nabla G(x-y)\mu(y)\sigma(\mathrm{d}y) = \mp\frac{\mu(x_0)}{2} + \int_{\partial\Omega} n_0 \cdot \nabla G(x_0-y)\mu(y)\sigma(\mathrm{d}y)$$

dove $x \to x_0^+$ vuol dire che x tende a x_0 ma $x \in \mathbb{R}^3\backslash\bar{\Omega}$, mentre $x \to x_0^-$ vuol dire che x tende a x_0 con $x \in \Omega$, e la singolarità dell'integrale è sommabile.

Mostro questo risultato in un caso semplice, quello in cui Ω è $\mathbb{R}^2 \times 0$. Il caso generale è analogo, ma decisamente più complicato. e lo tratto nella sezione successiva.
Sia dunque $x = (x_1, x_2, x_3)$, sia $x_0 = (0,0,0)$, sia $y = (y_1, y_2)$ e $\mu(y)$ una densità continua di cariche Devo calcolare

$$\lim_{x\to 0^\pm} -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}y\, \mu(y) \frac{x_3}{((y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + x_3^2)^{3/2}}$$

Sia $\delta > 0$, spezzo l'integrale nelle regioni $B_\delta = \{y : |y_1 - x_1|^2 + |y_2 - x_2|^2 < \delta^2\}$ e nella regione complementare, B_δ^c. Su B_δ^c l'integrando è limitato (il denominatore è maggiore di δ^3, dunque nel limite $x \to 0$ si ha $x_3 \to 0$, e quindi l'integrale va a 0).
Per l'altro termine, noto preliminarmente che

$$\int_{B_\delta} \mathrm{d}y \frac{|x_3|}{((y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + x_3^2)^{3/2}} = 2\pi \int_0^\delta \mathrm{d}\rho \frac{\rho|x_3|}{(\rho^2 + x_3^2)^{3/2}}$$
$$= -2\pi|x_3| \left.\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + x_3^2}}\right|_0^\delta = 2\pi - 2\pi\frac{1}{\sqrt{\delta^2 + x_3^2}} \leq 2\pi$$

Dunque

$$\int_{B_\delta} \mathrm{d}y \frac{x_3}{((y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + x_3^2)^{3/2}}\mu(y) = \mu(0)\int_{B_\delta} \mathrm{d}y\, \frac{x_3}{((y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + x_3^2)^{3/2}} +$$
$$+ \int_{B_\delta} \mathrm{d}y\, \frac{x_3}{((y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + x_3^2)^{3/2}}(\mu(y) - \mu(0))$$

Il secondo termine è limitato da

$$2\pi \sup_{y\in B_\delta} |\mu(y) - \mu(0)|$$

e va a 0 in δ. Il primo si calcola esplicitamente, come sopra, e si ottiene

$$\mu(0)\int_{B_\delta} \mathrm{d}y \frac{x_3}{((y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + x_3^2)^{3/2}} = 2\pi\mu(0)\left(\frac{x_3}{\sqrt{x_3^2}} - \frac{x_3}{\sqrt{\delta^2 + x_3^2}}\right)$$

che per $x_3 \to 0$, tende a $2\pi\mu(0)\,\mathrm{sgn}(x_3)$. In definitiva, il limite cercato è

$$-\mathrm{sgn}(x_3)\frac{1}{2}\mu(0)$$

come volevamo dimostrare.

15.4 * Il caso generale

Voglio calcolare

$$\lim_{x\to x_0^\pm}\int_{\partial\Omega}\partial_{n_x}G(x-y)\mu(y)\sigma(\mathrm{d}y)$$

con $x_0\in\partial\Omega$. Sia $B_\delta = B_\delta(x_0)$. Spesso l'integrale in $\partial\Omega\cap B_\delta^c$ e in $\partial\Omega\cap B_\delta$. L'integrale su $\partial\Omega\cap B_\delta^c$ dipende con regolarità da x, per x vicino a x_0, dunque è continuo e

$$\lim_{x\to x_0^\pm}\int_{\partial\Omega\cap B_\delta^c}\partial_{n_x}G(x-y)\mu(y)\sigma(\mathrm{d}y) = \int_{\partial\Omega}\partial_{n_x}G(x_0-y)\mu(y)\sigma(\mathrm{d}y)$$

L'integrale sull'altra regione è quello delicato. Passo in coordinate locali, centrate in x_0, e noto che a meno di cambiamenti ortogonali delle coordinate, posso assumere che $\nabla\phi(z_0)=0$. Inoltre, per semplicità, assumo che x tenda a x_0 lungo la normale. In coordinate locali, dunque

$$\begin{aligned} &x_0 = \tbinom{z_0}{\phi(z_0)} \qquad && y=\tbinom{z}{\phi(z)} \quad x=\tbinom{z_0}{w}\\ &n_0 = n_{x_0} = \tbinom{0}{1} && \sigma(\mathrm{d}y) = \sqrt{1+|\nabla\phi(z)|^2}\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

Il nucleo integrale è

$$\partial_{n_x}\nabla G(x-y) = -\frac{1}{4\pi}n_0\cdot\frac{x-y}{|x-y|^3} = -\frac{1}{4\pi}\frac{w-\phi(z)}{(|z_0-z|^2+|w-\phi(z)|^2)^{3/2}}$$

Isolo il termine significativo, che sarà analogo a quello trovato nel caso piano. Sia $\gamma = w-\phi(z_0)$. Allora $w-\phi(z) = \gamma+\phi(z_0)-\phi(z)$, con $\phi(z_0)-\phi(z)$ di ordine $|z_0-z|^2$ (perché $\nabla\phi(z_0)=0$. Dunque

$$\frac{|\phi(z_0)-\phi(z)|}{(|z_0-z|^2+|w-\phi(z)|^2)^{3/2}}\le\frac{c}{|z_0-z|}$$

che è sommabile. Per il termine in γ devo sviluppare il denominatore, che è

$$|w-\phi(z)|^2 = \gamma^2+2\gamma(\phi(z_0)-\phi(z))+(\phi(z_0)-\phi(z))^2$$

Sviluppo il denominatore e stimo

$$\begin{aligned}&\frac{\gamma}{(|z_0-z|^2+\gamma^2+2\gamma(\phi(z_0)-\phi(z))+(\phi(z_0)-\phi(z))^2)^{3/2}}\\ &=\frac{\gamma}{(|z_0-z|^2+\gamma^2)^{3/2}}+R\end{aligned}$$

dove

$$|R|\le 3\frac{\gamma^2\,|\phi(z_0)-\phi(z)|+|\gamma|\,(\phi(z_0)-\phi(z))^2}{(|z_0-z|^2+\gamma^2)^{5/2}}.$$

Questo termine è sommabile, infatti

$$\begin{aligned}&\frac{\gamma^2\,|\phi(z_0)-\phi(z)|}{(|z_0-z|^2+\gamma^2)^{5/2}}\le c\frac{\gamma^2\,|z_0-z|^2}{(|z_0-z|^2+\gamma^2)^{5/2}}\\ &=\frac{1}{|z-z_0|}\frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^{5/2}}\le c\frac{1}{|z-z_0|}\end{aligned}$$

dove $\xi=\gamma/|z_0-z|$ e la stima è stata ottenuta notando che la funzione in ξ è limitata dall'alto. L'altro termine è più semplicemente di ordine $\gamma/|z_0-z|$, che è sommabile.
In conclusione,

$$\partial_{n_x}\nabla G(x-y) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\gamma}{|z-z_0|^2+\gamma^2}+W(x,y)$$

con $W(x,y)$ sommabile, che ha integrale che tende a zero se δ tende a 0. Invece la prima parte ha integrale limitato, anche se δ tende a 0. Noto ora che se $z \in U$ allora $|z - z_0| \leq \delta$. Poiché $W(x,y)$ è sommabile, uniformemente in γ, il suo limite per $\delta \to 0$ è zero. Dunque resta da calcolare:

$$-\frac{1}{4\pi}\int_U \frac{\gamma}{|z-z_0|^2+\gamma^2}\sqrt{1+|\nabla\phi(z_0)|^2}\,\mu(z,\phi(z))$$

Nota che per δ piccolo, la differenza tra $\int_U$ e $\int_{|z_0-z|<\delta}$ va a zero in δ, dunque posso procedere esattamente come nel caso piano, sostituendo a $\sqrt{1+|\nabla\phi(z_0)|^2}\,\mu(z,\phi(z))$ il valore in z_0 pari a $\mu(x_0)$, con un errore che posso mandare a zero per continuità. Infine, si ottene che l'integrale tende a

$$-\frac{1}{2}\text{sgn }(\gamma)\mu(x_0).$$

Lascio al lettore il caso generale, in cui $x \to x_0$ non necessariamente lungo n, dunque $x - y = (z' - z, w - \phi(z))$. Sarà necessario perturbare intorno a z' senza poter usare la semplificazione delle notazioni dovuta al fatto che $\nabla\phi(z_0) = 0$.
Comunque questa è la traccia, a futura memoria. Fisso z' e assumo, per semplicità notazionale, che $\nabla\phi(z') = 0$. L'integrando è

$$\frac{w-\phi(z)-(z'-z)\cdot\nabla\phi(z)}{(|z'-z|^2+|w-\phi(z)|^2)^{3/2}}$$

Riscrivo il numeratore come

$$(w-\phi(z')) + (\phi(z')-\phi(z)-(z'-z)\cdot\nabla\phi(z))$$

Il secondo termine è di ordine $|z'-z|^2$, dunque dà origine a un termine sommabile perché diviso per il denominatore diverge come $1/|z'-z|$. Riscrivo l'argomento della potenza al denominatore come

$$(|z'-z|^2+|w-\phi(z')|^2)\left(1+\frac{2(w-\phi(z'))(\phi(z')-\phi(z))+(\phi(z')-\phi(z))^2)}{|z'-z|^2+|w-\phi(z')|^2}\right)$$

Poiché ho potuto scegliere $\nabla\phi(z') = 0$, vale $|\phi(z')-\phi(z)| \leq c|z'-z|^2$ dunque

$$\frac{2|w-\phi(z')|\,|\phi(z')-\phi(z)|+(\phi(z')-\phi(z))^2)}{|z'-z|^2+|w-\phi(z')|^2} \leq c\frac{|w-\phi(z')|+|z-z'|^2}{1+|w-\phi(z')|^2/|\phi(z)-\phi(z')|^2} \leq c\delta^2 < 1/2$$

L'ultima disuguaglianza è vera se assumo, $|x-x_0| \leq c\delta^2$. Infatti

$$|w-\phi(z')| \leq |w-\phi(z_0)|+|\phi(z_0)-\phi(z')| \leq c\delta^2$$

(comunque basterebbe anche che fosse di ordine δ, in ogni caso il tutto è stimato da costante più piccola di 1). Rimane dunque da integrare

$$\frac{|w-\phi(z')|}{(|z'-z|^2+|w-\phi(z')|^2)^{3/2}}$$

e, procedendo come nel caso piano, si dimostra che l'integrale sulla regione $|z-z_0| \leq \delta$ è limitato uniformemente in δ.

15.5 Il problema di Laplace-Neumann

Il problema di Laplace-Neumann può essere tradotto in una equazione integrale al bordo. Cerchiamo infatti una soluzione di

$$\begin{cases} \triangle u(x) = 0 & \text{in } x \in \Omega \\ \partial_n u(x) = g(x) & \text{in } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

tra i potenziali di singolo strato $u_s = G*\mu$, con μ distribuzione di carica continua su $\partial\Omega$. Se $u = u_s$, allora

$$g(x) = \partial_n u(x) = \partial_n^- u_s(x) = \frac{1}{2}\mu(x) + \int_{\partial\Omega} \partial_{n_x} G(x-y)\mu(y)\sigma(\mathrm{d}y)$$

Dunque u_s è soluzione del problema di Laplace-Neumann se μ risolve l'equazione integrale di tipo Fredholm

$$\frac{1}{2}\mu(x) + \int_{\partial\Omega} \partial_{n_x} G(x-y)\mu(y)\sigma(\mathrm{d}y) = g(x)$$

Noto che per l'analisi svolta in precedenza, la singolarità di $\partial_{n_x} G(x-y)$ è di ordine $1/|x-y|$, da integrare in dimensione 2, e gli operatori integrali (su limitati) con singolarità $1/|x-y|^\alpha$, sono compatti in $\mathbb{R}^n$ se $\alpha < n$. Dunque l'operatore che compare nell'equazione integrale è compatto. Discuterò l'esistenza delle soluzioni solo dopo aver illustrato il caso del potenziale di doppio strato, ma osservo che la condizione di compatibilità su g (che $\int_{\partial\Omega} = 0$), implica che siamo nel caso di soluzione non unica, infatti u è determinata a meno di costanti, e inoltre il kernel dell'aggiunto non più essere banale.

15.6 Il problema di Laplace-Neumann esterno

Nello stesso modo posso tradurre il problema di Laplace-Neumann esterno in un'equazione integrale:

$$\begin{cases} \triangle u(x) = 0 & \text{in } x \in \overline{\Omega}^c \\ \partial_n u(x) = g(x) & \text{in } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

(per n intendo sempre la normale esterna a Ω). Se $u = u_s$, potenziale di singolo strato, $g = \partial_n^+ u_s$, dunque μ deve risolvere l'equazione integrale

$$-\frac{1}{2}\mu(0) + \int_{\partial\Omega} \partial_{n_x} G(x-y)\mu(y)\sigma(y)\,\mathrm{d}y = g$$

Faccio ora un'importante osservazione sull'unicità. Sia u_s soluzione dell'equazione integrale con condizione al bordo omogenea. Allora, in dimensione $\mathbb{R}^3$, per $|x| \to +\infty$, $|u_s(x)| = O(1/|x|)$ e $|\nabla u_s(x)| = O(1/|x|^2)$ (questi due andamenti si trovano usando il fatto che u_s è la convoluzione di G con una misura a supporto in un limitato, provarli per esercizio). Ne segue che, se B_R è una sfera di raggio R e centro 0, che contiene Ω. usando il teorema della divergenza,

$$\int_{B_R\setminus\Omega} |\nabla u_s|^2 = \int_{\partial B_R} u_s\, \partial_n u_s$$

(l'integrale sul bordo $\partial\Omega$ è 0 perché abbiamo assunto $\partial_n^+ u_s = 0$). L'integrando va a zero come $1/R^3$, mentre la misura di ∂B_R è $4\pi R^2$, dunque il membro di destra tende a 0 per $R \to +\infty$. Ne segue che

$$\int_{B_R\setminus\Omega} |\nabla u_s|^2 = 0,$$

dunque u_s è costante. D'altra parte, $u_s \to 0$ per $|x| \to +\infty$, e dunque è 0.
Lo stesso risultato vale in dimensione maggiore di 3, e in dimensione 2, dove però è necessario essere più accurati, infatti in dimensione 2 $u_s(x)$ diverge logaritmicamente, e ∇u_s va a zero solo come $1/|x|$, e dunque non sembra essere vero che l'integrale di $|\nabla u_s|$ è 0. D'altra parte u_s risolve il problema di Laplace-Neumann all'interno, con condizione al contorno

$$\partial_n^- u_s(x) = \mu(x)$$

Affinché il problema di Laplace-Neumann sia risolubile in un limitato è però necessario che sia verificata la condizione di compatibilià $\int_{\partial\Omega} \mu(x)\sigma(\mathrm{d}x) = 0$. Ma allora, u_s è un potenziale di strato singolo con carica totale nulla e quindi (completare per esercizio), per $|x| \to +\infty$ il primo termine significativo è quello di dipolo, dunque

$$u_s(x) = O(1/|x|) \quad \nabla u_s(x) = O(1/|x|^2)$$

In questo modo otteniamo che $|\nabla u_s| = 0$ e quindi abbiamo l'unicità nella classe dei potenziali di singolo strato in ogni dimensione.

Come conseguenza, si ottiene che il kernel dell'operatore

$$\mu \to -\frac{1}{2}\mu(x) + \int_{\partial\Omega} \partial_{n_x} G(x-y)\mu(y)\sigma(\mathrm{d}y)$$

è banale. Infatti, se non fosse banale u_s sarebbe una soluzione al problema di Laplace-Neumann esterno con condizione omogenea, e dunque $u_s = 0$ fuori da Ω. Inoltre u_s risolve il problema di Laplace all'interno, ed essendo continua in $\mathbb{R}^n$, vale 0 al bordo. Per unicità delle soluzioni di Laplace-Dirichlet, u_s è identicamente nulla, e quindi il salto della derivata normale, pari a $-\mu$, è nullo. Dunque $\mu = 0$. Questa osservazione sarà fondamentale per risolvere il problema di Laplace-Dirichlet.

15.7 Unicità per problema di Laplace-Neumann esterno

Nel punto precedente, ho provato l'unicità delle soluzioni per il problema di Laplace-Neumann nella classe di quelle ottenute come potenziale di strato singolo.

Questo argomento può essere generalizzato a tutte le soluzioni del problema di Laplace-Neumann, che tendono a 0 all'infinito. Infatti, se u è soluzione

$$0 = \int_{B_R \setminus \Omega} \triangle u = \int_{\partial B_R} \partial_n u(x)\sigma(\mathrm{d}x)$$

(sul bordo di Ω l'integrale è nullo perché stiamo considerando soluzioni con condizioni di Neumann omogenee al bordo). Sia ora $\tilde{u}$ una funzione che coincide con u su B_R^c e prolungata C^∞ dentro B_R. Sia f il suo laplaciano, che ha supporto compatto. $\tilde{u}$ soddisfa

$$\triangle \tilde{u} = f$$

inoltre $\partial_n u = 0$ su ∂B_r. Integrando in B_r si ottiene che $\int_{B_R} f = \int_{\partial B_R} \partial_n \tilde{u} = 0$. Sia ora $v = -G * f$. La differenza tra $\tilde{u}$ e v è una funzione armonica su R^n. Per costruzione, in ogni dimensione maggiore o uguale a 2, v tende a 0 all'infinito (la funzione di Green non tende a zero in due dimensioni, ma la carica totale è nulla, dunque la convoluzione tende a 0; si noti che in dimensione uno, se la carica totale è nulla, l'energia potenziale tende a costante, non necessariamente nulla). Poiché $\tilde{u}$ coincide con u fuori da B_R, e ho assunto che u tende a 0 all'infinito, per il teorema di Liouville la differenza $v - \tilde{u}$ è zero, perché è una funzione armonica che tende a zero all'infinito (dimostrare per esercizio a partire dal teorema di Liouville). Quindi $\tilde{u} = G * f$, con f a integrale nullo, dunque u tende a 0 all'infinito come $1/|x|^{n-1}$, e il suo gradiente come $1/|x|^n$.
Posso ora calcolare

$$\int_{B_R \Omega} |\nabla u|^2 = \int_{\partial B_R} u \, \partial_n u = O(R^{n-1}/R^{(n+n-1)})$$

che tende a 0, dunque u è costante, ma tendendo a 0 all'infinito, u è nulla.

Naturalmente non c'è unicità nella classe delle funzioni limitate, perché le costanti risolvono il problema.

Esercizio 38.

Sia μ è una densità di carica $L^1(\mathbb{R}^n)$, a supporto compatto, sia $u = G * \mu$, con G funzione di Green in dimensione $n \geq 3$

$$G(x) = \frac{1}{(n-2)|\,\partial B^n|}\frac{1}{|x|^{n-2}}$$

dove $|\,\partial B^n|$ è la misura del bordo della palla unitaria in dimensione n. Mostrare che

$$\lim_{|x|\to+\infty} |x|^{n-2}\, u(x) = \frac{q}{|\,\partial B^n|}$$

dove $q = \int \mu$ è la carica totale. Si noti che in dimensione 2 l'asserto è falso ($G = -\frac{1}{2}\log|x|$).

Si mostri che in ogni dimensione:

$$\limsup_{|x|\to+\infty} |x|^{n-1}\,|\nabla u(x)| \leq c|q|$$

dove c è una costante.

Si mostri che, se $n \geq 2$ e $q = 0$,

$$\limsup_{|x|\to+\infty} |x|^{n-1}\,|u(x)| \leq c, \quad \limsup_{|x|\to+\infty} |x|^{n}\,|\nabla u(x)| \leq c|q|.$$

Usare questa stima per concludere che, in ogni dimensione, per $R \to +\infty$,

$$\int_{B_R} |u|\,|\nabla u| \leq cR^{n-1}\frac{1}{R^{n-1}R^n} = c\frac{1}{R^n} \to 0$$

Analizzare, per completezza, anche il caso unidimensionale, in cui vale lo stesso risultato.

15.8 Potenziale di doppio strato

Se μ è una funzione limitata su $\partial\Omega$, il potenziale di doppio strato generato da μ è definito da

$$u_d(x) = \int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} G(x-y)\mu(y)\sigma(\mathrm{d}y)$$

(spesso nei testi viene definito con il $-$, ma visto che in questa trattazione i segni sono cruciali, preferisco usare la definizione meno insidiosa).

Ricordo che $n \cdot \nabla G(x)$ è il potenziale generato da un dipolo nell'origine orientato come n, infatti, in distribuzione, questo potenziale è generato da $n \cdot \nabla\delta(x)$, cioè dal limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}(\delta(x+\varepsilon n) - \delta(x-\varepsilon n))$$

che fisicamente corrisponde a considerare due cariche di segno molto vicine, e abbastanza grande da poter vedere il potenziale "prima" della cancellazione dovuta ai segni opposti.

Il potenziale di doppio strato è una funzione armonica in $\mathbb{R}^3 - \partial\Omega$. Inoltre, se $x_0 \in \partial\Omega$, il nucleo $\partial_{n_y}G(x-y)$ è sommabile intorno alla singolarità, perché diverge come $1/|x-y|$, sommabile in dimensione 2 (ometto la dimostrazione, perché è analoga a quella fatta per la derivata normale del potenziale di strato singolo).
Il potenziale di singolo strato è discontinuo sul bordo. Per dimostrarlo, considero prima un caso particolare, il cui contenuto prende il nome di lemma di Gauss.

15.9 Lemma di Gauss

Ricordo che se u e v sono due funzioni regolari in Ω e di classe C^1 fino al bordo, allora vale la II identità di Green:

$$\int_\Omega (u(y)\triangle v(y) - v(y)\triangle u(y))\,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} (u(y)\,\partial_{n_y} v(y) - v(y)\,\partial_{n_y} u(y))\sigma(\mathrm{d}y)$$

Scegliendo $v(y) = G(x-y)$ si ottiene la III identità di Green, che viene dimostrata attraverso la tecnica dell'isolamento della singolarità. Uso la stessa tecnica qui, scegliendo $u = 1$ in Ω. Sia $B_\varepsilon = B_\varepsilon(x)$, e sia $\Omega_\varepsilon = \Omega\backslash B_\varepsilon$. Riscrivo la II identità di Green per questo dominio, usando il fatto che, fuori da B_ε, $\triangle G(x-y) = 0$, e che le derivate di u sono nulle. Il membro di sinistra è dunque zero, a destra rimane

$$0 = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \partial_{n_y} G(x-y)\sigma(\mathrm{d}y)$$

Se $x \notin \Omega$, per ε sufficientemente piccolo $\Omega_\varepsilon = \Omega$, e dunque $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega$. Dunque

$$\int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} G(x-y)\sigma(\mathrm{d}y) = 0$$

Se invece $x \in \Omega$, per ε sufficientemente piccolo $\partial\Omega_\varepsilon = \partial B_\varepsilon \cap \Omega$. Dunque, ricordando che la normale esterna a Ω_ε su ∂B_ε è opposta alla normale esterna a B_ε, si ha

$$\int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} G(x-y)\sigma(\mathrm{d}y) = -\frac{1}{4\pi}\int_{B_\varepsilon} \frac{y-x}{|y-x|}\cdot\frac{y-x}{|y-x|^3}\sigma(\mathrm{d}y) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_{B_\varepsilon}\sigma(\mathrm{d}y) = -1$$

Infine, supponiamo che $x \in \partial\Omega$. Allora

$$\partial\Omega_\varepsilon = (\partial\Omega\backslash B_\varepsilon) \cup (\partial B_\varepsilon \cap \Omega)$$

Il contributo su $\partial\Omega\backslash B_\varepsilon$ tende a

$$\int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} G(x-y)\sigma(\mathrm{d}y).$$

Il secondo contributo è

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_{\substack{|x-y|=\varepsilon\\ y\in\Omega}} \sigma(\mathrm{d}y)$$

che, se x è un punto in cui $\partial\Omega$ ha vettore normale n, tende a

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_{\substack{|x-y|=\varepsilon\\ (y-x)\cdot n>0}} \sigma(\mathrm{d}y) = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$$

(provare questa affermazione per esercizio, usando una carta locale centrata in x per calcolare l'integrale). Dunque

$$\int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} G(x-y)\sigma(\mathrm{d}y) + \frac{1}{2} = 0.$$

In definitiva:

$$\int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} G(x-y)\sigma(\mathrm{d}y) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in \Omega \\ -1/2 & \text{se } x \in \partial\Omega \\ 0 & \text{se } x \notin \overline{\Omega} \end{cases}$$

Posso quindi osservare che, se $x_0 \in \partial\Omega$

$$\lim_{x\to x_0^\pm}\int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} G(x-y)\sigma(\mathrm{d}y) = \pm\frac{1}{2} + \int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} G(x_0-y)\sigma(\mathrm{d}y)$$

infatti il secondo integrale è $-1/2$, dunque la somma è 0 se x è fuori da $\overline{\Omega}$, ed è -1 se x è dentro Ω.

Cioè il potenziale di doppio strato, per $\mu = 1$, ha effettivamente in salto lungo la frontiera. Lo stesso accade per μ non costante.

15.10 Il salto del potenziale di doppio strato

Data μ continua, sia

$$u_d(x) = \int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} G(x-y)\mu(y)\sigma(\mathrm{d}y)$$

e sia $x_0 \in \partial\Omega$. Riscrivo u_d usando il lemma di Gauss, supponendo $x \in \Omega$

$$u_d(x) = \int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} G(x-y)(\mu(y) - \mu(x_0)\sigma(\mathrm{d}y) - \mu(x_0) =$$

$$\int_{\partial\Omega} \partial_{n_y}(G(x-y) - G(x_0-y)(\mu(y) - \mu(x_0)\sigma(\mathrm{d}y) + \int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} G(x_0-y)(\mu(y) - \mu(x_0)\sigma(\mathrm{d}y) - \mu(x_0) =$$

$$R + \int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} G(x_0-y)\mu(y)\sigma(\mathrm{d}y) + \frac{1}{2}\mu(x_0) - \mu(x_0) = -\frac{1}{2}\mu(x_0) + \int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} G(x_0-y)\mu(y)\sigma(\mathrm{d}y) + R$$

Provo che il termine

$$R = \int_{\partial\Omega} \partial_{n_y}(G(x-y) - G(x_0-y))(\mu(y) - \mu(x))\sigma(\mathrm{d}y)$$

tende a 0 per $x \to x_0$. Sia $B_\delta = B_\delta(x_0)$. Come nel caso della derivata normale del potenziale di strato singolo,

$$\int_{\partial\Omega\cap B_\delta} |\, \partial_{n_y} G(x-y)| \leq c$$

e la stessa stima vale per $x = x_0$. Dunque, per continuità di μ e convergenza dominata, l'integrale tende a 0. L'integrale sulla regione $\partial\Omega \backslash B_\delta$ tende invece a 0 per la continuità di $\partial_{n_y}|G(x-y)|$ lontano dalla singolarità.

In definitiva, abbiamo provato che

$$\lim_{x\to x_0^\pm} u_d(x) = \pm\frac{1}{2}\mu(x_0) + \int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} G(x-y)\mu(y)\sigma(\mathrm{d}y)$$

15.11 Il problema di Laplace-Dirichlet

Sia $K\mu$ l'operatore

$$K\mu(x) = \int_{\partial\Omega} \partial_{n_y} G(x-y)\mu(y)\sigma(\mathrm{d}y)$$

definito e compatto da $L^2(\partial\Omega)$ in sé (vedi le considerazioni svolte precedentemente).
Posso trasformare il problema di Laplace-Dirichlet in una equazione integrale per μ. Infatti, se cerco la soluzione di

$$\begin{cases} \triangle u(x) = 0 & \text{per } x \in \Omega \\ u(x) = f(x) & \text{per } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

nella forma $u = u_d$, la condizione al contorno diventa

$$f = \lim_{x\to x_0^-} u_d(x) = -\frac{1}{2}\mu(x_0) + K\mu(x_0) \tag{10}$$

Quindi posso trovare una soluzione se trovo μ che risolve questa equazione di Fredholm con nucleo compatto.

Per verificare la sua risolubilità per qualunque f, devo mostrare che il nucleo dell'aggiunto è vuoto. Determiniamo l'aggiunto dell'operatore K. Poiché il nucleo di K è

$$n_y \cdot \nabla_y G(x-y) = -n_y \cdot (\nabla G)(x-y)$$

Il nucleo dell'aggiunto K^* è

$$-n_x \cdot (\nabla G)(y-x) = n_x \cdot \nabla_x G(x-y) = \partial_{n_x} G(x-y)$$

K^* è dunque proprio il nucleo che compare nella derivata normale del potenziale di singolo strato. L'equazione (10) ha soluzione per ogni f se e solo se

$$-\frac{1}{2}\mu(x_0) + K^*\mu(x_0) = 0$$

ha solo la soluzione banale, ma questo è esattamente quello che succede. Infatti, come abbiamo mostrato precedentemente, la soluzione μ di questa equazione genera un potenziale di strato singolo u_s che risolve l'equazione di Neumann nel dominio esterno, che però risulta essere nulla. D'altra parte u_s è continuo, dunque u_s risolve anche l'equazione di Laplace all'interno di Ω con condizione nulla al bordo. Per unicità, ne segue che u_s è identicamente nulla, dunque lo sono anche $\partial^{\pm}_{n_x} u_s = 0$. Ne segue che il salto di u_s è zero, ma allora, infine, $\mu = 0$.

Quindi il nucleo dell'aggiunto è banale, e dunque l'equazione di Fredholm associata al problema di Laplace-Dirichlet ha soluzione per ogni f.

Rimane un ultimo dettaglio da sistemare: tutta questa analisi e anche parte delle dimostrazioni presuppongono che μ sia continua. Dunque è necessario assicurarsi che le eventuali soluzioni delle equazioni di Fredholm per K e K^* sono continue.

15.12 La continuità delle soluzioni

Considero un caso modello, al quale ci si può ridurre passando a carte locali. Sia D un dominio limitato in $\mathbb{R}^n$. Sia A un operatore integrale della forma

$$A\mu(x) = \int_D \frac{a(x,y)}{|x-y|^\alpha}\mu(y)$$

con $\alpha < n$ e $a(x,y)$ funzione regolare. Ho già provato che un operatore di questo tipo è compatto nel punto 10.9, a proposito dei nuclei singolari. Ora mostro che se μ risolve

$$\mu + A\mu = f$$

con f continua, allora μ è continua.

Siano A_δ e A_r gli operatori

$$A_\delta\mu(x) = \int_{D\cap\{|x-y|<\delta\}} \frac{a(x,y)}{|x-y|^\alpha}\mu(y) \quad A_r\mu(x) = \int_{D\cap\{|x-y|\geq\delta\}} \frac{a(x,y)}{|x-y|^\alpha}\mu(y)$$

È semplice provare che se $\mu \in L^2$, allora la funzione $A_r\mu(x)$ è continua. Infatti

$$|A_r\mu(x) - A_r\mu(x_0)| = \left| \int_{D\cap\{|x-y|\geq\delta\}} \frac{a(x,y)}{|x-y|^\alpha}\mu(y)\sigma(\mathrm{d}y) - \int_{D\cap\{|x_0-y|\geq\delta\}} \frac{a(x_0,y)}{|x_0-y|^\alpha}\mu(y)\sigma(\mathrm{d}y) \right|$$
$$\leq \int_{D\cap\{|x-y|\geq\delta\}} \left| \frac{a(x,y)}{|x-y|^\alpha} - \frac{a(x_0,y)}{|x-y|^\alpha} \right| |\mu(y)|\sigma(\mathrm{d}y) + \int_{Q_\delta} \frac{|a(x_0,y)|}{|x_0-y|^\alpha} |\mu(y)|\sigma(\mathrm{d}y)$$

dove

$$Q_\delta = D \cap (\{|x-y| \geq \delta\} \,\Delta\, \{|x_0 - y| \geq \delta\})$$

L'integrale su Q_δ è stimato da

$$\|a\|_\infty \|\mu\|_{L^2} \sqrt{|Q_\delta|}$$

e la misura di Q_δ va a zero come $\delta^{n-1}|x-x_0|$. Il primo termine va a 0 se $x \to x_0$, per la continuità in x_0 di $\frac{|a(x,y)}{|x-y|^\alpha}$, uniforme in y se $|x-y| > \delta$.

Studio ora il termine A_δ. Intanto noto che

$$\int_D |A_\delta g(x)|^2 \leq \|a\|_\infty^2 \int_D \mathrm{d}x \int_{D\cap\{|x-y|<\delta\}} \mathrm{d}y_1 \int_{D\cap\{|x-y|<\delta\}} \mathrm{d}y_2 \frac{1}{|x-y_1|^\alpha |x-y_2|^\alpha} |g(y_1)|\,|g(y_2)|$$

da cui, usando che

$$|g(y_1)|\,|g(y_2)| \leq \frac{1}{2}\left(g(y_1)^2 + g(y_2)^2\right)$$

si ottiene che

$$\int_D |A_\delta g(x)|^2 \leq \|a\|_\infty^2 \|g\|_2 \left(\int_{|z|<\delta} \mathrm{d}z \frac{1}{|z|^\alpha}\right)^2$$

e quindi la norma operatoriale in L^2 di A è stimata da

$$\|A\| \leq c\|a\|_\infty \delta^\beta$$

con $\beta = n - \alpha > 0$. D'altra parte, anche la norma operatoriale in L^∞ è piccola, infatti

$$|A_\delta g(x)| \leq \|a\|_\infty \|g\|_\infty \int_{|z|<\delta} \mathrm{d}z \frac{1}{|z|^\alpha} = c\delta^\beta \|a\|_\infty \|g\|_\infty$$

Sia ora δ abbastanza piccolo tale che $\|A_\delta\| < 1$. Posso riscrivere l'equazione come

$$(\mathbf{I} - A_\delta)\mu = A_r\mu + f$$

A δ fissato, al secondo membro compaiono funzioni continue (f lo è per ipotesi, $A_r\mu$ lo è non appena μ esiste in L^2). Se provo che l'inverso di $\mathbf{I} - A_\delta$ porta una funzione continua g in una funzione continua, concludo che se $\mu \in L^2(D)$, allora μ è continua perché

$$\mu = (\mathbf{I} - A_\delta)^{-1}(A_r\mu + f).$$

L'inverso si ottiene con la serie di Neumann, che converge in L^2 perché δ è piccolo. Ma se δ è piccolo, la serie converge anche nella norma uniforme, infatti, come si ottiene iterando la stima per $|Ag|(x)$ fatta sopra,

$$|A_\delta^n g| = (c\delta^\beta)^n \|a\|_\infty^n \|g\|_\infty.$$

Per ottenere la tesi, basta dunque provare che A porta funzioni continue in funzioni continue e invocare il fatto che il limite uniforme di funzioni continue è continuo. Sia $\eta > 0$, definisco

$$a_\eta = \sup_{\substack{x,x_0,z\in D \\ |x-x_0|<\eta}} |a(x, z+x) - a(x_0, z+x_0)|, \quad g_\eta = \sup_{\substack{x,x_0\in D \\ |x-x_0|<\eta}} |g(x) - g(x_0)|$$

Sia $|x - x_0| = \eta$, e sia $D_\delta(x) = \{z : \, |z| < \varepsilon, \; x + z \in \Omega\}$

$$|A_\delta g(x) - A_\delta g(x_0)| \leq \int_{D_\delta(x)} \frac{1}{|z|^\alpha} |a(x, z+x)g(z+x) - a(x_0, z+x_0)g(z+x_0)| +$$

$$\left| \int_{D_\delta(x)} \frac{1}{|z|^\alpha} |a(x_0, z+x_0)g(z+x_0) - \int_{D_\delta(x_0)} \frac{1}{|z|^\alpha} |a(x_0, z+x_0)g(z+x_0) \right|$$

Il primo termine è stimato da

$$c\delta^\beta(a_\eta\|g\|_\infty + \|a\|_\infty g_\eta)$$

e tende a 0 per $x \to x_0$. Il secondo termine è stimato da

$$\|a\|_\infty \, \|g\|_\infty |Q_\delta|$$

dove

$$Q_\delta = D_\delta(x) \ \Delta \ D_\delta(x_0) = D \cap (\{|x-y| \geq \delta\} \ \Delta \ \{|x_0 - y| \geq \delta\})$$

la cui misura tende a 0 se $x \to x_0$.
Quindi $Ag(x)$ è continua se g è continua; ne segue che $A^n g$ è continua, e, poiché la serie converge uniformemente, $(\mathbf{I} - A_\delta)^{-1}g$ è continua se g è continua.

15.13 La soluzione del problema di Laplace-Neumann

Possiamo infine affrontare il problema di Laplace-Neumann interno. Come abbiamo visto, cercando una soluzione del tipo potenziale di strato singolo, si ottiene un'equazione di Fredholm per la densità di carica al bordo:

$$\frac{1}{2}\mu + K^*\mu = g$$

dove g è la condizione al bordo per la derivata normale.
Sappiamo già che c'è una condizione necessaria per l'esistenza di una soluzione u, infatti

$$0 = \int_\Omega \triangle u = \int_{\partial\Omega} \partial_n u = \int_{\partial\Omega} g.$$

D'altra parte questa condizione di ortogonalità per g è anche conseguenza diretta dell'equazione, infatti, indicando con (f, g) il prodotto scalare su Ω, si ha

$$(1, g) = \frac{1}{2}(1, \mu) + (1, K^*\mu) = \frac{1}{2}(1, \mu) + (K1, \mu) = \frac{1}{2}(1, \mu) - \frac{1}{2}(1, \mu) = 0$$

dove l'uguaglianza $k1 = -1/2$ è conseguenza del lemma di Gauss. Vederemo, con una certa fatica, che la condizione $(1, g) = 0$ è necessaria e sufficiente per l'esistenza delle soluzioni.

In accordo alla teoria degli operatori compatti, l'equazione per μ ha soluzione per ogni g se l'equazione aggiunta omogenea ha solo la soluzione nulla. L'equazione aggiunta omogenea è

$$\frac{1}{2}\tilde{\mu} + K\tilde{\mu} = 0$$

Ricordo che se $\tilde{\mu}$ risolve questa equazione, allora il potenziale di doppio strato generato da $\tilde{\mu}$ vale a 0 sul bordo esterno. L'equazione aggiunta ha soluzioni non banali, infatti se $\tilde{\mu} = 1$, il Lemma di Gauss garantisce che $K1 = -1/2$, e dunque l'equazione è soddisfatta.

Dimostreremo che le uniche soluzioni dell'equazione omogenea associata sono le costanti, e dunque l'equazione di partenza è risolubile se e solo se g è ortogonale alle costanti, che è proprio la condizione di compatibilità che ci era già nota.

Il punto chiave di questa dimostrazione è che il potenziale di doppio strato è discontinuo al bordo, ma la sua derivata normale è continua, come mostreremo nel paragrafo successivo. Sia dunque $\tilde{\mu}$ una soluzione dell'equazione omogenea associata, e sia $\tilde{u}_d$ il potenziale di doppio strato da essa generato. Fuori da Ω, $\tilde{u}_d$ è nulla, dunque $\partial_n^+\tilde{u}_d$ è nulla sul bordo. Poiché la derivata normale è continua, $\tilde{u}_d$ risolve anche il problema di Laplace-Neumann all'interno, con condizione omogenea al bordo, dunque $\tilde{u}_d$ è costante all'interno, infatti

$$\int_\Omega |\nabla \tilde{u}_d|^2 = \int_{\partial\Omega} \tilde{u}_d \, \partial_n \tilde{u}_d = 0$$

Dunque
$$\tilde{\mu} = \tilde{u}_d^+ - \tilde{u}_d^- = 0 - \text{cost}$$
dove con $\tilde{u}_d^{\pm}$ indico il limite da fuori e da dentro di $\tilde{u}_d$, quindi $\tilde{\mu}$ è costante, come volevamo dimostrare.

15.14 La derivata normale del potenziale di doppio strato

Sia μ una distribuzione di dipolo continua su $\partial\Omega$, e sia u_d il potenziale di doppio strato generato da μ. Sia $x_0 \in \partial\Omega$, e siano $u_d^{\pm}(x_0)$ i limiti da fuori e da dentro di u_d in x_0. Sia n la normale esterna in x_0. Proverò che
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}(u_d(x_0+\varepsilon n) - u_d^+(x_0)) - \frac{1}{\varepsilon}(u_d^-(x_0) - u_d(x_0-\varepsilon n))\right) = 0$$
cioè $\partial_n^+ u_d(x_0) = \partial_n^- u_d(x_0)$. Valuto la differenza tra i due termini in parentesi:
$$D = u_d(x_0+\varepsilon n) - u_d^+(x_0) - u_d^-(x_0) - u_d(x_0-\varepsilon n) = u_d(x_0+\varepsilon n) + u_d(x_0-\varepsilon n) - u_d^+(x_0) - u_d^-(x_0)$$
$$= \int_{\partial\Omega}\big(\partial_{n_y}G(x_0+\varepsilon n - y)\,\partial_{n_y}G(x_0-\varepsilon n-y) - 2\,\partial_{n_y}G(x_0-y)\big)\,\mu(y)\sigma(\mathrm{d}y)$$
Per il lemma di Gauss,
$$\int_{\partial\Omega} G(x_0+\varepsilon n - y)\sigma(\mathrm{d}y) = 0$$
$$\int_{\partial\Omega} G(x_0-\varepsilon n - y)\sigma(\mathrm{d}y) = -1$$
$$\int_{\partial\Omega} G(x_0 - y)\sigma(\mathrm{d}y) = -1/2$$
dunque
$$\int_{\partial\Omega}\big(\partial_{n_y}G(x_0+\varepsilon n - y) + \partial_{n_y}G(x_0-\varepsilon n-y) - 2\,\partial_{n_y}G(x_0-y)\big)\,\sigma(\mathrm{d}y) = 0$$
Quindi si può scrivere
$$D = \int_{\partial\Omega}\big(\partial_{n_y}G(x_0+\varepsilon n - y) + \partial_{n_y}G(x_0-\varepsilon n-y) - 2\,\partial_{n_y}G(x_0-y)\big)\,(\mu(y)-\mu(x_0))\sigma(\mathrm{d}y) = 0$$
e la tesi è dimostrata se proviamo che D tende a zero più rapidamente di ε. Come al solito, sia $B_\delta = B_\delta(x_0)$. L'integrale su $\partial\Omega\backslash B_\delta$ è di ordine ε^2, perché lontano dalla singolarità il nucleo è regolare, ed è la derivata seconda discreta di passo ε nella direzione di n. Per l'integrale in $\partial\Omega\cap B_\delta$ considero solo il caso del bordo rettificato. Sia dunque $x_0 = 0$, $n = (0,0,1)$, sia $y = (y_1, y_2)$
$$\partial_{n_y}G(x_0 \pm \varepsilon n - y) = \frac{1}{4\pi}\frac{\pm\varepsilon}{(|y|^2+\varepsilon^2)^{3/2}}$$
$$\partial_{n_y}G(x_0 - y) = 0$$
Dunque la differenza è proprio zero. Lascio al lettore il tentativo di provare nel caso generale che l'integrale su $\partial\Omega\cap B_\delta$ tende a 0 più rapidamente di ε.

Appunti per un tentativo di calcolo:
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\delta \frac{\varepsilon}{(\rho^2+\varepsilon^2)^{3/2}}\rho\,\mathrm{d}\rho = \mathrm{sgn}\,(\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\delta^2+\varepsilon^2}}$$
Se scelgo $\varepsilon > 0$, posso derivare in ε e ottengo
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\delta \frac{\rho^2 - 2\varepsilon^2}{(\rho^2+\varepsilon^2)^{5/2}}\rho\,\mathrm{d}\rho = \frac{\delta^2}{(\delta^2+\varepsilon^2)^{3/2}}$$

che purtroppo è divergente in δ, se prima passo al limite $\varepsilon \to 0$. Comunque il Bitsadze usa μ regolare, e forse stavolta è indispensabile, solo che poi va controllato che le soluzioni dell'equazione di Fredholm conservano la regolarità...

15.15 Conduttori carichi

Come noto dai corsi di fisica generale, in un conduttore carico in condizioni di equilibrio, la carica si distribuisce sulla superficie. Se così non fosse, ci sarebbe un campo elettrico interno (per il teorema di Gauss, intorno a una carica c'è sempre un flusso del campo), dunque gli elettroni del conduttore verrebbero accelerati, contro l'ipotesi di equibrio. Per lo stesso motivo, la superficie del conduttore deve essere equipotenziale, in modo che il campo sia normale alla superficie (altrimenti gli elettroni al bordo verrebbero accelerati).
In questa descrizione fisica, si tiene in conto della carica aggiunta e dell'esistenza di elettroni liberi di muoversi nel conduttore.
Dal punto di vista matematico, la distribuzione di cariche al bordo ν genera un potenziale di singolo strato. Se il sistema è in equilibrio, questa distribuzione deve minimizzare l'energia.
Per una distribuzione di carica ρ a supporto compatto, che genera un potenziale $G * \rho$ l'energia su tutto lo spazio è

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 &= \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2}\int_{B_R(0)} |\nabla u|^2 \\ &= \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2}\int_{\partial B_R} u\,\partial_n u + \frac{1}{2}\int u\rho \end{aligned}$$

In dimensione 3, u decade come $1/|x|$, ∇u come $1/|x|^2$ quindi il termine di bordo va a 0 (in dimensione due non è così). Quindi per una distribuzione di strato singolo ν, l'energia è

$$E = \frac{1}{2}\int_{(\partial\Omega)^2} \nu(x)G(x-y)\nu(y)\sigma(\mathrm{d}x)\sigma(\mathrm{d}y)$$

Assegnato il valore della carica, sia $\int \nu = 1$, trovare il minimo per E corrisponde a trovare i punti stazionari del funzionale vincolato

$$E - \gamma\left(\int_{\partial\Omega} \nu - 1\right)$$

E è una forma quadratica, ed è immediato verificare che la condizione di stazionarietà è

$$\int_{\partial\Omega} G(x-y)\nu(y)\sigma(\mathrm{d}y) = \gamma$$

da risolvere con il vincolo $\int \nu = 1$. Se questa soluzione esiste, allora il potenziale di singolo strato $u_s = G * \nu$ è costante al bordo, e, poiché all'interno verifica l'equazione di Laplace, è costante in tutto $\bar{\Omega}$. Ne segue che $\partial_n^- u_s = 0$, e dunque ν deve risolvere l'equazione

$$\frac{1}{2}\nu + K^*\nu = 0$$

Come abbiamo visto, l'equazione aggiunta ha kernel non banale di dimensione 1 (il kernel è costituito dalle funzioni costanti). Dunque, esiste una ed una sola soluzione del problema assegnato, a patto di dimostrare che la soluzione ν dell'equazione al bordo ha integrale non nullo (altrimenti non esisterebbe soluzione a carica totale assegnata non nulla).
Per dimostrare questa affermazione, servono due passaggi intermedi. Sia $\rho(x) = \nu(x)\delta(x \in \partial\Omega)$. Passando in Fourier,

$$E = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\lambda\, |\lambda|^2 |\hat{\rho}(\lambda)|^2$$

dove

$$\hat{\rho}(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\partial\Omega} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x} \nu(x) \sigma(\mathrm{d}x)$$

Dunque E è un funzionale semidefinito positivo. Noto inoltre che $\mu \to G*\mu$ è un operatore compatto autoaggiunto, dunque è diagonalizzabile. D'altra parte, l'equazione al bordo

$$\int_{\partial\Omega} G(x-y)\nu(y)\sigma(\mathrm{d}y) = 0$$

ha solo la soluzione nulla, come abbiamo già visto (infatti il potenziale di singolo strato u_2 generato da ν è nullo ovunque, dunque il salto della sua derivata normale, pari a $-\nu$ è nullo). Quindi se $\nu \neq 0$, E è non nulla. Supponiamo ora che ν non nulla risolva $\frac{1}{2}\nu + K^*\nu = 0$. Al bordo

$$\int_{\partial\Omega} G(x-y)\nu(y)\sigma(\mathrm{d}y) = \gamma$$

con γ non nullo. Moltiplicando per ν e integrando si ha che

$$\gamma \int_{\partial\Omega} \nu\sigma(\mathrm{d}x) = 2E \neq 0$$

dunque ν ha integrale non nullo.

Dovrebbe essere possibile dimostrare che ν ha segno definito, ma in questo momento non mi viene una dimostrazione semplice.

15.16 Qualche ossevazione

Si può trasformare il problema di Laplace-Dirichlet esterno

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \text{in } \overline{\Omega}^c \\ u = f & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

nell'equazione di Fredholm

$$\frac{1}{2}\mu + K\mu = f$$

, cercando u come il potenziale di doppio strato generato da μ. Questa equazione non ha soluzione unica, infatti, se $\mu = 1$ si ottiene una soluzione non nulla per il caso $f = 0$. Questo non significa che il problema di Laplace-Dirichlet esterno abbia più di una soluzione, infatti $\mu = 1$ genera la soluzione nulla.

Rimane il dubbio se la soluzione esista per ogni f. Per l'equazione di Fredholm la risposta è no, perchè f deve essere ortogonale alla distribuzione ν determinata nel punto precedente. Questo non vuol dire che il problema di Laplace-Dirichlet non abbia soluzione. Si consideri come esempio $\Omega = B_1(0)$. In tal caso ν è costante, e il potenziale di singolo strato generato da ν risolve il problema di Lapalce-Dirichlet con condizione costante γ su $\partial B_1(0)$ (notare comunque che questo potenziale è uguale a $gamma/|x|$). D'altra parte, non esiste nessuna distribuzione di dipolo che generi un potenziale non nullo sulla frontiera esterna. Infatti, per simmetria dovrebbe essere una distribuzione costante, che però, per il Lemma di Gauss, genera un potenziale nulla sulla frontiera esterna.

Quello che mi sembra accadere nel caso generale, è che se $f = \nu$ non esiste una soluzione di doppio strato per il problema, ma esiste una soluzione di altro tipo. Si noti che per il problema esterno con condizione costante al bordo, esiste sempre la soluzione di strato singolo data da ν.

Infine, ci potrebbe chiedere se non sarebbe più semplice cercare la soluzione del problema di Laplace-Dirichlet nella forma di un potenziale di singolo strato. Se f è il dato al bordo, l'equazione da risolvere sarebbe

$$\int_{\partial\Omega} G(x-y)\mu(y)\sigma(\mathrm{d}y) = g(x) \quad \text{per } x \in \partial\Omega$$

Il membro di destra è l'azione di un operatore integrale su μ. Si tratta di un operatore compatto e autoaggiunto (provare per esecizio). Il kernel di questo operatore è banale (come abbiamo visto sopra), ma la risoluzione di questa equazione per ogni $g \in L^2$ è comunque impossibile, perché gli operatori compatti non hanno inverso continuo, e il range dell'operatore, in questo caso, è solo denso.

Esercizio 39. Domini non semplicemente connessi

Prova a formulare il problema di Laplace-Dirichlet per un dominio non semplicemente connesso (per semplicità con un solo buco), tentando di riprodurre la teoria appena sviluppata.