

Appunti di Meccanica Hamiltoniana per il corso di IFM

12 maggio 2017

Indice

1	Formalismo hamiltoniano	3
1	Dalla lagrangiana all'hamiltoniana	3
2	* La trasformata di Legendre	4
3	Lagrangiane e hamiltoniane naturali	5
4	* Campi a divergenza nulla e sistemi hamiltoniani	6
5	Variabili cicliche e riduzione dei gradi di libertà	6
2	Trasformazioni simplettiche e parentesi di Poisson	8
1	Trasformazioni di coordinate	8
2	Definizione di trasformazioni di coordinate	8
3	Trasformazioni simplettiche	9
4	Parentesi di Poisson	10
5	Proprietà delle parentesi di Poisson	11
6	Parentesi di Poisson, equazioni di Hamilton, integrali primi	13
7	Un esempio	14
8	* Flussi commutanti	15
9	Flussi hamiltoniani commutanti	17
3	L'equazione di Hamilton-Jacobi	18
1	Un principio variazionale per le equazioni di Hamilton	18
2	$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt$	18
3	Funzioni generatrici	20
4	Simpletticità del flusso	23
5	L'equazione di Hamilton-Jacobi	24
6	Il metodo di Hamilton-Jacobi	25
7	Esempi	25
8	L'equazione caratteristica di HJ	27
4	Sistemi integrabili	28
1	Sistemi integrabili	28
2	Integrabilità locale	29
3	Integrabilità globale	30
4	Variabili azione-angolo	32
5	Moti quasi periodici	32
6	L'equazione caratteristica di HJ per il moto centrale	33

Queste note presuppongono una buona conoscenza del formalismo lagrangiano. Per approfondire i temi di questi appunti suggerisco la lettura di:

BN P. Buttà, P. Negrini **Note del corso di sistemi dinamici**

www1.mat.uniroma1.it/~butta/didattica/sisdin.pdf

T A. Teta **Brief Review on Hamiltonian Mechanics and Electromagnetism.pdf**
che trovate su

<https://sites.google.com/site/sandroprova/didattica-1/appunti-ed-esercizi>

E R. Esposito **Appunti delle lezioni di meccanica razionale**, Aracne 1999.

A V.I. Arlod **Metodi matematici della meccanica classica** Editori Riuniti (in cui è dato ampio spazio agli aspetti geometrico-differenziali del formalismo hamiltoniano).

1 Formalismo hamiltoniano

1.1 Dalla lagrangiana all'hamiltoniana

Sia $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ una lagrangiana a n gradi di libertà, con $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ (per ora \mathbf{q} e $\dot{\mathbf{q}}$ sono solo i nomi delle variabili). Ricordo che le equazioni di Eulero-Lagrange a essa associate sono

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)$$

dove $\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ è il gradiente rispetto alla variabile $\dot{\mathbf{q}}$ e $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}$ quello rispetto a \mathbf{q} , e questi gradienti sono poi calcolati in $\mathbf{q}(t)$, $\dot{\mathbf{q}}(t)$ che stavolta sono posizione e velocità in funzione del tempo. Per un sistema meccanico, la lagrangiana ha le dimensioni di una energia, ed in genere è uguale all'energia cinetica \mathcal{T} meno l'energia potenziale \mathcal{U} , e in tal caso l'energia meccanica è $\mathcal{E} = \mathcal{T} + \mathcal{U}$.

Più generale, indipendentemente dal fatto in L si possa individuare un'energia cinetica e una potenziale, si definisce l'**energia generalizzata** come

$$E = \dot{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

Se L non dipende dal tempo, E è una quantità conservata. Solo nel caso in cui L è $\mathcal{T} - \mathcal{U}$ l'energia generalizzata coincide con l'energia meccanica $\mathcal{T} + \mathcal{U}$.

Per gli scopi di questo paragrafo, è importante evidenziare la distinzione tra le variabili in cui viene descritto il moto (cioè $\mathbf{q}(t)$ e la sua derivata temporale $\dot{\mathbf{q}}(t)$) e le variabili in cui è definita la lagrangiana. Dopo questo paragrafo, tornerò ad indicare con $\dot{\mathbf{q}}$ sia la velocità del moto $\mathbf{q}(t)$, sia la variabile nella lagrangiana.

Sia dunque $L = L(\mathbf{q}, \boldsymbol{\eta}, t)$, con $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$. Le equazioni di Eulero-Lagrange associate al L sono:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\eta}} \Big|_{\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t} \right] = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \Big|_{\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t} \quad (1)$$

Queste equazioni sono un sistema di equazioni del secondo ordine, in forma non esplicita, nella variabile $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^n$ (non esplicita vuol dire che non è del tipo $\ddot{\mathbf{q}} = \dots$). Posso riscrivere questo sistema come un sistema del primo ordine, in forma non esplicita, nella coppia di variabili $(\mathbf{q}(t), \boldsymbol{\eta}(t)) \in \mathbb{R}^{2n}$:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}(t) = \boldsymbol{\eta}(t) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{q}(t), \boldsymbol{\eta}(t), t) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}(t), \boldsymbol{\eta}(t), t) \end{cases} \quad (2)$$

Definisco ora i **momenti coniugati** alle variabili q_i come le funzioni

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\eta}, t)$$

In notazione vettoriale

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{\eta}}}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\eta}, t)$$

Ipotizzo, inoltre, che questa relazione sia invertibile in $\boldsymbol{\eta}$. Localmente, questo è garantito dal teorema della funzione implicita, se

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\boldsymbol{\eta}}^2} \neq 0$$

Quindi posso considerare $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ e descrivere il moto nelle variabili (\mathbf{q}, \mathbf{p}) . Il sistema (2) diventa

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}(t) = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t) \\ \dot{\mathbf{p}}(t) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}(t), \boldsymbol{\eta}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t), t) \end{cases} \quad (3)$$

che è un sistema del primo ordine, in forma esplicita, per il moto delle $2n$ variabili (q, p) . Questo sistema, equivalente alle equazioni di Eulero-Lagrange se vale la condizione di invertibilità della relazione tra $\boldsymbol{\eta}$ e \mathbf{p} , può essere riscritto molto meglio di così, introducendo la **funzione di Hamilton** (o "hamiltoniana")

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\eta} - L(\mathbf{q}, \boldsymbol{\eta}, t)$$

dove $\boldsymbol{\eta}$ è funzione di $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$. Il differenziale dell'hamiltoniana è

$$dH = \boldsymbol{\eta} \cdot d\mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot d\boldsymbol{\eta} - \partial_{\mathbf{q}}L \cdot d\mathbf{q} - \partial_{\boldsymbol{\eta}}L \cdot d\boldsymbol{\eta} - \partial_t L dt$$

Poiché $\mathbf{p} = \partial_{\boldsymbol{\eta}}L$, i termini in $d\boldsymbol{\eta}$ si cancellano, e si ottiene

$$dH = \boldsymbol{\eta} \cdot d\mathbf{p} - \partial_{\mathbf{q}}L \cdot d\mathbf{q} - \partial_t L dt$$

da cui

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{q}}H &= -\partial_{\mathbf{q}}L \\ \partial_{\mathbf{p}}H &= \boldsymbol{\eta} \\ \partial_t H &= -\partial_t L \end{aligned}$$

Usando le prime due uguaglianze, si ottiene che il sistema (3), e quindi le equazioni di Eulero-Lagrange, sono equivalenti alle **equazioni di Hamilton**

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \partial_{\mathbf{p}}H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ \dot{\mathbf{p}} = -\partial_{\mathbf{q}}H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{cases} \quad (4)$$

1.2 * La trasformata di Legendre

L'hamiltoniana è la **trasformata di Legendre** della lagrangiana. In generale, data $f(\boldsymbol{\eta})$ da \mathbb{R}^n in \mathbb{R} convessa, la sua trasformata di Legendre è

$$f^*(\mathbf{p}) = \sup_{\boldsymbol{\eta}} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\eta} - f(\boldsymbol{\eta}))$$

che è ancora una funzione convessa. Se l'estremo superiore è raggiunto in $\boldsymbol{\eta}$, allora deve essere

$$\mathbf{p} = \partial_{\boldsymbol{\eta}}f(\boldsymbol{\eta})$$

e in tal caso se si può determinare $\boldsymbol{\eta}$ in funzione di \mathbf{p} ,

$$f^*(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\boldsymbol{\eta} - f(\boldsymbol{\eta}).$$

Per un'hamiltoniana naturale, l'energia cinetica è quadratica in $\boldsymbol{\eta}$ dunque in effetti la relazione tra \mathbf{p} e $\boldsymbol{\eta}$ è invertibile e dunque

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sup_{\boldsymbol{\eta}} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\eta} - L(\mathbf{q}, \boldsymbol{\eta}, t))$$

dove \mathbf{q} e t sono in questo caso dei semplici parametri.

Tornando a indicare con $\dot{\mathbf{q}}$ le variabili $\boldsymbol{\eta}$,

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \sup_{\dot{\mathbf{q}}} (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)).$$

Si nota che a \mathbf{q} e t fissati, \mathbf{p} agisce per dualità sui vettori tangenti $\dot{\mathbf{q}}$. Nei sistemi vincolati, \mathbf{q} sono coordinate per una varietà V (la varietà vincolare), $\dot{\mathbf{q}}$ sono vettori tangenti, dunque la lagrangiana è una funzione dal fibrato tangente in \mathbb{R} . Invece, poiché \mathbf{p} è moltiplicativo sui vettori tangenti, H è definita sul fibrato cotangente in \mathbb{R} .

A chi fosse incuriosito da questa differenza strutturale, suggerisco la lettura dell'Arnold [A].

1.3 Lagrangiane e hamiltoniane naturali

Una lagrangiana che si ottiene da un sistema fisico conservativo in un sistema di riferimento inerziale, con forze puramente posizionali e vincoli perfetti bilateri è sempre del tipo

$$L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot T(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - V(\mathbf{q}),$$

dove $T(\mathbf{q})$ è una matrice simmetrica e definita positiva, e $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ sono in \mathbb{R}^n . Chiamerò lagrangiane *naturali* quelle di questa forma.

Il passaggio all'hamiltoniana è semplice. Infatti il vettore degli impulsi coniugati è dato da:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = T(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}},$$

ed essendo T definita positiva, in particolare è invertibile. Dunque

$$\dot{\mathbf{q}} = T(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{p}.$$

Ma allora l'hamiltoniana è data da:

$$H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot T(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + V(\mathbf{q}) = \mathbf{p} \cdot T(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{p} - \frac{1}{2} (T(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{p}) \cdot T(\mathbf{q}) T(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{p} + V(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot T(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{p} + V(x).$$

Quindi per il calcolo dell'hamiltoniana è sufficiente calcolare l'inversa della matrice T .

Il caso dei vincoli olonomi dipendenti dal tempo è un po' diverso. Se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ è la configurazione non vincolata e $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ sono le coordinate vincolari, la lagrangiana si trova a partire da

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - V(\mathbf{x})$$

usando che

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{q}, t), \quad \dot{\mathbf{x}} = \partial_t \mathbf{x}(\mathbf{q}, t) + \partial_{\mathbf{q}} \mathbf{x}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

(per semplicità ho considerato la matrice cinetica unitaria nelle coordinate \mathbf{x} , cioè masse unitarie). Sostituendo, si ottiene

$$L = \frac{1}{2} \partial_{\mathbf{q}} \mathbf{x}^t \partial_{\mathbf{q}} \mathbf{x} \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \partial_{\mathbf{q}} \mathbf{x}^t \partial_t \mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \partial_t \mathbf{x} \cdot \partial_t \mathbf{x} - V(\mathbf{x})$$

Dunque la lagrangiana è della forma

$$L = \frac{1}{2} T(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}(\mathbf{q}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}} - U(\mathbf{q}, t) \quad (5)$$

È da notare che in alcuni casi, anche se il vincolo dipende dal tempo, la lagrangiana nelle coordinate vincolari può non dipendere dal tempo; è questo il caso di vincoli in rotazione uniforme intorno a un asse, in cui compaiono termini dovuti alle "forze apparenti".

Anche la lagrangiana per il moto di una particella di massa m e carica e , in un campo elettromagnetico di potenziale $V(\mathbf{x}, t)$ e di potenziale vettore $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ ha questa forma, infatti è

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{x}} - eV(\mathbf{x}, t) \quad (6)$$

dove c è la velocità della luce. Infatti, il moto è governato dall'equazione

$$m\ddot{\mathbf{x}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{B}$$

dove (\mathbf{E}, \mathbf{B}) è il campo elettromagnetico \wedge è il prodotto vettoriale, e c è la velocità della luce. Per esercizio, verificare che, nel caso di campi indipendenti dal tempo, se $\nabla V = -\mathbf{E}$ e $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$, le equazioni di Eulero-Lagrange per (6) coincidono con l'equazione di Newton (se i campi dipendono dal tempo, $\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{A}$).

Per esercizio, si provi che se la lagrangiana è data da (5) allora

$$\mathbf{p} = T\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}$$

e

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{b}) \cdot T^{-1}(\mathbf{p} - \mathbf{b}) + U$$

e si scriva in particolare l'hamiltoniana per il moto della particella carica.

1.4 * Campi a divergenza nulla e sistemi hamiltoniani

Le equazioni di Hamilton per un sistema a n gradi di libertà sono un sistema di equazioni del primo ordine in $2n$ variabili. Per la loro struttura, il campo ha divergenza nulla, dunque, per il teorema di Liouville, il corrispondente flusso conserva la misura.

Proposizione 1.1 *Nel caso bidimensionale, un sistema è hamiltoniano se e solo se il flusso conserva la misura.*

Infatti se

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{cases}$$

la condizione di divergenza nulla è

$$\partial_x f + \partial_y g = 0$$

dunque il campo vettoriale $(-g, f)$ è irrotazionale, e, almeno localmente, ammette una primitiva, cioè una funzione $H(x, y)$ tale che

$$\partial_x H = -g, \quad \partial_y H = f$$

Questa funzione H è appunto l'hamiltoniana del sistema. Si noti che la stessa analisi vale anche se f e g dipendono esplicitamente dal tempo, e che invece in dimensione maggiore di 2 la condizione di divergenza nulla non implica che il sistema sia hamiltoniano.

Esistono interessanti sistemi hamiltoniani che non provengono dalla meccanica, per esempio il sistema preda-predatore, o sistema di Volterra-Lotka (dettagli sulle dispense di Buttà-Negrini di Sistemi Dinamici).

1.5 Variabili cicliche e riduzione dei gradi di libertà

Mostrerò con un esempio il diverso comportamento dei sistemi lagrangiani e di quelli hamiltoniani in presenza di variabili cicliche. Consideriamo la lagrangiana del moto centrale piano

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 - V(|\mathbf{x}|)$$

con $V(r) = \frac{1}{r}$, le equazioni del moto sono le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \ddot{\mathbf{x}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = -\nabla V$$

Per ottenere le equazioni in coordinate polari è sufficiente considerare il cambiamento di coordinate

$$x_1 = \rho \cos \vartheta \quad x_2 = \rho \sin \vartheta$$

che genera il corrispondente cambiamento di variabili nelle velocità:

$$\dot{x}_1 = \dot{\rho} \cos \vartheta - \rho \dot{\vartheta} \sin \vartheta \quad \dot{x}_2 = \dot{\rho} \sin \vartheta + \rho \dot{\vartheta} \cos \vartheta$$

Infine si calcola la lagrangiana nelle nuove variabili. Si ottiene

$$L(\rho, \vartheta, \dot{\rho}, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2} \dot{\rho}^2 + \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\vartheta}^2 - V(\rho)$$

Le equazioni del moto in coordinate polari sono esattamente le equazioni di Eulero Lagrange che si ottengono da questa Lagrangiana:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = \ddot{\rho} = \frac{\partial L}{\partial \rho} = \rho \dot{\vartheta}^2 - V'(\rho)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\vartheta}) = 0$$

La seconda equazione indica che il $\rho^2 \dot{\vartheta}$, il **momento coniugato** alla variabile ϑ , si conserva lungo il moto (infatti ϑ è una variabile ciclica, cioè L non dipende esplicitamente da ϑ). Si può trarre vantaggio dalla conservazione di questa quantità, riducendo il sistema a un solo grado di libertà, sostituendo il momento con una costante nell'espressione dell'energia meccanica (si riveda, sui testi di Meccanica, come si porta alle quadrature il moto centrale). Noto che per ottenere questa riduzione si esce dal formalismo lagrangiano (non si può infatti sostituire il momento dentro la lagrangiana, verrebbero equazioni errate).

La corrispondente hamiltoniana è

$$H = \frac{1}{2} p_\rho^2 + \frac{1}{2\rho^2} p_\vartheta^2 + V(\rho)$$

dove $p_\rho = \partial_{\dot{\rho}} L = \dot{\rho}$ è il momento coniugato alla variabile ρ e $p_\vartheta = \partial_{\dot{\vartheta}} L = \rho^2 \dot{\vartheta}$ è il momento coniugato alla variabile ϑ .

Le equazioni di Hamilton corrispondenti sono

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{\partial H}{\partial p_\rho} = p_\rho \\ \dot{p}_\rho &= -\frac{\partial H}{\partial \rho} = p_\vartheta^2 / \rho^3 - V'(\rho) \\ \dot{\vartheta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\vartheta} = p_\vartheta / \rho^2 \\ \dot{p}_\vartheta &= -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = 0 \end{aligned}$$

Questo sistema di 4 equazioni è un sistema a due gradi di libertà, con un variabile ciclica, infatti H non dipende da ϑ . Il corrisponde impulso p_ϑ si conserva, come afferma l'ultima equazione. Ma allora, le prime due equazioni, in ρ e p_ρ , sono un sistema hamiltoniano a un solo grado di libertà, in cui l'impulso p_ϑ è un parametro. Il fatto che la variabile ϑ sia ciclica, ha dunque una conseguenza importante: le altre equazioni sono automaticamente le equazioni del moto di un sistema con un grado di libertà in meno. Questo è un fatto generale: nel formalismo hamiltoniano, a ogni variabile ciclica corrisponde la riduzione del sistema di un grado di libertà, e non sono necessari passaggi ulteriori rispetto alla scrittura delle equazioni del moto.

Ricordo che questo non accade nel formalismo Lagrangiano: la ciclicità di una variabile garantisce la conservazione del momento coniugato, ma la riduzione di un grado di libertà non è contenuta nel formalismo.

Considero, come ulteriore esempio, la lagrangiana della trottola pesante

$$L = \frac{I}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \vartheta) + \frac{J}{2}(\dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 \cos^2 \vartheta) - mgl \cos \theta$$

dove θ è l'angolo tra l'asse della trottola e l'asse verticale, ϕ è un angolo che esprime la rotazione intorno all'asse verticale, ψ è un angolo che esprime la rotazione intorno all'asse della trottola; J è il momento di inerzia rispetto all'asse della trottola, I è quello rispetto a un qualunque asse ortogonale che passa per il punto di appoggio, l è la distanza del baricentro dal punto di appoggio.

L'energia cinetica è

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I \sin^2 \vartheta + J \cos^2 \vartheta & J \cos \theta \\ 0 & J \cos \theta & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

L'inversa della matrice cinetica è

$$\frac{1}{IJ \sin^2 \vartheta} \begin{pmatrix} J \sin^2 \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & J & -J \cos \theta \\ 0 & -J \cos \theta & I \sin^2 \vartheta + J + J \cos^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

dunque l'hamiltoniana è

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2I} p_{\vartheta}^2 + \frac{1}{2IJ \sin^2 \vartheta} (J p_{\phi}^2 - 2J \cos \vartheta p_{\phi} p_{\psi} + (I \sin^2 \vartheta + J \cos^2 \vartheta) p_{\psi}^2) + mgl \cos \vartheta \\ &= \frac{1}{2I} p_{\vartheta}^2 + \frac{1}{2I \sin^2 \vartheta} (p_{\phi} - p_{\psi} \cos \vartheta)^2 + \frac{1}{2J} p_{\psi}^2 + mgl \cos \vartheta \end{aligned}$$

Anche in questo caso, si può considerare questa come l'hamiltoniana di un sistema a un grado di libertà, in cui p_{ϕ} e p_{ψ} sono integrali primi fissati dai dati iniziali.

2 Trasformazioni simplettiche e parentesi di Poisson

2.1 Trasformazioni di coordinate

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono equazioni del secondo ordine in n variabili, e sono **invarianti in forma**: se $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ è la lagrangiana e $\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, t)$ sono delle nuove variabili, allora il moto nelle variabili $\tilde{\mathbf{q}}$ è governato dalle equazioni di Eulero-Lagrange per la lagrangiana \tilde{L} , che è esattamente la lagrangiana L scritta nelle nuove variabili, tenendo conto che

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \partial_{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \partial_t \tilde{\mathbf{q}}$$

Ricordo che questa proprietà di invarianza è una conseguenza immediata del fatto che le equazioni di Eulero-Lagrange sono le equazioni che esprimono la stazionarietà dell'azione; più avanti studieremo nello stesso modo l'invarianza in forma delle equazioni di Hamilton.

L'invarianza in forma è il motivo del "successo" del formalismo lagrangiano: permette infatti di ottenere facilmente le equazioni del moto, scegliendo il sistema di coordinate più opportuno. È utile fare questa analisi anche nel caso hamiltoniano, dunque studieremo le trasformazioni che garantiscono l'invarianza in forma delle equazioni di Hamilton.

2.2 Definizione di trasformazioni di coordinate

Una trasformazione

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{q}} &= \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \\ \tilde{\mathbf{p}} &= \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)\end{aligned}$$

è detta **canonica** se per ogni funzione $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ esiste una funzione $K(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}, t)$ tale che $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ verifica le equazioni di Hamilton di hamiltoniana H se e solo se $(\tilde{\mathbf{q}}(t), \tilde{\mathbf{p}}(t))$ verifica le equazioni di Hamilton di hamiltoniana K .

Ogni trasformazione di coordinate conserva la natura lagrangiana di un moto, ma non tutte le trasformazioni di coordinate e impulsi conservano la natura hamiltoniana del moto. Vedremo però che la classe di trasformazioni che conservano la natura hamiltoniana del moto è più ampia delle sole trasformazioni di coordinate, e questo fatto è il primo vero vantaggio del formalismo hamiltoniano su quello lagrangiano. L'esempio più semplice che si può fare è questo: data $H = H(q, p)$, si consideri la trasformazione che scambia, a meno di un segno, momento e coordinata:

$$\begin{aligned}\tilde{p} &= -q \\ \tilde{q} &= p\end{aligned}$$

è facile verificare che se $K(\tilde{q}, \tilde{p}) = H(-\tilde{p}, \tilde{q})$, e quindi $H(q, p) = K(p, -q)$, allora

$$\begin{aligned}\dot{q} = \partial_p H(q, p) & \quad \text{se e solo se} & \quad \dot{\tilde{q}} = \dot{p} = -\partial_q H(q, p) = \partial_{\tilde{p}} K(\tilde{q}, \tilde{p}) \\ \dot{p} = -\partial_q H(q, p) & & \quad \dot{\tilde{p}} = -\dot{q} = -\partial_p H(q, p) = -\partial_{\tilde{q}} K(\tilde{q}, \tilde{p})\end{aligned}$$

Dunque abbiamo operato una trasformazione che scambia il ruolo di coordinate e impulsi, cosa evidentemente impossibile da farsi nel formalismo lagrangiano, dove le trasformazioni delle velocità $\dot{\mathbf{q}}$ sono determinate dalle trasformazioni delle coordinate.

2.3 Trasformazioni simplettiche

Per iniziare a esplorare il mondo delle trasformazioni canoniche, è utile riscrivere in un altro modo le equazioni di Hamilton. Indicherò con \mathbf{z} il complesso delle variabili in \mathbb{R}^{2n} :

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad \partial_{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \partial_{\mathbf{q}} \\ \partial_{\mathbf{p}} \end{pmatrix}$$

Dunque

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{\mathbf{p}} H \\ -\partial_{\mathbf{q}} H \end{pmatrix} = J \partial_{\mathbf{z}} H$$

dove J è la **matrice simplettica fondamentale**

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & 0 \end{pmatrix}$$

e \mathbf{I}_n è la matrice identità in \mathbb{R}^n . Consideriamo ora una trasformazione di coordinate indipendente dal tempo

$$\tilde{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{z}}(\mathbf{z}),$$

e sia $\tilde{H} = H(\mathbf{z}(\tilde{\mathbf{z}}))$, così che $\partial_{\mathbf{z}} H = \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{z}}\right)^t \partial_{\tilde{\mathbf{z}}} \tilde{H}$. Il sistema nelle nuove variabili è

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{z}} \dot{\tilde{\mathbf{z}}} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{z}} J \partial_{\tilde{\mathbf{z}}} \tilde{H} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{z}} J \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{z}}\right)^t \partial_{\tilde{\mathbf{z}}} \tilde{H}$$

che coincide con

$$\dot{\mathbf{z}} = J \partial_{\tilde{\mathbf{z}}} \tilde{H}$$

se e solo se

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{z}} J \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{z}} \right)^t = J$$

Se questa condizione è verificata per ogni \mathbf{z} , la trasformazione è canonica.

È utile dunque dare una definizione: una matrice A si dice **simplettica** se e solo se

$$AJA^t = J. \tag{7}$$

È semplice verificare i seguenti fatti.

- $J^2 = -\mathbf{I}_{2n}$, quindi $J^{-1} = -J$.
- Calcolando il determinante, si ottiene $\det J^2 = 1$, dunque $|\det J| = 1$ (in realtà è 1, come si può calcolare direttamente).
- Se A è simplettica, allora, passando ai determinanti, si ha che $\det A^2 = 1$, dunque A è invertibile
- A è simplettica se e solo se A^t è simplettica. Infatti, moltiplicando a destra per JA la (7) si ha

$$AJA^tJA = J^2A = -A$$

moltiplicando a sinistra per A^{-1} si ha

$$JA^tJA = -I$$

moltiplicando a sinistra per $-J$ si ottiene

$$A^tJA = J$$

che dimostra la tesi.

- A è simplettica se e solo se A^{-1} è simplettica. Infatti, passando agli inversi nell'ultima equazione del punto precedente, si ha

$$A^{-1}(-J)A^{-1t} = -J$$

che dà la tesi.

- Se A e B sono simplettiche, allora AB è simplettica (esercizio). Dunque le matrici simplettiche formano un sottogruppo del gruppo delle trasformazioni non singolari.

Diremo che una trasformazione è simplettica se il suo jacobiano è una matrice simplettica in ogni punto.

Abbiamo provato che se una trasformazione indipendente dal tempo è simplettica, allora è cononica e la nuova hamiltoniana è la vecchia hamiltoniana considerata come funzione delle nuove variabili.

Non è agevole verificare la canonicità di una trasformazione attraverso la simpletticità dello jacobiano, ma esistono altre condizioni equivalenti. Prima di introdurle però è necessario definire le **parentesi di Poisson**.

2.4 Parentesi di Poisson

Le parentesi di Poisson sono uno dei degli strumenti chiave del formalismo hamiltoniano.

La forma bilineare antisimmetrica in \mathbb{R}^{2n}

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \mathbf{v} \cdot J\mathbf{w}$$

è detta **prodotto simplettico**. È facile verificare che una matrice A è simplettica se e solo se, per ogni \mathbf{v}, \mathbf{w} vale

$$[A\mathbf{v}, A\mathbf{w}] = [\mathbf{v}, \mathbf{w}].$$

Infatti questa condizione equivale a

$$\mathbf{v} \cdot A^t J A \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot J \mathbf{w}, \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w}$$

e questo può accadere se e solo se $A^t J A = J$.

In prodotto simplettico è legato alle “parentesi di Poisson”, che sono una operazione sugli “osservabili”, cioè sulle funzioni definite nello spazio delle fasi $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$.

Le **parentesi di Poisson** sono un’operazione che associa a due funzioni f, g , la funzione

$$\{f, g\} = [\partial_{\mathbf{z}} f, \partial_{\mathbf{z}} g] = \partial_{\mathbf{z}} f \cdot J \partial_{\mathbf{z}} g = \partial_{\mathbf{q}} f \cdot \partial_{\mathbf{p}} g - \partial_{\mathbf{p}} f \cdot \partial_{\mathbf{q}} g$$

Consideriamo ora un cambiamento di variabili, e, con un abuso di notazioni, indichiamo con f sia $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, sia $f(\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}), \mathbf{p}(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}))$, cioè f come funzione delle nuove variabili tramite le vecchie. Se si trasformano le variabili, cioè si pensano f e g funzioni delle nuove variabili tramite le vecchie

$$\partial_{\mathbf{z}} f = \partial_{\mathbf{z}} \tilde{\mathbf{z}}^t \partial_{\tilde{\mathbf{z}}} f$$

Dunque

$$\{f, g\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = [\partial_{\mathbf{z}} \tilde{\mathbf{z}}^t \partial_{\tilde{\mathbf{z}}} f, \partial_{\mathbf{z}} \tilde{\mathbf{z}}^t \partial_{\tilde{\mathbf{z}}} g] = \partial_{\tilde{\mathbf{z}}} f \cdot \partial_{\tilde{\mathbf{z}}} \tilde{\mathbf{z}}^t J \partial_{\tilde{\mathbf{z}}} \tilde{\mathbf{z}} \partial_{\tilde{\mathbf{z}}} g$$

quindi

$$\forall f, g, \quad \{f, g\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = \{f, g\}_{\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}}$$

se e solo se la trasformazione è simplettica.

Le parentesi di Poisson delle coppie di variabili danno le **regole di commutazione canoniche**:

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad (8)$$

Se considero una trasformazione è canonica, queste relazioni devono valere anche per le nuove variabili rispetto alle nuove variabili, ma, per l’invarianza appena dimostrata, devono valere anche per le nuove variabili rispetto alle vecchie variabili:

$$\{\tilde{q}_i, \tilde{q}_j\} = 0, \quad \{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\} = 0, \quad \{\tilde{q}_i, \tilde{p}_j\} = \delta_{ij} \quad (9)$$

Queste condizioni sono del tutto equivalenti alla simpletticità della trasformazione. Dimostriamolo. La condizione di simpletticità è:

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial \tilde{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{z}} J \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{z}} \right)^t = \frac{\partial \tilde{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{z}} J \begin{pmatrix} \partial_{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}}^t & \partial_{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{p}}^t \\ \partial_{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{q}}^t & \partial_{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{p}}^t \end{pmatrix} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{z}}}{\partial \mathbf{z}} \begin{pmatrix} \partial_{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{q}}^t & \partial_{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{p}}^t \\ -\partial_{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}}^t & -\partial_{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{p}}^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}} \partial_{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{q}}^t - \partial_{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{q}} \partial_{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}}^t & \partial_{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}} \partial_{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{p}}^t - \partial_{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{q}} \partial_{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{p}}^t \\ \partial_{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{p}} \partial_{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{q}}^t - \partial_{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{p}} \partial_{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}}^t & \partial_{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{p}} \partial_{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{p}}^t - \partial_{\mathbf{p}} \tilde{\mathbf{p}} \partial_{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{p}}^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(si ricordi che si tratta di prodotti a blocchi di matrici). Si noti ora che se \mathbf{f} e \mathbf{g} sono due campi vettoriali, allora

$$(\partial_{\mathbf{x}} \mathbf{f} \partial_{\mathbf{y}} \mathbf{g})_{ij} = \partial_{\mathbf{x}} f_i \cdot \partial_{\mathbf{y}} g_j.$$

Con questa osservazione è semplice verificare che l’identità tra J e l’ultima matrice è equivalente alle condizioni (9).

2.5 Proprietà delle parentesi di Poisson

Come operazione tra funzioni, le parentesi di Poisson verificano le seguenti proprietà.

1. Sono bilineari (verificare per esercizio).

2. Sono antisimmetriche:

$$\{f, g\} = -\{g, f\}$$

e quindi $\{f, f\} = 0$ (verificare per esercizio).

3. Vale la formula di Leibnitz

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}$$

(verificare per esercizio).

4. Vale l'identità di Jacobi

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

Uno spazio vettoriale (reale o complesso), dotato di un prodotto interno che verifica le proprietà **1,2,4** è detto **algebra di Lie**, dunque lo spazio delle funzioni regolari in \mathbb{R}^{2n} con le parentesi di Poisson è un'algebra di Lie. Da questa definizione perché incontreremo altri casi di algebre di Lie. In particolare, uno spazio vettoriale di operatori lineari (per esempio le matrici in \mathbb{R}^m , o lo spazio dei funzioni lineari e continui su uno spazio di Hilbert H) diventano algebre di Lie considerando come operazione interna il **commutatore** tra operatori: se \mathbf{v} è un elemento dello spazio (\mathbb{R}^m o H), e A e B sono due operatori lineari,

$$[A, B]\mathbf{v} = AB\mathbf{v} - BA\mathbf{v}$$

(non confondete questa notazione con quella di prodotto simplettico, che comunque non userò più). La bilinearità e l'antisimmetria del commutatore sono di verifica immediata, l'identità di Jacobi si può mostrare facilmente sviluppando tutti i termini, ma si può abbreviare con un minimo di riflessione: tutti i termini dell'espressione

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]]$$

sono formati da una permutazione del prodotto tra le tre matrici A, B, C . Isoliamo i termini che iniziano per A . Nel primo addendo ce ne sono due: $A[B, C] = ABC - ACB$. Nel secondo termine ce ne è uno solo, dato dal secondo termine di $-[B, AC]$, quindi ACB . Nel terzo termine ce ne è uno solo, dato dal primo termine di $-[A, BC]$, quindi $-ABC$. Dunque la somma di tutti i termini che iniziano per A è nulla. Si può ripetere lo stesso ragionamento per i termini che iniziano per B e C (l'espressione dell'identità di Jacobi è invariante per le permutazioni degli argomenti), dunque la somma dei tre termini è effettivamente nulla.

Ho premesso la prova dell'identità di Jacobi per il commutatore perché fa da traccia per la prova dell'identità di Jacobi per le parentesi di Poisson. Serve però qualche utile passaggio intermedio. Dato il campo vettoriale \mathbf{v} , indico la derivata di una funzione f lungo \mathbf{v} con il simbolo

$$L_{\mathbf{v}}f = \mathbf{v} \cdot \nabla f$$

Siano \mathbf{v} e \mathbf{w} due campi vettoriali, Considero il commutatore tra gli operatori $L_{\mathbf{v}}$ e $L_{\mathbf{w}}$, su una funzione f :

$$[L_{\mathbf{v}}, L_{\mathbf{w}}]f = \mathbf{v} \cdot \nabla(\mathbf{w} \cdot \nabla f) - \mathbf{w} \cdot \nabla(\mathbf{v} \cdot \nabla f)$$

L'espressione a destra sembra contenere derivate prime e seconde di f , ma a una più attenta analisi si scopre che le derivate seconde non ci sono, e dunque il commutatore dei due operatori di derivazione è anch'esso un operatore del primo ordine. Infatti, i termini nelle derivate seconde sono:

$$\sum_{i,j} v_i w_j \partial_{ij}^2 f - \sum_{i,j} w_i v_j \partial_{ji}^2 f$$

che dunque si cancellano. Il campo vettoriale \mathbf{u} tale che

$$[L_{\mathbf{v}}, L_{\mathbf{w}}] = L_{\mathbf{u}}$$

è il **commutatore** $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ dei due campi \mathbf{v} e \mathbf{w} . Usando la definizione si ottiene

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w}$$

L'identità di Jacobi per operatori $L_{\mathbf{u}}, L_{\mathbf{v}}, L_{\mathbf{w}}$, si riscrive facilmente come

$$L_{[\mathbf{u}, [\mathbf{v}, \mathbf{w}]]} + L_{[\mathbf{v}, [\mathbf{w}, \mathbf{u}]]} + L_{[\mathbf{w}, [\mathbf{u}, \mathbf{v}]]} = 0$$

Poiché $L_{\mathbf{v}}$ è lineare in \mathbf{v} e $L_{\mathbf{v}} = 0$ se e solo se $\mathbf{v} \equiv 0$, si ottiene che anche il commutatore dei campi vettoriali verifica l'identità di Jacobi.

Torniamo alle parentesi di Poisson. Usando la definizione, si vede che

$$\{f, g\} = -L_{J\partial_{\mathbf{z}}f}g = L_{J\partial_{\mathbf{z}}g}f$$

Riscrivo i tre termini nel membro di destra dell'identità di Jacobi, come operatori che agiscono su h . Il primo si riscrive come

$$-L_{J\partial_{\mathbf{z}}f}(-L_{J\partial_{\mathbf{z}}g}h) = L_{J\partial_{\mathbf{z}}f}L_{J\partial_{\mathbf{z}}g}h$$

Il secondo è

$$-L_{J\partial_{\mathbf{z}}g}L_{J\partial_{\mathbf{z}}f}h$$

Il terzo è

$$L_{J\partial_{\mathbf{z}}\{f, g\}}h$$

La somma dei tre termini è dunque

$$([L_{J\partial_{\mathbf{z}}f}, L_{J\partial_{\mathbf{z}}g}] + L_{J\partial_{\mathbf{z}}\{f, g\}})h$$

Ogni termine dello sviluppo dell'identità di Jacobi è lineare nelle derivate seconde di una delle tre funzioni, ma la somma scritta sopra non ha termini nelle derivate seconde di h . Poiché possiamo ripetere il ragionamento per ognuna delle tre funzioni, otteniamo che tutti i termini sono nulli, e vale l'identità di Jacobi.

Come corollario, segue che l'identità di Jacobi è dunque equivalente a

$$[L_{J\partial_{\mathbf{z}}f}, L_{J\partial_{\mathbf{z}}g}] = -L_{J\partial_{\mathbf{z}}\{f, g\}}$$

cioè il prodotto di Lie dei campi $J\partial_{\mathbf{z}}f$ e $J\partial_{\mathbf{z}}g$ è il campo $-J\partial_{\mathbf{z}}\{f, g\}$. D'ora in poi chiamerò **campo vettoriale hamiltoniano** associato alla funzione f , il campo $J\partial_{\mathbf{z}}f$. L'identità precedente afferma che il campo vettoriale hamiltoniano associato alle parentesi di Poisson delle due funzioni f e g è meno il commutatore dei due campi hamiltoniani associati a f e g .

2.6 Parentesi di Poisson, equazioni di Hamilton, integrali primi

Le parentesi di Poisson permettono di esprimere le equazioni di Hamilton in termini degli osservabili. Infatti, se $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ è una funzione regolare data,

$$\frac{df}{dt} = \partial_t f + \partial_{\mathbf{q}}f \cdot \dot{\mathbf{q}} + \partial_{\mathbf{p}}f \cdot \dot{\mathbf{p}} = \partial_t + \partial_{\mathbf{q}}f \cdot \partial_{\mathbf{p}}H - \partial_{\mathbf{p}}f \cdot \partial_{\mathbf{q}}H = \partial_t f + \{f, H\}$$

In particolare si ottengono le equazioni di Hamilton:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{dq_i}{dt} = \{q_i, H\} \\ \dot{p}_i &= \frac{dp_i}{dt} = \{p_i, H\} \end{aligned}$$

Inoltre è facile scrivere la definizione di integrale primo del moto in termini di parentesi di Poisson. La funzione f è costante lungo il moto se e solo se $\frac{df}{dt} = 0$, cioè se

$$\partial_t f + \{f, H\} = 0$$

Si mostri per esercizio che se f e g sono due integrali primi del moto, allora anche $\{f, g\}$ lo è (si deve usare l'identità di Jacobi).

Per esempio, sia $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$, e sia $\frac{m}{2}\dot{\mathbf{q}}^2$ l'energia cinetica. Allora $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{q}}$ e il momento della quantità di moto è $\ell = \mathbf{q} \wedge \mathbf{p}$. Mostrare che

$$\{\ell_1, \ell_2\} = \ell_3$$

Quindi se si conservano le prime due componenti del momento della quantità di moto si conserva anche la terza (in generale $\{\ell_i, \ell_j\} = \varepsilon_{ijk}\ell_k$ dove ε_{ijk} è il tensore completamente antisimmetrico).

2.7 Un esempio

Sia

$$P = \frac{1}{2}(q^2 + p^2)$$

$$Q = \arctan \frac{q}{p}$$

In questo caso è molto semplice verificare la canonicità della trasformazione mediante le parentesi di Poisson. Infatti, per definizione, $\{Q, Q\} = 0 = \{P, P\}$, dunque resta solo da verificare che

$$\{Q, P\} = 1$$

Il semplice calcolo delle derivate mostra che effettivamente questa condizione è verificata (completare per esercizio).

Consideriamo ora l'hamiltoniana dell'oscillatore armonico $H = (p^2 + q^2)/2$. L'hamiltoniana nelle nuove variabili è

$$K = P$$

per cui le equazioni del moto diventano

$$\dot{Q} = \partial_P K = \partial_P P = 1$$

$$\dot{P} = -\partial_Q K = -\partial_Q P = 0$$

che sono di facile soluzione: P è costante e pari all'energia del moto, mentre $Q(t) = Q_0 + t$. Ne segue che il moto è risolto dalle uguaglianze

$$\frac{1}{2}(p^2(t) + q^2(t)) = E$$

$$\arctan \frac{q(t)}{p(t)} = Q_0 + t$$

Dove E e Q_0 si determinano a partire dal dato iniziale.

In questo esempio si **porta alle quadrature** (cioè si risolve il moto in termini di integrali di funzioni elementari) il moto di un oscillatore armonico (naturalmente questo moto si risolve anche utilizzando la teoria delle equazioni differenziali lineari). Esiste un metodo generale per provare a portare alle quadrature un sistema hamiltoniano mediante una trasformazione canonica che renda semplice il sistema nelle nuove variabili. Per poterlo illustrare serve però introdurre un metodo che permette di ottenere abbastanza facilmente delle trasformazioni canoniche, come mostreremo tra qualche pagina.

2.8 * Flussi commutanti

In questo paragrafo, mi occuperò inizialmente di flussi in \mathbb{R}^m , per poi considerare il caso particolare dei flussi hamiltoniani in \mathbb{R}^{2n}

Siano dati due campi vettoriali regolari $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{w}(\mathbf{x})$. Definisco i due flussi associati:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Phi^t(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\Phi^t(\mathbf{x})) \\ \Phi^0(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}\Psi^t(\mathbf{x}) = \mathbf{w}(\Phi^t(\mathbf{x})) \\ \Psi^0(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \end{cases}$$

Mi chiedo sotto quali condizioni i due flussi commutano, cioè

$$\Phi^t(\Psi^s(\mathbf{x})) = \Phi^s(\Psi^t(\mathbf{x}))$$

per ogni s, t, \mathbf{x} . La commutatività dei flussi è equivalente a

$$\varphi(\Phi^t(\Psi^s(\mathbf{x}))) - \varphi(\Phi^s(\Psi^t(\mathbf{x})))$$

per ogni funzione regolare φ .

Osservo preliminarmente che, sviluppando in $t = 0$:

$$\varphi(\Phi^t(\mathbf{x})) = \varphi(\mathbf{x} + t\mathbf{v}(\mathbf{x}) + O(t^2)) = \varphi(\mathbf{x}) + t\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \nabla\varphi(\mathbf{x}) + O(t^2) = \varphi(\mathbf{x}) + tL_{\mathbf{v}}\varphi(\mathbf{x}) + O(t^2)$$

Analogamente,

$$\varphi(\Psi^s(\mathbf{x})) = \varphi(\mathbf{x}) + sL_{\mathbf{w}}\varphi(\mathbf{x}) + O(s^2)$$

Lemma 2.1 *Vale:*

$$\varphi(\Phi^t(\Psi^s(\mathbf{x}))) - \varphi(\Psi^s(\Phi^t(\mathbf{x}))) = stL_{[\mathbf{w}, \mathbf{v}]} \varphi(\mathbf{x}) + \text{ordini superiore al secondo} \quad (10)$$

Ci sono due punti importanti in questo enunciato. Il primo è che il primo termine significativo della differenza è dato dal commutatore dei campi, il secondo è che i termini del secondo ordine in t^2 e s^2 non ci sono. Dimostro prima quest'ultima affermazione. Fissiamo \mathbf{x} e sia

$$a^+(t, s) = \varphi(\Phi^t(\Psi^s(\mathbf{x}))), \quad \text{e} \quad a^-(t, s) = \varphi(\Psi^s(\Phi^t(\mathbf{x}))).$$

Lo sviluppo di a^+ intorno a $(0, 0)$ fino al secondo ordine è:

$$\begin{aligned} a^+(t, s) &= a^+(0, 0) + t \partial_t a^+(0, 0) + s \partial_s a^+(0, 0) + \frac{t^2}{2} \partial_t^2 a^+(0, 0) + st \partial_{st}^2 a^+(0, 0) + \frac{s^2}{2} \partial_s^2 a^+(0, 0) \\ &+ \text{ordini superiori al secondo} \end{aligned}$$

Però:

$$\begin{aligned} a^+(0, 0) &= \varphi(\mathbf{x}) \\ t \partial_t a^+(0, 0) + \frac{t^2}{2} \partial_t^2 a^+(0, 0) &= t \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(\Phi^t(\mathbf{x})) + \frac{t^2}{2} \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \varphi(\Phi^t(\mathbf{x})) \\ s \partial_s a^+(0, 0) + \frac{s^2}{2} \partial_s^2 a^+(0, 0) &= s \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \varphi(\Psi^s(\mathbf{x})) + \frac{s^2}{2} \left. \frac{d^2}{ds^2} \right|_{s=0} \varphi(\Psi^s(\mathbf{x})) \end{aligned}$$

Dunque, nei termini nella sola t non è presente Ψ^s , e nei termini nella sola s non è presente Φ^t . Le stesse considerazioni valgono per $a^-(t, s)$, dunque nella differenza i termini nella sola t e nella sola s si cancellano e si ottiene

$$a^+(t, s) - a^-(t, s) = st (\partial_{st}^2 a^+(0, 0) - \partial_{st}^2 a^-(0, 0)) + \text{ordini superiori a secondo}$$

Restano da calcolare i coefficienti di st . Sviluppando i termini esplicitamente

$$\begin{aligned} a^+(t, s) &= \varphi(\Phi^t(\Psi^s(\mathbf{x}))) = \varphi(\Phi^t(\mathbf{x}) + sL_{\mathbf{w}}\varphi(\Phi^t(\mathbf{x})) + O(s^2)) \\ &= \varphi(\mathbf{x}) + tL_{\mathbf{v}}\varphi(x) + O(t^2) + sL_{\mathbf{w}}(\varphi(\mathbf{x}) + tL_{\mathbf{v}}\phi + O(t^2)) + O(s^2) \\ &= \varphi(\mathbf{x}) + tL_{\mathbf{v}}\varphi(x) + sL_{\mathbf{w}}\varphi(\mathbf{x}) + stL_{\mathbf{w}}L_{\mathbf{v}}\varphi(x) + O(s^2) + O(t^2) + O(st(t + s)) \end{aligned}$$

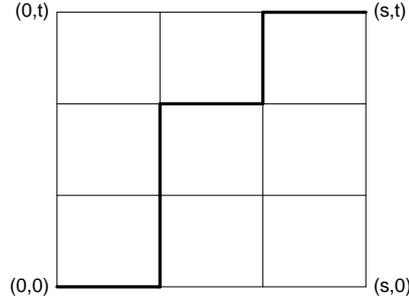
Dunque

$$\partial_{st}^2 a^+(0, 0) = L_{\mathbf{w}}L_{\mathbf{v}}\varphi(x)$$

Espandendo anche $a^-(t, s) = \varphi(\Psi^s(\Phi^t(\mathbf{x})))$ si ottiene infine la tesi.

Da questo lemma segue facilmente che se Φ^t e Ψ^s commutano, allora $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ è nullo, infatti lo sviluppo in serie di potenze di s e t del membro di destra della (10) deve essere identicamente nullo, e quindi deve essere nullo il coefficiente del termine in st .

Vale anche il viceversa, come ora dimostreremo. La dimostrazione è concettualmente semplice, ma richiede un po' di notazioni e di grafici. Fissiamo $s, t > 0$, n intero, $\delta s = s/n$, $\delta t = t/n$.



Considera il rettangolo $[0, s] \times [0, t]$ nel piano (s, t) , diviso in n^2 rettangolini di lati δs , δt (in figura $n = 3$). Consideriamo un cammino γ da $(0, 0)$ a (s, t) fatto di segmenti dei rettangolini, ma con s e t non decrescenti (il cammino può solo andare a destra o in alto). Fissato γ , indichiamo con $T_\gamma(\mathbf{x})$ il punto di \mathbb{R}^m che otteniamo da \mathbf{x} evolvendo con la composizione di $\Phi^{\delta t}$ e $\Psi^{\delta s}$ nell'ordine con cui compaiono in γ i tratti orizzontali e i tratti verticali, rispettivamente. Per esempio, al cammino γ in figura corrisponde il punto

$$T_\gamma(\mathbf{x}) = \Psi^{\delta s} \circ \Phi^{\delta t} \circ \Psi^{\delta s} \circ \Phi^{\delta t} \circ \Phi^{\delta t} \circ \Psi^{\delta s}(\mathbf{x})$$

(nota che la sequenza dei tratti di γ si ritrova al contrario nell'espressione di T_γ). Dunque i cammini γ sono in biiezione con le sequenze la composizione di n flussi $\Phi^{\delta t}$ e n flussi $\Psi^{\delta s}$.

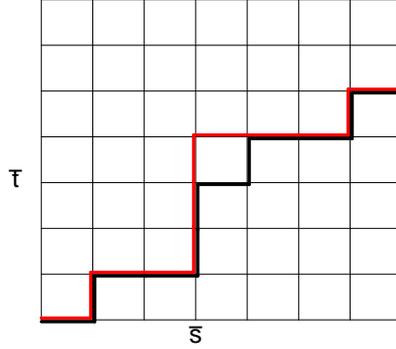
È facile convincersi che esiste una sequenza di cammini $\{\gamma_k\}_{k=0 \dots n^2}$ tale che

- $T_{\gamma_{n^2}} = (\Phi^{\delta t})^n \circ (\Psi^{\delta s})^n = \Phi^t \circ \Psi^s$;
- $T_{\gamma_0} = (\Psi^{\delta s})^n \circ (\Phi^{\delta t})^n = \Psi^s \circ \Phi^t$;
- γ_{k+1} differisce da γ_k per un solo rettangolino, cioè per lo sostituzione di un movimento “a destra, poi in alto” con un movimento “in alto, poi a destra”, e la corrispodente sequenza di flussi differisce per uno scambio di $\Psi^{\delta s}\Phi^{\delta t}$ con $\Phi^{\delta t}\Psi^{\delta s}$;

•

$$\varphi(\Phi^t(\Psi^s(\mathbf{x}))) - \varphi(\Psi^s(\Phi^t(\mathbf{x}))) = \sum_{k=0}^{n^2-1} (\varphi(T_{\gamma_{k+1}}(\mathbf{x})) - \varphi(T_{\gamma_k}(\mathbf{x})))$$

Proveremo che ogni termine della sommatoria è di ordine $1/n^3$, dunque passando al limite $n \rightarrow +\infty$ si ottiene la tesi.



Considera i due cammini γ' e γ in figura, che differiscono per un solo rettangolino. Indico con T^- la sequenza di flussi da $(0,0)$ al punto (\bar{s}, \bar{t}) , e con T^+ la sequenza da $(\bar{s} + \delta s, \bar{t} + \delta t)$ a (s, t) . Dunque

$$\gamma'(\mathbf{x}) = T^+ \circ \Psi^{\delta s} \circ \Phi^{\delta t} \circ T^-(\mathbf{x}), \quad \gamma(\mathbf{x}) = T^+ \circ \Phi^{\delta t} \Psi^{\delta s} \circ T^-(\mathbf{x}),$$

Indicando con $\mathbf{y} = T^-(\mathbf{x})$, e $\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = \varphi(T^+(\mathbf{x}))$:

$$\varphi(T_{\gamma'}(\mathbf{x})) - \varphi(T_{\gamma}(\mathbf{x})) = \varphi(T^+ \circ \Phi^{\delta t} \circ \Psi^{\delta s} \mathbf{y}) - \varphi(T^+ \circ \Psi^{\delta s} \circ \Phi^{\delta t} \mathbf{y}) = \tilde{\varphi}(\Phi^{\delta t}(\Psi^{\delta s} \mathbf{y})) - \tilde{\varphi}(\Psi^{\delta s}(\Phi^{\delta t} \mathbf{y}))$$

Usando il lemma e tenendo conto del fatto che $\delta s = O(1/n)$, $\delta t = O(1/n)$:

$$\varphi(T_{\gamma'}(\mathbf{x})) - \varphi(T_{\gamma}(\mathbf{x})) = \delta s \delta t L_{[\mathbf{w}, \mathbf{u}]} \tilde{\varphi}(\mathbf{y}) + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

dove l'ultima identità deriva dall'ipotesi di commutatività dei campi. Quindi, poiché i termini della somma che stiamo considerando sono solo n^2 , si ha

$$\varphi(\Phi^t(\Psi^s(\mathbf{x}))) - \varphi(\Psi^s(\Phi^t(\mathbf{x}))) = \sum_{k=0}^{n^2-1} (\varphi(T_{\gamma_{k+1}}(\mathbf{x})) - \varphi(T_{\gamma_k}(\mathbf{x}))) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

che tende a 0 per $n \rightarrow +\infty$.

2.9 Flussi hamiltoniani commutanti

Definizione: due funzioni H e K sono in **involuzione** se $\{H, K\} = 0$.

Ricordando che il commutatore dei campi hamiltoniani associati a due funzioni H e K è meno il campo hamiltoniano generato da $\{H, K\}$, si ottiene che due flussi hamiltoniani di hamiltoniane H e K commutano se e solo se

$$J \partial_z \{H, K\} = 0$$

cioè se e sole se $\{H, K\} = \text{costante}$, e questo accade in particolare se H e K sono in involuzione. Osservo anche che essere in involuzione garantisce che K è un integrale primo del moto di hamiltoniana H , e viceversa (cosa che non accade se $\{H, K\}$ è una costante non nulla).

3 L'equazione di Hamilton-Jacobi

Il formalismo hamiltoniano sprigiona tutta la sua potenza attraverso la definizione di un metodo generale per la ricerca di soluzioni. Per introdurlo, devo ulteriormente approfondire la struttura delle trasformazioni canoniche, attraverso lo studio di un principio variazionale per le equazioni di Hamilton.

3.1 Un principio variazionale per le equazioni di Hamilton

Il moto hamiltoniano di hamiltoniana H rende stazionaria l'azione

$$S = \int_0^T (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)) dt$$

con $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$ al tempo $t = 0$ e $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1)$ al tempo $t = T$. La verifica è semplice. Sia $\delta\mathbf{q}$, $\delta\mathbf{p}$ una variazione del modo che soddisfa le condizioni iniziali e finali, cioè sia nulla per $t = 0$ e $t = T$. La variazione dell'azione è

$$\delta S = \int_0^T (\delta\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{p} \cdot \delta\dot{\mathbf{q}} - \partial_{\mathbf{q}}H \cdot \delta\mathbf{q} - \partial_{\mathbf{p}}H \cdot \delta\mathbf{p}) dt$$

Integrando per parti il termine in $\delta\dot{\mathbf{q}} = \frac{d\delta\mathbf{q}}{dt}$ si ottiene

$$\delta S = \int_0^T (\dot{\mathbf{q}} - \partial_{\mathbf{p}}H) \cdot \delta\mathbf{p} dt - \int_0^T (\dot{\mathbf{p}} + \partial_{\mathbf{q}}H) \cdot \delta\mathbf{q} dt$$

Dunque δS è nulla per ogni variazione del moto che soddisfi i dati iniziali se e solo se valgono le equazioni di Hamilton.

Ricordo che nel principio variazionale di Hamilton per l'azione lagrangiana $\int_0^T L dt$ si fissano solo le posizioni \mathbf{q} agli estremi, e se la differenza $|\mathbf{q}(T) - \mathbf{q}(0)|$ è abbastanza piccola si può provare che esiste il minimo dell'azione e dunque si possono trovare variazionalmente le soluzioni delle equazioni del moto, a estremi fissati, e questo fatto è particolarmente utile nella ricerca di soluzioni periodiche. Nel principio variazionale per le equazioni di Hamilton abbiamo fissato sia i momenti che gli impulsi al tempo 0 e al tempo T . Ma se si fissa (\mathbf{q}, \mathbf{p}) al tempo 0, esiste una sola soluzione, dunque non si può fissare anche (\mathbf{q}, \mathbf{p}) al tempo T . D'altra parte, è facile verificare che per ottenere le equazioni di Hamilton abbiamo integrato per parti il solo termine in $\delta\dot{\mathbf{q}}$, dunque non è necessario fissare \mathbf{p} al bordo, ma basta fissare solo \mathbf{q} .

Però la scelta che abbiamo fatto permette di pensare all'azione S come all'integrale su una qualunque curva γ nello **spazio delle fasi esteso** $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ (cioè lo spazio prodotto dello spazio delle fase e dell'asse temporale), che unisce $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, 0)$ e $(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, T)$ della forma differenziale

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt$$

Infatti, se $[0, \bar{\lambda}] \ni \lambda \rightarrow (\mathbf{q}(\lambda), \mathbf{p}(\lambda), t(\lambda))$ è un cammino siffatto

$$\int_{\gamma} (\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt) = \int_0^{\bar{\lambda}} (\mathbf{p}(\lambda) \cdot \partial_{\lambda}\mathbf{q}(\lambda) - H(\mathbf{q}(\lambda), \mathbf{p}(\lambda), t(\lambda)) \partial_{\lambda}t) d\lambda$$

Ma se la relazione tra λ e t è invertibile, riparametrizzando in t si ottiene di nuovo

$$S = \int_0^T (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - H) dt$$

3.2 $\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt$

Il principio variazionale dimostrato nel punto precedente permette di verificare in un altro, elegante, modo la canonicità di una trasformazione. Infatti, se il sistema hamiltoniano di hamiltoniana H si trasforma nel sistema hamiltoniano di hamiltoniana K , allora i due seguenti funzionali

$$S = \int_0^T (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)) dt, \quad \tilde{S} = \int_0^T (\mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{Q}} - K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)) dt$$

devono avere gli stessi punti stazionari, una volta fissati i valori delle variabili agli estremi temporali. Una condizione sufficiente perché ciò accada è che le due forme differenziali

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt, \quad \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - K dt,$$

dove \mathbf{P} e \mathbf{Q} sono scritte in termini di (\mathbf{q}, \mathbf{p}) , differiscono per un differenziale esatto dG . In tal caso, infatti, il valore dell'azione su una traiettoria nelle nuove variabili è

$$\tilde{S} = \int_0^T (\mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{Q}} - K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)) dt = \int_{\tilde{\gamma}} (\mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - K dt)$$

dove $\tilde{\gamma}$ è la corrispondente curva nello spazio delle fasi esteso. Traducendo questo integrale nelle variabili (\mathbf{q}, \mathbf{p}) si ottiene

$$\int_{\tilde{\gamma}} (\mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - K dt) = \int_{\gamma} (\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt) + \int_{\gamma} dG$$

dove γ è la curva $\tilde{\gamma}$ nelle variabili (\mathbf{q}, \mathbf{p}) . Il primo integrale è proprio l'azione S calcolata sul cammino nelle variabili (\mathbf{q}, \mathbf{p}) , mentre

$$\int_{\gamma} dG = G(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, T) - G(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, 0)$$

Ma allora S e \tilde{S} differiscono per una costante che dipende solo dai valori (fissati) agli estremi, dunque una traiettoria rende stazionaria S se e solo se rende stazionaria \tilde{S} nelle variabili (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) . In tal modo, abbiamo dimostrato il seguente teorema.

Teorema 3.1 Canonicità attraverso i differenziali - I

Se la trasformazione $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ è tale che data H esiste K e una funzione G tali che

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - K dt + dG$$

allora la trasformazione manda il sistema hamiltoniano di hamiltoniana H nelle variabili (\mathbf{q}, \mathbf{p}) nel sistema hamiltoniano di hamiltoniana K nelle variabili (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) .

Che relazione c'è tra questo teorema e le proprietà delle trasformazioni simplettiche?

Teorema 3.2 Canonicità attraverso i differenziali - II

La trasformazione $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ è una trasformazione simplettica a t fissato se e solo se $\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q}$ è un differenziale esatto a t fissato.

Do una traccia di questa dimostrazione. Osservo che

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = d(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) - \mathbf{q} \cdot d\mathbf{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - \mathbf{q} \cdot d\mathbf{p}) + \frac{1}{2}d(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})$$

e posso ottenere una analoga espressione per $\mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q}$. Ne segue che $\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q}$ è un differenziale esatto se e solo se

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - \mathbf{q} \cdot d\mathbf{p} - (\mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{P})$$

è un differenziale esatto. In termini di $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ e $\mathbf{Z} = (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ questa espressione è

$$J\mathbf{z} \cdot d\mathbf{z} - J\mathbf{Z} \cdot d\mathbf{Z}$$

Ma

$$d\mathbf{Z} = \partial_{\mathbf{z}}\mathbf{Z} d\mathbf{z}$$

dunque la forma differenziale è

$$(J\mathbf{z} - \partial_{\mathbf{z}}\mathbf{Z}^t J\mathbf{Z}) \cdot d\mathbf{z}$$

La forma è localmente esatta se e solo se è localmente chiusa, cioè

$$\partial_i(J\mathbf{z} - \partial_{\mathbf{z}}\mathbf{Z}^t J\mathbf{Z})_j = \partial_j(J\mathbf{z} - \partial_{\mathbf{z}}\mathbf{Z}^t J\mathbf{Z})_i$$

Ora

$$\begin{aligned} \partial_i(J\mathbf{z})_j &= \sum_k \partial_i(J_{jk}z_k) \sum_k J_{jk}\delta_{ik} = J_{ji} \\ \partial_i(\partial_{\mathbf{z}}\mathbf{Z}^t J\mathbf{Z})_j &= \sum_{h,k} \partial_i(\partial_j Z_h J_{hk} Z_k) = \sum_{h,k} \partial_{ij}^2 Z_h J_{hk} Z_k + \sum_{h,k} \partial_j Z_h J_{hk} \partial_i Z_k \\ &= \sum_{h,k} \partial_{ij}^2 Z_h J_{hk} Z_k + (\partial_{\mathbf{z}}\mathbf{Z}^t J \partial_{\mathbf{z}}\mathbf{Z})_{ji} \end{aligned}$$

Sviluppando nello stesso modo il membro di destra, si ottiene la condizione di chiusura

$$J_{ji} - (\partial_{\mathbf{z}}\mathbf{Z}^t J \partial_{\mathbf{z}}\mathbf{Z})_{ji} = J_{ij} - (\partial_{\mathbf{z}}\mathbf{Z}^t J \partial_{\mathbf{z}}\mathbf{Z})_{ij}$$

(i termini con le derivate seconde sono uguali e si cancellano). Ma sia la matrice J che la matrice $\partial_{\mathbf{z}}\mathbf{Z}^t J \partial_{\mathbf{z}}\mathbf{Z}$ sono antisimmetriche, e per una matrice antisimmetrica $A_{ij} = -A_{ji}$ se e solo se $A_{ij} = 0$. Dunque la condizione di chiusura è proprio la condizione di simpletticità dello jacobiano della trasformazione

$$J = \partial_{\mathbf{z}}\mathbf{Z}^t J \partial_{\mathbf{z}}\mathbf{Z}.$$

Una conseguenza di questo teorema è che le trasformazioni simplettiche dipendenti dal tempo sono canoniche.

Teorema 3.3 Canonicità attraverso i differenziali - III

Se la trasformazione $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, anche dipendente dal tempo, è simplettica per ogni t fissato, allora esiste $G(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ tale che,

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} = dG, \quad a \ t \ fissato, \ per \ ogni \ t$$

In tal caso, se H è un'hamiltoniana, scegliendo

$$K = H + \mathbf{P} \cdot \partial_t \mathbf{Q} + \partial_t G \tag{11}$$

si ottiene che

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - K dt + dG$$

Quindi una trasformazione simplettica dipendente dal tempo è una trasformazione canonica e la nuova hamiltoniana si calcola come in (11).

3.3 Funzioni generatrici

L'uso più importante che si può fare di questa parte della teoria è che permette di **costruire** trasformazioni canoniche. Vediamo come.

Consideriamo, come esempio, la funzione $F = F(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{Q}$, che ha differenziale

$$dF = \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{q} + \mathbf{q} \cdot d\mathbf{Q}$$

Chiediamoci ora se esistono due funzioni di $\mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$ e $\mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$ tali che

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} = dF = \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{q} + \mathbf{q} \cdot d\mathbf{Q} \quad (12)$$

La risposta è evidentemente sì, e

$$\mathbf{p} = \mathbf{Q}, \quad \mathbf{P} = -\mathbf{q}$$

In questo modo risulta definita la trasformazione

$$\mathbf{P} = -\mathbf{q}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{p}$$

che è in effetti la trasformazione canonica che scambia coordinate e momenti (a meno di un segno). D'altra parte, l'uguaglianza (12) è verificata anche pensando che le variabili indipendenti siano (\mathbf{q}, \mathbf{p}) mentre \mathbf{Q}, \mathbf{P} sono date dal cambiamento di variabile. Infatti $F(\mathbf{q}, \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p})) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}$ e

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} + \mathbf{q} \cdot d\mathbf{p} = d(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) = dF$$

Questo esempio dovrebbe rendere evidente che vale il seguente teorema

Teorema 3.4 Funzione generatrice $F(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$

Sia $F = F(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$ una funzione regolare, con la matrice $\partial_{\mathbf{q}\mathbf{Q}}^2 F$ non singolare. Allora le equazioni

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \partial_{\mathbf{q}} F(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) \\ -\mathbf{P} &= \partial_{\mathbf{Q}} F(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t) \end{aligned}$$

definiscono un cambiamento di variabili che è *simplettico* per ogni t .

Inoltre, data $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, l'*hamiltoniana* per il sistema nelle nuove variabili è

$$K = H + \partial_t F$$

Infatti, la prima equazione permette di ottenere \mathbf{Q} in funzione di \mathbf{q} (a questo serve l'ipotesi di non singolarità della matrice delle derivate seconde incrociate). La seconda equazione permette di determinare \mathbf{P} in funzione di \mathbf{q} e \mathbf{Q} . La canonicità è garantita dal fatto che, in variabili \mathbf{q}, \mathbf{Q} , ovviamente vale

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} = dF$$

e questa stessa relazione rimane naturalmente vera anche se viene espressa in funzione di \mathbf{q} e \mathbf{p} . Poiché una trasformazione *simplettica* ha jacobiano *simplettico*, e le matrici *simplettiche* hanno determinate 1, segue che la mappa $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ e $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ è non singolare, dunque definisce effettivamente una trasformazione di coordinate.

Data H , la nuova hamiltoniana K si definisce imponendo l'uguaglianza

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - K dt + dF$$

Dunque

$$K = H + \partial_t F$$

Notate che questa relazione tra H e K è più semplice rispetto a quella espressa nella (11), il motivo è che

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - H dt = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - K dt + dF$$

letta nelle variabili \mathbf{q}, \mathbf{Q} afferma che

$$\partial_t F = K - H,$$

letta invece nelle variabili \mathbf{q}, \mathbf{p} afferma che

$$\partial_t F = K - H - \mathbf{P} \cdot \partial_t \mathbf{Q}$$

che è appunto la (11)

È possibile anche scegliere altre coppie di variabili indipendenti tra le $\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{Q}, \mathbf{P}$. Infatti, sia $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, $\mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ симплетica per ogni t . Allora, per i teoremi precedenti, esiste $G = G(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ tale che a t fissato

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} = dG \quad (13)$$

Se si possono considerare indipendenti \mathbf{q}, \mathbf{P} , allora, aggiungendo $d(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q})$ a entrambi i membri della (13), e definendo

$$S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = G(\mathbf{q}, \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{P}), t) + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$$

si ha che

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} + \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{P} = dS, \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \\ \mathbf{Q} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{P}} \end{cases} \quad \det \partial_{\mathbf{q}\mathbf{P}} S \neq 0$$

Se si possono considerare indipendenti \mathbf{p}, \mathbf{P} , allora, aggiungendo $d(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q})$ a entrambi i membri della (13), e definendo

$$F_3(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t) = G(\mathbf{q}(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t), \mathbf{p}, t) + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t)$$

si ha che

$$-\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} + \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{P} = dF_3, \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \mathbf{q} = -\frac{\partial F_3}{\partial \mathbf{p}} \\ \mathbf{Q} = \frac{\partial F_3}{\partial \mathbf{P}} \end{cases} \quad \det \partial_{\mathbf{p}\mathbf{P}} F_3 \neq 0$$

Infine, se si possono considerare indipendenti \mathbf{p}, \mathbf{Q} , allora, aggiungendo $-d(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})$ a entrambi i membri della (13), e definendo

$$F_4(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t) = G(\mathbf{q}(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t), \mathbf{p}, t) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t)$$

si ha che

$$-\mathbf{q} \cdot d\mathbf{p} - \mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} = dF_4, \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \mathbf{q} = -\frac{\partial F_4}{\partial \mathbf{p}} \\ \mathbf{P} = -\frac{\partial F_4}{\partial \mathbf{Q}} \end{cases} \quad \det \partial_{\mathbf{p}\mathbf{Q}} F_4 \neq 0$$

Si noti che in dimensione maggiore di 1, è possibile considerare scelte diverse per ogni coppia di variabili coniugate. Per esempio, provate a scrivere qual è la trasformazione indotta da una funzione generatrice $F = F(q_1, Q_1, q_2, P_2)$.

Osservazione: le varie funzioni generatrici non sono equivalenti. Per esempio, la trasformazione identica

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{p}$$

è generata da $S = S(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{P}$, ma non può essere generata da una funzione generatrice del tipo $F = F(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$ (infatti non si possono scegliere \mathbf{q} e \mathbf{Q} come variabili indipendenti).

Usando le funzioni generatrici, è semplice mostrare come un cambiamento di coordinate induca un cambiamento negli impulsi.

Esempio: sia $\mathbf{x}(\mathbf{q})$ un diffeomorfismo da un dominio di \mathbb{R}^n in un dominio di \mathbb{R}^n , cioè $\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = \mathbf{x}(\mathbf{q})$ sia cambiamento regolare delle variabili \mathbf{q} . Sia

$$S(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{q})$$

Poiché $\partial_{\mathbf{q}, \mathbf{P}} S = \partial_{\mathbf{q}, \mathbf{x}}$, che per ipotesi è non singolare, S definisce la trasformazione canonica

$$\mathbf{Q} = \partial_{\mathbf{P}} S = \mathbf{x}(\mathbf{q}), \quad \mathbf{p} = (\partial_{\mathbf{q}} \mathbf{x})^t \mathbf{P}$$

Questa trasformazione solleva la trasformazione delle sole coordinate in una trasformazione nello spazio delle fasi.

È da notare che la funzione generatrice

$$S(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{q}) + g(\mathbf{q}),$$

dove g è una funzione scalare delle \mathbf{q} , genera la trasformazione canonica

$$\mathbf{Q} = \partial_{\mathbf{P}} S = \mathbf{x}(\mathbf{q}), \quad \mathbf{p} = (\partial_{\mathbf{q}} \mathbf{x})^t \mathbf{P} + \partial_{\mathbf{q}} g$$

che non coincide con la precedente. Dunque, come preannunciato, le trasformazioni canoniche sono “più numerose” delle trasformazioni indotte da trasformazioni delle sole \mathbf{q} .

3.4 Simpletticità del flusso

Usando le funzioni generatrici non è troppo difficile arrivare a dimostrare che, data H , il flusso di hamiltoniana H definisce una trasformazione simplettica. Dimostreremo il seguente teorema.

Teorema 3.5 *Sia*

$$\begin{aligned} \bar{q} &= \bar{q}(q, p, t) \\ \bar{p} &= \bar{p}(q, p, t) \end{aligned} \tag{14}$$

la soluzione delle equazioni di Hamilton di hamiltoniana $H = H(q, p, t)$, di dato iniziale (q, p) , cioè

$$\begin{cases} \dot{\bar{q}} = \partial_p H(\bar{q}, \bar{p}, t) \\ \dot{\bar{p}} = -\partial_q H(\bar{q}, \bar{p}, t) \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \bar{q}(q, p, 0) = q \\ \bar{p}(q, p, 0) = p \end{cases}$$

Allora, la trasformazione di coordinate

$$\begin{aligned} q_1 &= \bar{q}(q_0, p_0, t) \\ p_1 &= \bar{p}(q_0, p_0, t) \end{aligned}$$

è simplettica per ogni t , dalle variabili (q_0, p_0) alle variabili (q_1, p_1) .

Si potrebbe dimostrare questo teorema dimostrando che lo jacobiano del flusso è simplettico (più precisamente, dimostrando che se A è la matrice jacobiana al tempo t , allora AJA^t è costante nel tempo, dunque è pari $J = A(0)JA^t(0)$, e quindi A è simplettica; completare per esercizio). È però utile procedere in un altro modo, cioè costruendo esplicitamente una funzione generatrice della trasformazione.

Premetto un lemma tecnico.

Lemma 3.1 *Sia H un'hamiltoniana con $\partial_p^2 H$ è non singolare. Allora, se t è sufficientemente piccolo, l'uguaglianza $q_1 = \bar{q}(q_0, p_0, t)$ può essere risolta in p_0 , dunque si possono utilizzare, localmente, le variabili indipendenti q_0 e q_1 per descrivere il moto.*

Si noti che se H è un'hamiltoniana che proviene da una lagrangiana naturale, H dipende quadraticamente degli impulsi tramite l'inversa della matrice cinetica, che è definita positiva, dunque non singolare.

Il lemma si dimostra facilmente notando che, per t piccolo,

$$q_1 \approx q_0 + \dot{q}(0)t + o(t) = q_0 + \partial_p H(q_0, p_0, t)t + o(t)$$

E questa uguaglianza si può invertire in p_0 per l'ipotesi di non singolarità di $\partial_p^2 H$.

Consideriamo dunque il moto $\bar{q}(t), \bar{p}(t)$ con dati al bordo $\bar{q}(q_0, p_0, 0) = q_0$ e $\bar{q}(q_0, p_0, t) = q_1$, che, per il lemma precedente, esiste in opportuni intorno di q_0 e q_1 se t è sufficientemente piccolo. Consideriamo inoltre il valore dell'azione calcolata sul moto:

$$F(q_0, q_1, t) = \int_0^t (\bar{p} \cdot \dot{\bar{q}} - H(\bar{q}, \bar{p}, s)) \partial s$$

Tenendo fissato t e variando q_0 e q_1 , varia naturalmente tutta la traiettoria. Sia $\delta\bar{q}(s), \delta\bar{p}(s)$ la variazione al tempo s al primo ordine, con $\delta\bar{q}(0) = \delta q_0$ e $\delta\bar{q}(t) = \delta q_1$. Vale

$$F(q_0 + \delta q_0, q_1 + \delta q_1, t) - F(q_0, q_1, t) = \int_0^t (\delta\bar{p} \cdot \dot{\bar{q}} + \bar{p} \cdot \delta\dot{\bar{q}} - \partial_q H \cdot \delta\bar{q} - \partial_p H \cdot \delta\bar{p}) ds + o(\delta q_0, \delta q_1)$$

Usando le equazioni del moto che sono soddisfatte da \bar{q}, \bar{p} , cioè che $\partial_q H = -\dot{\bar{p}}$ e che $\partial_p H = \dot{\bar{q}}$, si ottiene

$$F(q_0 + \delta q_0, q_1 + \delta q_1, t) - F(q_0, q_1, t) = \int_0^t \frac{d}{ds} (\bar{p} \cdot \delta\bar{q}) = \bar{p}(q, p, t) \cdot \delta q_1 - p \cdot \delta q_0 + o(\delta q_0, \delta q_1)$$

Ma allora,

$$dF = p_1 \cdot dq_1 - p_0 \cdot dq_0$$

Per i teoremi della sezione precedente, questa identità garantisce che la trasformazione è simplettica.

3.5 L'equazione di Hamilton-Jacobi

È utile calcolare anche come varia F nel tempo. Si noti che cambiando t e tenendo fissi q_0 e q_1 , non è facile determinare la variazione di F , infatti cambia l'intera traiettoria. È invece facile mostrare che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(q_0, \bar{q}(q_0, p_0, t), t) &= \frac{d}{dt} \int_0^t ds (\bar{p} \cdot \dot{\bar{q}} - H(\bar{q}, \bar{p}, s)) \\ &= \bar{p}(t) \cdot \dot{\bar{q}}(t) - H(\bar{q}(t), \bar{p}(t), t) = p_1 \cdot \dot{q}_1 - H(q_1, p_1, t) \end{aligned}$$

Infatti scegliendo $q_1 = \bar{q}(q_0, p_0, t)$ con (q_0, p_0) fissato, la traiettoria non cambia, e dunque la derivata è l'argomento dell'integrale calcolato in t . Poiché $\partial_{q_1} F = p_1 = \bar{p}$, si ha che

$$\bar{p} \cdot \dot{\bar{q}} - H = \frac{d}{dt} F(q_0, \bar{q}(q_0, p_0, t), t) = \partial_t F + \partial_q F \cdot \dot{\bar{q}} = \partial_t F + \bar{p} \cdot \dot{\bar{q}}$$

cioè

$$\partial_t F = -H(\bar{q}, \bar{p}, t) = -H(q_1, p_1, t)$$

Possiamo rivedere quanto fatto fin'ora notando che abbiamo dimostrato la canonicità della trasformazione che associa a (q_1, p_1) , al tempo t , il corrispondente dato iniziale (q_0, p_0) al tempo 0. Indicando con $q = q_1$ e $p = p_1$, abbiamo dimostrato il seguente teorema

Teorema 3.6 *L'azione calcolata sul moto di dato iniziale q_0 e di posizione q al tempo t ha differenziale*

$$dF = p \cdot dq - H dt + p_0 \cdot dq_0$$

Dunque la trasformazione che associa a (q, p) al tempo t il dato iniziale (q_0, p_0) è canonica. Nelle nuove variabili (q_0, p_0) l'hamiltoniana è nulla, infatti $K = H + \partial_t F = H - H = 0$.

Poichè nelle nuove variabili l'hamiltoniana è nulla e $p = \partial_q F$, la funzione $F = F(q_0, q, t)$ risolve la seguente equazione

$$H(q, \partial_q F, t) + \partial_t F = 0$$

Questa è l'equazione di **Hamilton-Jacobi**.

Si noti che se è noto il flusso hamiltoniano, la soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi si ottiene mediante l'integrale di azione. Al contrario, riuscire a determinare opportune soluzioni dell'equazione di Hamilton-Jacobi permette, in un qualche senso, di trovare la soluzione delle equazioni del moto, come mostreremo nel prossimo paragrafo.

3.6 Il metodo di Hamilton-Jacobi

Come abbiamo visto nell'esempio del punto precedente, una trasformazione canonica può rendere banalmente integrabile le equazioni di Hamilton. Però, chi ci dice come trovare la trasformazione? Possiamo tentare di determinarla cercando una funzione generatrice $S(q, P, t)$ tale che la nuova hamiltoniana K sia esattamente 0. In tal caso, infatti, le equazioni nelle nuove variabili (Q, P) sono banali:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= 0 \\ \dot{P} &= 0, \end{aligned} \tag{15}$$

dunque nota la trasformazione si può risalire al moto nelle variabili q, p . Come deve essere fatta una tale S ? Deve valere: $\partial_q S = p$ e $K = 0$, cioè:

$$H(q, \partial_q S(q, P, t), t) + \partial_t S(q, P, t) = 0. \tag{16}$$

Per hamiltoniane indipendenti dal tempo, si può cercare una soluzione **separando le variabili**, cioè cercando la soluzione nella forma $S(q, P, t) = W(q, P) - P_n t$, dove P_n è l'ultimo impulso ed è pari all'energia. L'equazione di HJ diventa l'**equazione caratteristica di HJ**:

$$H(q, \partial_q W(q, P, t)) = P_n. \tag{17}$$

In pratica, invece di cercare S dipendente dal tempo che renda nulla l'hamiltoniana, cerchiamo W , indipendente da t , che rende costante l'hamiltoniana. Infatti, se W risolve l'equazione caratteristica di Hamilton, con P_n ultimo nuovo impulso, W genera una trasformazione canonica nelle nuove variabili (Q, P) , per le quali l'hamiltoniana è P_n . Nelle nuove variabili le equazioni del moto sono banali:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \partial_{P_i} K = 0 \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{Q}_n &= \partial_{P_n} K = 1 \\ \dot{P}_i &= -\partial_{Q_i} K = 0 \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{18}$$

Come si procede in pratica? Sempre e solo per separazione di variabili, cioè cercando la soluzione come somma di n funzioni ognuna delle quali dipende solo da una delle vecchie coordinate. In alcuni rari casi ci si riesce (sistemi integrabili) in generale no. Il fatto che si riesca a trovare la soluzione dipende dal fatto che dentro H la dipendenza delle variabili è *separata*.

3.7 Esempi

Prima di vedere come funziona la separazione di variabili, guardiamo come funziona il metodo in un caso che sappiamo già risolvere, quello dell'oscillatore armonico.

Considero un'oscillatore armonico di hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2).$$

L'equazione caratteristica di HJ è

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial q}^2 + q^2 \right) = E$$

dove E (l'energia) sarà il nuovo impulso. Esplicitando rispetto alla derivata di W si ottiene

$$W(q, E) = \pm \int^q dq \sqrt{2E - q^2}$$

L'integrale si può calcolare esplicitamente, ma questo calcolo non è necessario per trovare la soluzione delle equazioni del moto. Infatti, se Q è la nuova variabile, la soluzione è

$$Q(t) = c + t,$$

dove c dipende dal dato iniziale, mentre la relazione tra Q e le vecchie variabili è data da

$$Q = \frac{\partial W}{\partial E} = \pm \int^q \frac{dq}{\sqrt{2E - q^2}}$$

Dunque la soluzione delle equazioni del moto si esprime mediante la **formula di quadratura**:

$$\pm \int^{q(t)} \frac{dq}{\sqrt{2E - q^2}} = t + c$$

dove il segno e la costante c dipendo da dato iniziale. Si noti che in questo caso l'integrale si può calcolare esplicitamente, e vale $\arcsin q(t)/\sqrt{2E}$. Sostituendo questa espressione e invertendo rispetto a q si ottiene $q = \sqrt{2E} \sin(t + c)$.

Il valore del metodo di HJ si comprende nei rari casi di sistemi che si risolvono per quadrature, senza che esiste un'evidente simmetria che renda ciclica qualche variabile. Faccio un esempio.

Esempio: moto in un campo di dipolo, ristretto al piano

In \mathbb{R}^3 , il potenziale di dipolo, con il dipolo orientato sull'asse delle x_1 , è, a meno di costanti,

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{1}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1$$

dove \mathbf{e}_1 è il versore dell'asse x_1 . Si noti che questo potenziale decade come $1/|\mathbf{x}|^2$, più rapidamente del potenziale coulombiano.

Restringendoci a moti che avvengono sul piano (x_1, x_2) la lagrangiana è

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{x_1}{|\mathbf{x}|^3}$$

che in coordinate polari è

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{\rho^2} \cos \vartheta$$

La corrispondente hamiltoniana è

$$H = \frac{p_\rho^2}{2} + \frac{p_\vartheta^2}{2\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \cos \vartheta$$

Come si nota facilmente, non ci sono variabili cicliche. L'equazione di HJ è

$$\frac{1}{2}(\partial_\rho W)^2 + \frac{1}{2\rho^2}(\partial_\vartheta W)^2 - \frac{1}{\rho^2} \cos \vartheta = E$$

dove E sarà uno dei nuovi impulsi. Cerco la soluzione nella forma

$$W(\rho, \vartheta) = A(\rho) + B(\vartheta)$$

Ottengo

$$\frac{1}{2} (\partial_\rho A(\rho))^2 + \frac{1}{2\rho^2} (\partial_\vartheta B(\theta))^2 - \frac{1}{\rho^2} \cos \vartheta = E$$

che si può riscrivere come

$$\frac{1}{2} (\partial_\rho A(\rho))^2 + \frac{1}{2\rho^2} \left((\partial_\vartheta B(\theta))^2 - 2 \cos \vartheta \right) = E$$

È abbastanza evidente che questa equazione si può risolvere solo ipotizzando che

$$(\partial_\vartheta B(\theta))^2 - 2 \cos \vartheta = J$$

con J che non dipende da ρ e da ϑ . In tal caso l'equazione per A diventa

$$\frac{1}{2} (\partial_\rho A(\rho))^2 + \frac{J}{2\rho^2} = E$$

Le due equazioni sono risolte da

$$B(\vartheta, J) = \pm \int^\vartheta d\vartheta \sqrt{J + 2 \cos \vartheta}$$

$$A(\rho, J, E) = \pm \int^\rho d\rho \sqrt{2E - \frac{J}{\rho^2}}$$

Le nuove variabili sono

$$Q_J = \frac{\partial W}{\partial J} = \frac{\partial B}{\partial J} + \frac{\partial A}{\partial J} = \pm \int^\vartheta \frac{d\vartheta}{2\sqrt{J + 2 \cos \vartheta}} \mp \int^\rho \frac{d\rho}{2\rho^2 \sqrt{2E - \frac{J}{\rho^2}}}$$

$$Q_E = \frac{\partial W}{\partial E} = \pm \int^\rho \frac{d\rho}{\sqrt{2E - \frac{J}{\rho^2}}}$$

Poiché la soluzione delle equazioni del moto è data da $Q_E = t + c_1$ e $Q_J = c_2$, le formule di quadratura sono

$$\pm \int^{\vartheta(t)} \frac{d\vartheta}{2\sqrt{J + 2 \cos \vartheta}} \mp \int^{\rho(t)} \frac{d\rho}{2\rho^2 \sqrt{2E - \frac{J}{\rho^2}}} = c_2$$

$$\pm \int^{\rho(t)} \frac{d\rho}{\sqrt{2E - \frac{J}{\rho^2}}} = t + c_1$$

Abbiamo potuto portare il moto alle quadrature perché il metodo di HJ ci ha permesso di notare l'esistenza di un integrale primo, diverso dall'energia:

$$J = p_\vartheta^2 - 2 \cos \vartheta$$

In genere, l'equazioni di HJ si risolve se ci sono n integrali primi, e la loro dipendenza è separabile.

3.8 L'equazione caratteristica di HJ

Formalizzo i concetti espressi nei punti precedenti. Si chiama **integrale completo** dell'equazione caratteristica di Hamilton-Jacobi

$$H(\mathbf{q}, \partial_{\mathbf{q}} W) = E$$

una funzione $W = W(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}})$, dove \mathbf{p} sono n parametri indipendenti da cui dipende la soluzione, con $E = E(\tilde{\mathbf{p}})$, e tali che

$$\det \partial_{\tilde{\mathbf{p}}}^2 W \neq 0$$

Se una tale funzione esiste, allora è ben definito il cambiamento di variabili dato, implicitamente, da

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{q}} = \partial_{\tilde{\mathbf{p}}} W(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}}) \\ \mathbf{p} = \partial_{\mathbf{q}} W(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}}) \end{cases}$$

L'hamiltoniana nelle nuove variabili è data da $E = E(\tilde{\mathbf{p}})$, le equazioni del moto diventano

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{p}}} = 0 \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \partial_{\tilde{\mathbf{p}}} E(\tilde{\mathbf{p}}) \end{cases}$$

Poiché i nuovi impulsi sono costanti, anche $\partial_{\tilde{\mathbf{p}}} E(\tilde{\mathbf{p}})$ è un vettore costante, dunque il moto nelle nuove variabili è

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{p}}(t) = \tilde{\mathbf{p}}(0) \\ \tilde{\mathbf{q}}(t) = \tilde{\mathbf{q}}(0) + t \partial_{\tilde{\mathbf{p}}} E(\tilde{\mathbf{p}}) \end{cases}$$

4 Sistemi integrabili

4.1 Sistemi integrabili

Se l'equazione caratteristica di HJ

$$H(\mathbf{q}, \partial_{\mathbf{q}} W) = E$$

ha un integrale completo W , i nuovi impulsi sono degli integrali primi indipendenti del moto. Ne segue che se un sistema non ha n integrali primi indipendenti, non è possibile trovare un integrale completo delle equazioni di HJ.

Inoltre, se HJ ha soluzione, il moto nelle nuove variabili è particolarmente semplice, infatti i nuovi impulsi sono costanti, e nelle nuove coordinate il moto è rettilineo uniforme:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{p}}(t) = \tilde{\mathbf{p}}(0) \\ \tilde{\mathbf{q}}(t) = \tilde{\mathbf{q}}(0) + t \partial_{\tilde{\mathbf{p}}} E(\tilde{\mathbf{p}}(0)) \end{cases}$$

Queste stesse formule indicano che il moto è stato **ridotto alle quadrature**, cioè il moto è descritto attraverso inversioni di funzioni (che in genere sono espresse mediante integrali):

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = \tilde{\mathbf{p}}(0) \\ \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0)) + t \partial_{\tilde{\mathbf{p}}} E(\tilde{\mathbf{p}}(0)) \end{cases}$$

Un sistema che si possa ridurre alle quadrature mediante HJ è detto **sistema integrabile**.

I sistemi integrabili sono sistemi con specifiche proprietà. Si noti, infatti, che i nuovi impulsi sono integrali primi del moto indipendenti (cioè non si può determinarne uno in funzione degli altri). Inoltre, per le regole di commutazione canonica,

$$\{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\}_{\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}} = 0$$

Ma, per la conservazione delle parentesi di Poisson per trasformazioni canoniche, deve anche valere

$$\{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = 0$$

Da questa analisi si comprende che un sistema integrabile ha necessariamente n integrali primi indipendenti in involuzione. Si noti anche non può esistere un ulteriore integrale primo indipendente in involuzione cgl integrali primi \tilde{p}_i . Infatti se esistesse $W = W(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, nelle nuove variabili si avrebbe, per la condizione di involuzione

$$0 = \{\tilde{p}_i, W\} = -\partial_{\tilde{q}_i} W$$

ma allora W non dipende dalle $\tilde{\mathbf{q}}$ e dunque

$$W = W(\tilde{\mathbf{p}})$$

Quindi non è indipendente.

Dimostreremo l'esistenza di n integrali primi indipendenti in involuzione è anche una condizione sufficiente all'integrabilità. In particolare dimostreremo l'integrabilità locale di un sistema siffatto (teorema di Liouville), per poi descrivere la versione globale (teorema di Arnold-Liouville), che dà anche importanti informazioni qualitative sul moto,

4.2 Integrabilità locale

Teorema 4.1 Liouville *Sia dato un sistema di hamiltoniana H indipendente dal tempo. Supponiamo che in un intorno di un punto $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$ esistano n funzioni $f_i = f_i(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, con $i = 1, \dots, n$, tali che*

- sono integrali primi del moto, cioè $\{f_i, H\} = 0$ per ogni i ;
- sono in involuzione, cioè $\{f_i, f_j\} = 0$, per ogni i, j ;
- sono indipendenti, cioè la matrice $(\partial_{\mathbf{z}} f_1 \dots \partial_{\mathbf{z}} f_n)$ ha rango n in un intorno di \mathbf{z}_0

Indicando con \mathbf{f} il vettore formato da queste n funzioni $\mathbf{f} = (f_1 \dots f_n)$, esiste una funzione $h = h(\mathbf{f})$ tale che in un intorno di \mathbf{z}_0

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = h(\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p}))$$

e una trasformazione canonica $S(\mathbf{q}, \mathbf{f})$ che ha \mathbf{f} come nuovi impulsi. Nelle nuove coordinate $(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{f})$ il moto è ricondotto alle quadrature:

$$\tilde{\mathbf{q}}(t) = \tilde{\mathbf{q}}(0) + t \partial_{\mathbf{f}} h(\mathbf{f})$$

con \mathbf{f} e $\partial_{\mathbf{f}} h(\mathbf{f})$ vettori costanti.

Assumeremo per semplicità che in un intorno di \mathbf{z}_0

$$\det \partial_{\mathbf{p}} \mathbf{f} \neq 0$$

(si ricordi che per ipotesi c'è un minore $n \times n$ con determinante non nullo della matrice $\partial_{\mathbf{z}} \mathbf{f}$, che però potrebbe non essere $\partial_{\mathbf{p}} \mathbf{f}$). Da questa ipotesi, usando il teorema della funzione implicita, segue che è possibile esprimere le \mathbf{p} in funzione delle \mathbf{q} e delle \mathbf{f} . Esiste, cioè, una funzione $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{f})$ tale che **NO USARE \mathbf{p} !!!!**

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p})) = \mathbf{p}$$

Differenziando in \mathbf{p} e in \mathbf{q} si ha che

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{f}} \mathbf{g} \partial_{\mathbf{p}} \mathbf{f} &= \mathbf{I} \\ \partial_{\mathbf{q}} \mathbf{g} + \partial_{\mathbf{f}} \mathbf{g} \partial_{\mathbf{q}} \mathbf{f} &= 0 \end{aligned}$$

Usando la prima nella seconda, si ottiene

$$\partial_{\mathbf{q}}\mathbf{g} = -\partial_{\mathbf{p}}\mathbf{f}^{-1} \partial_{\mathbf{q}}\mathbf{f} = 0 \quad (19)$$

La condizione di involuzione implica che la forma differenziale

$$\mathbf{g}(\mathbf{f}, \mathbf{q}) \cdot d\mathbf{q}$$

è chiusa. La condizione di chiusura, infatti, equivale a

$$\partial_{\mathbf{q}}\mathbf{g} = \partial_{\mathbf{q}}\mathbf{g}^t \quad (20)$$

Usando la (19) si ottiene che la (20) è equivalente a

$$\partial_{\mathbf{p}}\mathbf{f}^{-1} \partial_{\mathbf{q}}\mathbf{f} = \partial_{\mathbf{q}}\mathbf{f}^t (\partial_{\mathbf{p}}\mathbf{f}^t)^{-1}$$

che, moltiplicando a sinistra per $\partial_{\mathbf{p}}\mathbf{f}$ e a destra per $\partial_{\mathbf{p}}\mathbf{f}^t$, è equivalente a

$$\partial_{\mathbf{q}}\mathbf{f} \partial_{\mathbf{p}}\mathbf{f}^t = \partial_{\mathbf{p}}\mathbf{f}^t \partial_{\mathbf{q}}\mathbf{f}^t$$

L'elemento di matrice ij del membro di sinistra è $\partial_{\mathbf{q}}\mathbf{f}_i \cdot \partial_{\mathbf{p}}\mathbf{f}_j$, quello del membro di sinistra è $\partial_{\mathbf{p}}\mathbf{f}_i \cdot \partial_{\mathbf{q}}\mathbf{f}_j$, dunque la condizione è equivalente a $\{f_i, f_j\} = 0$ per ogni i e j .

La chiusura della forma $\mathbf{g} \cdot d\mathbf{q}$ permette di definire, localmente, la sua primitiva

$$S(\mathbf{q}, \mathbf{f}) = \int_{\mathbf{q}_0}^{\mathbf{q}} \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{f}) \cdot d\mathbf{q}$$

dove l'integrale è esteso a un qualunque cammino intorno a \mathbf{z}_0 che parte da q_0 e arriva in \mathbf{q} . Si noti che stiamo in pratica definendo

$$S(\mathbf{q}, \mathbf{f}) = \int_{\mathbf{q}_0}^{\mathbf{q}} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}$$

dove \mathbf{p} diventano funzioni delle \mathbf{q} , fissando le \mathbf{f} . Per definizione,

$$\partial_{\mathbf{q}}S = \mathbf{g} \quad \text{e} \quad \partial_{\mathbf{f}, \mathbf{q}}^2 S = \partial_{\mathbf{f}}\mathbf{g} = \partial_{\mathbf{p}}\mathbf{f}^{-1}$$

che sono tutte matrici non singolari per le ipotesi fatte. Dunque S definisce una trasformazione canonica, attraverso

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{f}) \\ \tilde{\mathbf{q}} &= \partial_{\mathbf{f}}S(\mathbf{q}, \mathbf{f}) \end{aligned}$$

dove le nuove coordinate sono le $\tilde{\mathbf{q}}$, mentre i nuovi impulsi sono gli integrali primi \mathbf{f} . Sia \tilde{H} l'hamiltoniana nelle nuove variabili. Poichè, per le equazioni di Hamilton

$$\dot{\mathbf{f}} = -\partial_{\tilde{\mathbf{q}}}\tilde{H}$$

ma $\dot{\mathbf{f}} = 0$, ne segue che

$$\tilde{H} = \tilde{H}(\mathbf{f})$$

, e dunque

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \tilde{H}(\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p}))$$

(ricordo che per trasformazioni simplettiche indipendenti dal tempo, la nuova hamiltoniana è la vecchia calcolata nelle nuove variabili). Ne segue la banalità del moto in $\tilde{\mathbf{q}}$:

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \partial_{\mathbf{f}}\tilde{H}(\mathbf{f})$$

e il membro di destra non dipende dal tempo.

4.3 Integrabilità globale

Teorema 4.2 Arnold-Liouville *Nelle ipotesi del teorema precedente, supponiamo che* $M_{\mathbf{c}}$ *è una varietà* n -*dimensionale* *definita dalle costanti* $c_i, i = 1, \dots, n$

$$M_{\mathbf{c}} = \{\mathbf{z} \mid f_i(\mathbf{z}) = c_i, i = 1, \dots, n\}$$

sia compatta e lo iacobiano $\partial_{\mathbf{z}}f$ *sia di rango* n *in tutti i punti della varietà* $M_{\mathbf{c}}$. *Si noti che* $M_{\mathbf{c}}$ *è invariante per il moto, poiché le* f_i *sono costanti del moto.*

Allora:

- $M_{\mathbf{c}}$ è diffeomorfa a un toro n -dimensionale.
- su $M_{\mathbf{c}}$ si possono scegliere n variabili angolari $\vartheta_i \in [0, 2\pi]$
- in queste variabili il moto è dato da

$$\vartheta(t) = \vartheta(0) + t\boldsymbol{\omega}$$

dove $\boldsymbol{\omega}$ è un vettore costante (vettore delle frequenze)

In questo moto sul toro, ogni variabile ϑ_i si muove con velocità uniforme, e torna al valore iniziale dopo un periodo $T_i = 2\pi/\omega_i$. Per questo fatto prende il nome di **moto quasi periodico sul toro**.

Do l'idea della dimostrazione, che però non farò nei dettagli. Il punto chiave è considerare i flussi Ψ_i^t di hamiltoniana f_i . Poiché le f_i sono in involuzione, la varietà $M_{\mathbf{c}}$ è invariante anche per questi flussi. Inoltre, sempre per l'involuzione, i flussi commutano. Sia ora $\mathbf{z} \in M_{\mathbf{c}}$, e consideriamo la mappa

$$\Psi^{s_1 s_2 \dots s_n}(\mathbf{z}) = \Psi_1^{s_1} \circ \Psi_n^{s_n}(\mathbf{z})$$

Per valori sufficientemente vicini a 0, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ è un sistema di coordinate locali per $M_{\mathbf{c}}$ intorno a \mathbf{x} , per l'indipendenza delle f_i , infatti i vettori $J \partial_{\mathbf{z}} f_i$ sono una base per lo spazio tangente a $M_{\mathbf{c}}$. Da questo segue che $\Psi^{\mathbf{s}}$ è suriettiva.

Notiamo inoltre altri due importanti fatti riguardo $\Psi^{\mathbf{s}}$:

$$\partial_{s_i} \Psi^{\mathbf{s}} = J \partial_{\mathbf{z}} f_i(\Psi^{\mathbf{s}})$$

infatti, poiché i flussi commutano, posso far agire $\Psi_i^{s_i}$ per ultimo, e la sua derivata è proprio $J \partial_{\mathbf{z}} f_i$ calcolato sul flusso.

Ricordo che per il teorema di Liouville, $H = H(\mathbf{f})$, dunque

$$J \partial_{\mathbf{z}} H = \sum_i \partial_{f_i} H J \partial_{\mathbf{z}} f_i$$

e $\alpha_i = \partial_{f_i} H$ sono costanti su $M_{\mathbf{c}}$. Sia ora

$$\mathbf{s}(t) = t\boldsymbol{\alpha}$$

Allora, per ogni \mathbf{z} e per ogni t

$$\Psi^{\mathbf{s}(t)}(\mathbf{z}) = \Phi^t(\mathbf{z})$$

Infatti è vera per $t = 0$, e derivando in t si ottiene

$$\sum_i \alpha_i J \partial_{\mathbf{z}} f_i(\Phi^t(\mathbf{z})) = J \partial_{\mathbf{z}} H(\Phi^t(\mathbf{z}))$$

che è un'identità verificata. Dunque il moto nelle variabili locali s_i è un moto a velocità costante.

Mostriamo ora che $M_{\mathbf{c}}$ è diffeomorfa a un toro. Poiché $M_{\mathbf{c}}$ è compatta, $\Psi^{\mathbf{s}}$ non può essere iniettiva. Sia

$$G = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n : \Psi^{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\}$$

È facile verificare che G è un sottogruppo di \mathbb{R}^n rispetto all'addizione. Si prova che G è costituito da punti isolati, e questo implica che esistono m vettori indipendenti $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ tali che

$$G = \left\{ \sum_{i=1}^m k_i \mathbf{e}_i \mid k_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

Siano inoltre $\mathbf{e}_{m+1} \dots \mathbf{e}_n$ una base per l'ortogonale di $\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_m$. Considero ora l'applicazione lineare

$$(\vartheta_1 \dots \vartheta_m) \rightarrow \mathbf{s}(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \vartheta_i \mathbf{e}_i$$

Per costruzione

$$\Phi^{\mathbf{s}(\vartheta)}$$

è un diffeomorfismo tra $S^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ e $M_{\mathbf{c}}$, dove S è la circonferenza unitaria. Ma, poiché $M_{\mathbf{c}}$ è compatta, $m = n$ e $M_{\mathbf{c}}$ è diffeomorfa al toro n -dimensionale.

Data la linearità tra le variabili \mathbf{s} e le variabili ϑ , e poiché il moto nelle variabili \mathbf{s} è a velocità costante, ne segue che anche nelle variabili ϑ il moto è a velocità costante.

4.4 Variabili azione-angolo

DA FARE!!! Nella dimostrazione del teorema di Arnold abbiamo costruito le variabili angolari "a mano", senza usare le trasformazioni canoniche. Si può dimostrare che nelle ipotesi del teorema, esiste una funzione generatrice $S = S(\mathbf{q}, \mathbf{A})$, dove le \mathbf{A} sono funzioni delle \mathbf{f} , e le coordinate φ coniugate ai nuovi impulsi sono angoli. Si noti che poiché

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} = -\varphi \cdot d\mathbf{A} + dS$$

e φ sono angoli, \mathbf{A} ha le dimensioni di $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$ che ha le dimensioni di un'azione, infatti nell'integrale d'azione compare $\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}}$ integrato nel tempo.

4.5 Moti quasi periodici

Consideriamo un moto quasi periodico sul toro T^n , dato da

$$\vartheta(t) = \vartheta(0) + t\omega$$

Le frequenze ω si dicono **razionalmente indipendenti** se, per ogni $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^n$ (ogni componente di \mathbf{w} è un intero) allora

$$\omega \cdot \mathbf{w} \neq 0$$

(mostrare che questa definizione è equivalente se scegliamo $\mathbf{w} \in \mathbb{Q}^n$). Si possono dimostrare i seguenti fatti.

- Se le frequenze sono razionalmente indipendenti, la funzione $t \rightarrow \vartheta(0) + t\omega$ è iniettiva, e il moto è denso sul toro.
- Se invece le frequenze sono razionalmente dipendenti senza essere multipli interi di una stessa frequenza, sia m il massimo numero di frequenze razionalmente indipendenti. Allora il moto risulta denso su una sottovarietà diffeomorfa a un toro di dimensione m .
- In particolare, se $m = 1$, esiste $\nu \in \mathbb{R}$ e esistono n interi k_i tali che $\omega_i = k_i \nu$; in tal caso il moto è periodico e infatti ricopre un toro unidimensionale, cioè una varietà diffeomorfa a una circonferenza.

Si provino per esercizio queste affermazioni.

4.6 L'equazione caratteristica di HJ per il moto centrale

DA FARE

5 Meccanica hamiltoniana e ottica geometrica

Ho svolto questo argomento usando le dispense di Teta, qui metto solo un teorema di esistenza locale per l'equazione caratteristica di HJ, che mima il teorema di esistenza per l'equazione di HJ dipendente dal tempo (che trovate sulle dispense di Teta). Per il metodo delle caratteristiche in generale, potete anche guardare l'Evans di PDE.

Voglio risolvere localmente l'equazione dell'iconale

$$|\nabla W(\mathbf{x})| = n^2(\mathbf{x})$$

Ricordo che l'equazione caratteristica di HJ per l'hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + U(\mathbf{q})$$

è l'equazione dell'iconale, scegliendo $n^2 = 2m(E - U(\mathbf{q}))$.

Supponiamo che W esista in un intorno di Σ . Consideriamo il flusso generato da ∇W , cioè sia $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(t, \mathbf{q}_0)$ soluzione di

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}(t) = \nabla W(\mathbf{q}(t)) \\ \mathbf{q}(0, \mathbf{q}_0) = \mathbf{q}_0 \end{cases}$$

Allora

$$\frac{d}{dt}W(\mathbf{q}(t)) = \nabla W(\mathbf{q}(t)) \cdot \dot{\mathbf{q}} = |\nabla W(\mathbf{q}(t))|^2 = n^2(\mathbf{q}(t))$$

dunque

$$W(\mathbf{q}(t)) = W(\mathbf{q}_0) + \int_0^t n^2(\mathbf{q}(s)) ds.$$

Se chiamo $\mathbf{p} = \nabla W(\mathbf{q})$, allora

$$\dot{\mathbf{p}} = \partial_{\mathbf{q}}^2 W(\mathbf{q}) \nabla W(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \nabla |\nabla W|^2(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \nabla n^2(\mathbf{q})$$

Riassumendo le relazioni tra \mathbf{q} , \mathbf{p} , $z = W(\mathbf{q})$:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{2} \partial_{\mathbf{q}} n^2 \\ \dot{z} = n^2 \end{cases}$$

Queste equazioni sono le equazioni delle **caratteristiche** associate all'equazione dell'iconale. Noto che le prime due sono equazioni di Hamilton, con hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}\mathbf{p}^2 - \frac{1}{2}n^2$$

e che il moto $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ ha energia nulla, infatti

$$H = \frac{1}{2}|\nabla W|^2 - \frac{1}{2}n^2 = 0$$

perché $\mathbf{p} = \nabla W$, e W soddisfa l'equazione dell'iconale

Mostrerò che posso risolvere l'equazione risolvendo il sistema hamiltoniano associato. In particolare voglio risolvere l'equazione sapendo che $W(\mathbf{x})$ è nullo su una superficie regolare Σ (dunque voglio risolvere un problema al contorno). Noto che l'equazione è invariante se si somma a W una costante, dunque assumere che è 0 non riduce la generalità del procedimento (ma più in generale si può considerare il caso in cui W sia una funzione assegnata g sulla superficie Σ).

Sia Σ una superficie regolare, sia $\mathbf{q}_0 \in \Sigma$, sia \mathbf{p}_0 ortogonale a Σ in \mathbf{q}_0 e di lunghezza

$$|\mathbf{p}_0| = n^2(\mathbf{q}_0)$$

Inoltre, scelgo le direzioni di \mathbf{p}_0 concordi al variare di \mathbf{q}_0 lungo la superficie. Considero la soluzione delle equazioni di Hamilton di hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}\mathbf{p}^2 - \frac{1}{2}n(\mathbf{q})^2$$

di dato iniziale $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$. Poiché \mathbf{p}_0 è funzione di \mathbf{q}_0 , il flusso hamiltoniano definisce le funzioni

$$\mathbf{q}(t, \mathbf{q}_0), \quad \mathbf{p}(t, \mathbf{q}_0)$$

Poiché $\dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{p}_0$,

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + t\mathbf{p}_0 + O(t^2)$$

con \mathbf{p}_0 parallelo alla normale a Σ in \mathbf{q}_0 , dunque esistono in un intorno di Σ le funzioni

$$t = t(\mathbf{q}), \quad \Sigma \ni \mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_0(\mathbf{q})$$

tali che

$$\mathbf{q}(t(\mathbf{q}), \mathbf{q}_0(\mathbf{q})) = \mathbf{q}$$

Cioè a ogni \mathbf{q} faccio corrispondere il punto iniziale su Σ della traiettoria che passa per \mathbf{q} , e il tempo $t(\mathbf{q})$ necessario per andare da \mathbf{q}_0 a \mathbf{q} .

Teorema 5.1 Soluzione locale dell'equazione dell'iconale

La soluzione dell'equazione dell'iconale è

$$W(q) = \int_0^{t(\mathbf{q})} n^2(\mathbf{q}(s)) ds$$

dove $\mathbf{q}(s)$ è la traiettoria che parte da $\mathbf{q}_0(\mathbf{q})$ con impulso iniziale \mathbf{p}_0 .

Si tratta di verificare che W così costruita è effettivamente soluzione. Per definizione, fissato \mathbf{q}_0 ,

$$W(\mathbf{q}(t, \mathbf{q}_0)) = \int_0^t n^2(\mathbf{q}(s)) ds$$

dove $\mathbf{q}(s)$ è la traiettoria che parte da \mathbf{q}_0 con impulso \mathbf{p}_0 . Derivando rispetto al tempo,

$$\nabla W \cdot \dot{\mathbf{q}} = n^2$$

Per ottenere la tesi si deve dimostrare che

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \nabla W(\mathbf{q}(t))$$

Innanzitutto noto che per definizione di W

$$W(\mathbf{q}(t, \mathbf{q}_0)) = W(\mathbf{q}(\tau, \mathbf{q}_0)) + \int_{\tau}^t n^2(\mathbf{q}(s)) ds$$

Inoltre, il moto ha energia nulla, infatti H è costante e al tempo 0 vale 0, perché $|\mathbf{p}_0|$ è scelto proprio in modo che $H = 0$. Dunque lungo il moto

$$n^2 = \mathbf{p}^2 = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$$

dove nella seconda uguaglianza ho usato che $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p}$, e nella terza che l'energia H è nulla. Quindi

$$W(\mathbf{q}(t, \mathbf{q}_0)) = W(\mathbf{q}(\tau, \mathbf{q}_0)) + \int_{\tau}^t (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - H) ds$$

Derivo questa espressione in \mathbf{q}_0 , notando che

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{q}_0} W(\mathbf{q}(t, \mathbf{q}_0)) &= \partial_{\mathbf{q}_0} \mathbf{q}^t(t) \nabla W(\mathbf{q}(t)) \\ \partial_{\mathbf{q}_0} (\mathbf{p}(s) \cdot \dot{\mathbf{q}}(s)) &= \partial_{\mathbf{q}_0} \mathbf{p}^t(s) \dot{\mathbf{q}}(s) + \partial_{\mathbf{q}_0} \dot{\mathbf{q}}^t(s) \mathbf{p}(s) \\ \partial_{\mathbf{q}_0} H(\mathbf{q}(s), \mathbf{p}(s)) &= \partial_{\mathbf{q}_0} \mathbf{q}^t(s) \partial_{\mathbf{q}} H + \partial_{\mathbf{q}_0} \mathbf{p}^t(s) \partial_{\mathbf{p}} H \end{aligned}$$

Usando queste identità e le equazioni di Hamilton, ottengo

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{q}_0} \mathbf{q}^t(t) \nabla W(\mathbf{q}(t)) &= \partial_{\mathbf{q}_0} \mathbf{q}^t(\tau) \nabla W(\mathbf{q}(t)) \nabla W(\mathbf{q}(\tau)) + \\ &+ \int_{\tau}^t (\partial_{\mathbf{q}_0} \mathbf{p}^t(s) \dot{\mathbf{q}}(s) + \partial_{\mathbf{q}_0} \dot{\mathbf{q}}^t(s) \mathbf{p}(s) + \partial_{\mathbf{q}_0} \mathbf{q}^t(s) \dot{\mathbf{p}}(s) - \partial_{\mathbf{q}_0} \mathbf{p}^t(s) \dot{\mathbf{q}}(s)) ds \\ &= \partial_{\mathbf{q}_0} \mathbf{q}^t(\tau) \nabla W(\mathbf{q}(\tau)) + \int_{\tau}^t \frac{d}{ds} (\partial_{\mathbf{q}_0} \mathbf{q}^t \mathbf{p}) \\ &= \partial_{\mathbf{q}_0} \mathbf{q}^t(\tau) \nabla W(\mathbf{q}(\tau)) + \partial_{\mathbf{q}_0} \mathbf{q}^t(t) \mathbf{p}(t) - \partial_{\mathbf{q}_0} \mathbf{q}^t(\tau) \mathbf{p}(\tau) \end{aligned}$$

Mandando τ a zero, $\partial_{\mathbf{q}_0} \mathbf{q}^t(\tau)$ tende a alla matrice identica, mentre $\nabla W(\mathbf{q}(t))$ tende a $\nabla W(\mathbf{q}_0)$. La tesi è dimostrata se si prova che

$$\nabla W(\mathbf{q}_0) - \mathbf{p}_0 = 0$$

Poiché per costruzione Σ è una curva di livello di W , $\nabla W(\mathbf{q}_0)$ è ortogonale a Σ , e dunque parallelo a \mathbf{p}_0 , che è anche pari a $\dot{\mathbf{q}}(0)$. D'altra parte, abbiamo già ottenuto che lungi la traiettoria

$$\nabla W \cdot \dot{\mathbf{q}} = n^2 = \mathbf{p}^2$$

Al tempo 0 ottengo

$$\nabla W(\mathbf{q}_0) \cdot \mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0^2$$

ma essendo $\nabla W(\mathbf{q}_0)$ parallelo a $\mathbf{p}(0)$ ottengo

$$\nabla W(\mathbf{q}_0) = \mathbf{p}_0$$

La soluzione non può esistere regolare in grande, perché la condizione di invertibilità del flusso non vale in grande. Si osservi il seguente grafico, un cui sono rappresentate i fronti d'onda per l'equazione $|\nabla W| = 1$, assumendo che Σ è la parabola $x^2/2$ (in nero). Al tempo 1 il fronte è ancora una curva regolare (in blu), ma già ha una irregolarità nella derivata sull'asse della parabola, al tempo 2 non è più una curva regolare (in rosso).

