

# Appunti del corso di Fisica Matematica 2015–2016

in aggiornamento

30 novembre 2015

In questi appunti trovate gli argomenti che ho svolto e che non sono presenti sulle dispense di Buttà, o che ho svolto diversamente.

## Indice

<b>1</b>	<b>L'equazione di Liouville</b>	<b>1</b>
1.1	Osservazioni e complementi . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Equazione delle onde in una dimensione</b>	<b>5</b>
2.1	Derivazione dell'equazione . . . . .	6
2.2	Soluzione di d'Alembert . . . . .	6
2.3	Soluzioni deboli . . . . .	6
2.4	Distribuzioni . . . . .	11
2.5	Alcune osservazioni sulla $\delta$ . . . . .	13
2.6	Distribuzioni temperate . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Serie e trasformata di Fourier</b>	<b>16</b>
3.1	Serie di Fourier . . . . .	16
3.2	Trasformata di Fourier . . . . .	16
3.3	Velocità di gruppo e velocità di fase . . . . .	22
<b>4</b>	<b>L'equazione delle onde in dimensione 2 e 3</b>	<b>22</b>
4.1	La formula di Kirchhoff . . . . .	22
4.2	La formula di Poisson . . . . .	26
<b>5</b>	<b>L'equazione di Poisson e le funzioni armoniche</b>	<b>26</b>
5.1	La funzione di Green attraverso la trasformata di Fourier . . . . .	27
5.2	La soluzione del problema di Poisson in $\mathbb{R}^3$ . . . . .	28
5.3	La III identità di Grenn . . . . .	29

## 1 L'equazione di Liouville

Ho introdotto l'equazione di Liouville discutendo la descrizione statistica di un moto governato da una EDO. Riproduco qui brevemente i punti di questa introduzione, che Buttà, invece, presenta come osservazione finale (a pag. 13).

Sia  $\Phi^{t,s}(\mathbf{x})$  il flusso associato all'EDO

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$$

Possiamo modellizzare il caso in cui il dato iniziale sia conosciuto con incertezza assegnando una densità di probabilità al tempo  $t = 0$ , che indicherò con  $f_0(x)$  (considero il tempo 0 per semplicità, ma nulla cambia nel caso il tempo iniziale sia  $s$ ). Questa incertezza sul dato iniziale si traduce in una incertezza sulla soluzione al tempo  $t$ . L'equazione di Liouville è proprio l'equazione che governa il cambiamento nel tempo della distribuzione di probabilità. Per esempio, supponiamo che il dato iniziale sia uniformemente distribuito in un dominio  $B$ , quindi

$$f_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{|B|} \mathcal{X}\{\mathbf{x} \in B\}$$

dove  $|B|$  è la misura di  $B$ . Cosa sappiamo del sistema al tempo  $t$ ? Visto che l'evoluzione è **deterministica** (è solo il dato iniziale che ha una descrizione probabilistica), sicuramente la probabilità di trovare il sistema in

$$B_t = \Phi^{t,0}(B) = \{\Phi^{t,0}(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in B\}$$

sarà 1, ma non abbiamo motivo di pensare che la distribuzione resti uniforme. D'altra parte per una generica distribuzione di probabilità iniziale  $f_0$ , se  $f(\mathbf{x}, t)$  è la densità di probabilità al tempo  $t$ , sicuramente, per ogni dominio  $A$ , deve valere

$$\int_{A_t} d\mathbf{x} f(\mathbf{x}, t) = \int_A d\mathbf{x} f_0(\mathbf{x}) \quad (1)$$

Da questa identità si ottiene l'equazione che governa l'evoluzione di  $f$ . Per trovarla, ho dimostrato preliminarmente il seguente teorema (nelle ipotesi di esistenza globale e regolarità per il flusso).

**Teorema 1.1** *Sia  $\Phi^{t,s}$  il flusso associato al campo  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  e sia  $J(\mathbf{x}, t, s) = \det \frac{\partial \Phi^{t,s}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})$  il determinante jacobiano associato al flusso. Considerando noto il flusso, lo jacobiano del flusso verifica la seguente equazione lineare a coefficienti non costanti (in forma matriciale)*

$$\frac{d}{dt} \partial_{\mathbf{x}} \Phi^{t,s}(\mathbf{x}) = \partial_{\mathbf{x}} \mathbf{F}|_{\Phi^{t,s}(\mathbf{x}), t} \partial_{\mathbf{x}} \Phi^{t,s}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

e il determinante jacobiano verifica la seguente equazione differenziale lineare a coefficienti non costanti

$$\frac{d}{dt} J(\mathbf{x}, t, s) = \text{div } \mathbf{F}|_{\Phi^{t,s}(\mathbf{x}), t} J(\mathbf{x}, t, s) \quad (3)$$

La prima equazione si ottiene semplicemente scambiando gli ordini di derivazione e usando l'equazione che definisce il flusso. La seconda equazione richiede un lavoro maggiore.

Il cuore della dimostrazione è nel seguente teorema

**Teorema 1.2**

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \partial_{\mathbf{x}} \Phi^{t+\varepsilon, t}(\mathbf{x}) = \text{div } \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$$

(questa scrittura un po' barocca è indispensabile perché voglio derivare  $\partial_{\mathbf{x}}\Phi^{t,t}$  rispetto alla sola prima  $t$ ). Infatti, una volta dimostrato questo teorema, si può provvedere al calcolo di  $\frac{d}{dt}J(\mathbf{x}, t, s)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det \partial_{\mathbf{x}} \Phi^{t,s}(\mathbf{x}) &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \det \partial_{\mathbf{x}} (\Phi^{t+\varepsilon,t} \circ \Phi^{t,s}(\mathbf{x})) \\ &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \det \partial_{\mathbf{x}} \Phi^{t+\varepsilon,t} \Big|_{\Phi^{t,s}(\mathbf{x}),t} \det \partial_{\mathbf{x}} \Phi^{t,s}(\mathbf{x}) \\ &= \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \Big|_{\Phi^{t,s}(\mathbf{x}),t} \det \partial_{\mathbf{x}} \Phi^{t,s}(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{4}$$

Rimane da dimostrare il teorema. che si basa sul seguente lemma, di cui non riporto qui la dimostrazione che si basa sulla definizione di determinante.

**Lemma 1.1** *Sia  $A$  una matrice quadrata, allora*

$$\det(\mathbb{I} + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \operatorname{Tr} A + O(\varepsilon^2)$$

Dal fatto che la derivata del flusso nel tempo è il campo  $F$ , segue che

$$\Phi^{t+\varepsilon,t}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{F}(\mathbf{x}) + O(\varepsilon^2)$$

Derivo in  $\mathbf{x}$  e calcolo il determinante:

$$\det \partial_{\mathbf{x}} \Phi^{t+\varepsilon,t}(\mathbf{x}) = \det (\mathbb{I} + \varepsilon \partial_{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) + O(\varepsilon^2)) = 1 + \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) + O(\varepsilon^2)$$

(dove ho usato che la traccia dello jacobiano di un campo è proprio la divergenza del campo). A questo punto, usando la definizione di derivata, si ottiene la tesi del teorema.

**Corollario 1.1**

$$\frac{d}{dt} |A_t| = \int_{A_t} \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \, dx$$

*In particolare,  $\operatorname{div} \mathbf{F} \equiv 0$  se e solo se il flusso conserva la misura.*

La dimostrazione si ottiene calcolando la derivata dopo aver cambiato variabile nell'integrale

$$|A_t| = \int_{A_t} dx = \int_A J(\mathbf{x}, t) \, dx$$

Resta da determinare, infine, l'equazione soddisfatta dalla densità di probabilità  $f(\mathbf{x}, t)$ . Derivando l'identità (1), e dopo aver calcolato esplicitamente la derivata mediante il solito cambio di variabili, si ottiene

$$0 = \int_{A_t} (\partial_t f + \operatorname{div}(\mathbf{F}f))(\mathbf{x}, t) \, dx$$

qualunque sia  $A$ , e, dunque, qualunque sia  $A_t$ . L'arbitrarietà di  $A_t$  garantisce che questa identità può essere vera se e solo se  $f$  soddisfa l'equazione

$$\partial_t f(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)f(\mathbf{x}, t)) = 0$$

Infatti vale il lemma

**Lemma 1.2** Sia  $g(\mathbf{x})$  una funzione continua, se per ogni aperto  $A$  vale

$$\int_A g(\mathbf{x}) = 0$$

allora  $g$  è identicamente nulla.

La dimostrazione si fa per assurdo, utilizzando la permanenza del segno.

Questo lemma vale anche se nelle ipotesi  $g$  è solo misurabile, e  $A$  è un qualunque insieme misurabile. In tal caso la tesi è che  $g$  è nulla quasi ovunque. La dimostrazione è semplice: sia  $A_\varepsilon$  l'insieme su cui  $g > \varepsilon$ ; per definizione è misurabile, e, usando l'ipotesi, si ottiene che ha misura nulla; ma allora la misura dell'insieme su cui  $g > 0$  è minore della somma delle misure di  $A_{1/n}$  e dunque è nulla. Analogamente si procede per  $g < 0$ , e si ottiene che la misura degli  $\mathbf{x}$  per cui  $g$  è non nulla è zero, cioè  $g$  è zero quasi ovunque.

L'equazione di Liouville è una **legge di conservazione** in forma di divergenza (*vedi* anche Buttà pagg. 10–11). Infatti, se  $f$  soddisfa l'equazione di Liouville, per ogni  $A$  vale

$$\frac{d}{dt} \int_A f(\mathbf{x}, t) dx = - \int_A \operatorname{div}(\mathbf{F}f)(\mathbf{x}, t) = - \int_{\partial A} f(\mathbf{x}, t) \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} \sigma(d\mathbf{x})$$

Questa uguaglianza afferma che l'integrale di  $f$  in un dominio fissato varia solo perché  $f$  viene trasportata dentro o fuori dal campo  $\mathbf{F}$ . In questo senso, si dice che  $\mathbf{F}f$  è la **corrente** di  $f$ .

Partendo dall'uguaglianza (1) si ottiene anche la soluzione dell'equazione di Liouville, infatti, cambiando la variabile di integrazione al primo membro, si ottiene che per ogni  $A$

$$\int_A d\mathbf{x} J(\mathbf{x}, t, 0) f(\Phi^{t,0}(\mathbf{x}), t) = \int_A d\mathbf{x} f_0(\mathbf{x}) \quad (5)$$

Per l'arbitrarietà di  $A$ , si ottiene che

$$J(\mathbf{x}, t, 0) f(\Phi^{t,0}(\mathbf{x}), t) = f_0(\mathbf{x})$$

e dunque

$$f(\mathbf{x}, t) = \frac{f_0(\Phi^{0,t}(\mathbf{x}), t)}{J(\Phi^{0,t}(\mathbf{x}), t, 0)}$$

Per esercizio, si ricavi l'identità generale  $J(\mathbf{x}, t, s) f(\Phi^{t,s}(\mathbf{x}), t) = f(\mathbf{x}, s)$  mostrando che la derivata del primo membro è nulla. Si mostri anche che

$$J(\Phi^{s,t}(\mathbf{x}), t, s) J(\mathbf{x}, s, t) = 1.$$

In aula ho usato un terzo metodo equivalente per trovare la formula formula che risolve l'equazione, basato sul fatto che la derivata di  $f$  lungo il flusso è pari a  $-(\operatorname{div} \mathbf{F})(\Phi^{t,0}(\mathbf{x}), t) f(\Phi^{t,0}(\mathbf{x}), t)$ , e dunque

$$f(\Phi^{t,0}(\mathbf{x}), t) = f_0(\mathbf{x}) \exp(-\operatorname{div} \mathbf{F}(\Phi^{s,0}(\mathbf{x}), s))$$

Confrontando questa “soluzione” con quella per  $J(\mathbf{x}, t, 0)$  si ottiene la tesi.

Un'osservazione: i sistemi meccanici conservativi sono governati da EDO del secondo ordine, in cui l'accelerazione è pari alla forza  $\mathbf{F}$ , che non dipende dalla velocità, ed è l'opposto del

gradiente dell'energia potenziale. In questo caso, la densità di probabilità nello spazio delle fasi (velocità e posizione)  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  soddisfa l'equazione di Liouville

$$\partial_t f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)) + \operatorname{div}_{\mathbf{v}}(\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)) = 0$$

che è equivalente all'equazione di trasporto

$$\partial_t f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 0$$

Infatti, il campo  $\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{F} \end{pmatrix}$  ha divergenza nulla nella coppia di variabili  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ . In altre parole, i sistemi meccanici conservano la misura nello spazio delle fasi, e l'equazione di Liouville coincide con la corrispondente equazione del trasporto (si noti che queste affermazioni non sono invarianti per la scelta di coordinate lagrangiane diverse da quelle rettangolari, ma sono sempre vere se il sistema viene descritto nel formalismo hamiltoniano).

Infine, il più semplice sistema meccanico è quello costituito da una particella libera. In questo caso la forza è nulla e l'equazione di Liouville si riduce a

$$\partial_t f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 0$$

che è risolta da

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{x} - t\mathbf{v}, \mathbf{v})$$

che descrive il cosiddetto **flusso libero**.

## 1.1 Osservazioni e complementi

Nel caso di sistemi lineari, è utile usare il linguaggio degli operatori. In particolare, il sistema  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ , con  $A$  matrice a coefficienti costanti, ha come soluzione un flusso lineare dato da

$$\Phi^t(\mathbf{x}) = e^{At}\mathbf{x}$$

dove la matrice  $e^{At}$  è l'operatore lineare che si ottiene per serie usando lo sviluppo dell'esponenziale:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k.$$

Nel caso  $A = A(t)$ , la costruzione del flusso è più complessa, anche se si ottiene comunque un operatore lineare (essendo l'equazione lineare).

Anche nel caso delle equazioni del trasporto si può considerare l'operatore soluzione  $\mathcal{U}_t$ :

$$\mathcal{U}_t(u_0)(\mathbf{x}) = u_0(\Phi_{-t}(\mathbf{x})) \tag{6}$$

Per esempio, se stiamo risolvendo in una dimensione  $\partial_t u = \partial_x u$ , si ottiene

$$\mathcal{U}_t(u)(x) = u(x + t)$$

cioè  $\mathcal{U}_t$  è l'operatore di traslazione. Si noti che, per una funzione sviluppabile in serie di Taylor, vale l'identità

$$u(x + t) = \sum_0^{+\infty} \frac{1}{k!} u^{(k)}(x) t^k = \left( \sum_0^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \frac{d^k}{dx^k} \right).$$

Quindi l'operatore di traslazione di  $t$  è  $e^{t\frac{d}{dx}}$ .

Per esercizio, si usi la notazione (6) per esprimere la soluzione nel caso non omogeneo, in analogia con il caso finito dimensionale

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$$

Infine, ricordo che se  $A$  è una matrice, la matrice trasposta verifica l'identità

$$(\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = (A^t\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ , dove con  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  indico il prodotto scalare.

Analogamente, si può definire, formalmente, l'**aggiunto** di un operatore che agisce sulle funzioni, considerando come prodotto scalare il prodotto in  $\mathbf{L}^2$ :

$$(f, g) = \int f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

Per esempio, considerando funzioni delle variabili  $x$  e  $t$ , si provi per esercizio che l'aggiunto dell'operatore  $\partial_t$  è  $-\partial_t$  (cioè  $\partial_t$  è un operatore **antisimmetrico**), mentre l'operatore  $\partial_x^2$  è **autoaggiunto** perché coincide con il suo aggiunto. Infine, si provi per esercizio, che per ogni coppia di funzioni  $f$  e  $g$ , a supporto compatto e di classe  $\mathbf{C}^1$ , vale

$$(f, (\partial_t + \mathbf{F} \cdot \nabla)g) = -(\partial_t f + \operatorname{div}(\mathbf{F}f), g)$$

e dunque, che, in questo senso, l'equazione di Liouville è l'aggiunta dell'equazione di trasporto.

## 2 Equazione delle onde in una dimensione

Dispense di Buttà, capitolo 3, ma nell'ordine e con le integrazioni che seguono.

### 2.1 Derivazione dell'equazione

Sulle dispense di Buttà sono presenti due derivazioni. La prima è quella delle sezioni 3.2.1-2-3 che considera l'energia potenziale proporzionale alla lunghezza della corda, e che nel limite delle piccole oscillazioni dà l'equazione delle onde (attraverso il principio variazionale di Hamilton). La seconda è quella "microscopica" della sezione 3.2.4. Io le ho descritte entrambe, ma prima quella microscopica, passando al limite formale nell'azione. In più, ho aggiunto la versione nel caso di spostamenti anche orizzontali (mostrando che si disaccoppiano da quelli verticali), e, negli esercizi, il caso di molle con lunghezza a riposo non nulla (*vedi* la sezione 2 degli esercizi).

### 2.2 Soluzione di d'Alembert

Come nelle dispense, ma ho formulato e dimostrato diversamente la continuità nel dato iniziale, infatti ho usato la stessa norma sia per la soluzione al tempo  $t$  che per la soluzione al tempo 0, provando il teorema

**Teorema 2.1** Sia  $u_0 \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R})$  e  $\dot{u}_0 \in \mathbf{C}(\mathbb{R})$ . Allora la soluzione di d'Alembert  $u(x, t)$  è continua nel dato iniziale nella norma

$$|||u(\cdot, t)||| = \|u(\cdot, t)\|_\infty + \|\dot{u}(\cdot, t)\|_\infty + \|u'(\cdot, t)\|_\infty$$

dove  $\|f\|_\infty = \sup_x |f(x)|$

La dimostrazione è una semplice applicazione della formula di d'Alembert. Per esercizio, verificare se vale la continuità rispetto alla norma

$$|||u(\cdot, t)||| = \|u(\cdot, t)\|_1 + \|\dot{u}(\cdot, t)\|_1 + \|u'(\cdot, t)\|_1$$

dove  $\|f\|_1 = \int dx |f(x)|$  è la norma nello spazio  $\mathbf{L}^1$ .

### 2.3 Soluzioni deboli

Qui ho introdotto un argomento che non è presente nelle dispense di Buttà. Nelle note di Buttà sono dimostrati i due seguenti teoremi:

**Teorema 2.2** Siano  $u_0 \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R})$  e  $\dot{u}_0 \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R})$ ; allora esiste una e una sola soluzione  $u \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty])$  che risolve l'equazione delle onde  $\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0$ , con dato iniziale  $u_0, \dot{u}_0$ .

Inoltre la soluzione è data dalla formula di d'Alembert.

**Teorema 2.3** Siano  $u_0 \in \mathbf{C}^2([0, L])$  e  $\dot{u}_0 \in \mathbf{C}^1([0, L])$ , con  $u_0(0) = 0 = u_0(L)$  e  $\dot{u}_0(0) = 0 = \dot{u}_0(L)$ . Se, inoltre,  $u_0''(0) = 0 = u_0''(L)$  esiste una e una sola soluzione  $u \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty])$  che risolve l'equazione delle onde  $\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0$  in  $[0, L]$  con condizioni di Dirichlet omogenee al bordo.

La soluzione si ottiene prolungando per disparità il dato iniziale in  $[-L, 0]$ , e poi prolungando per periodicità le funzioni ottenute su tutto  $\mathbb{R}$ .

Ricordo che in questo caso l'unicità si prova come conseguenza della conservazione dell'energia meccanica. Nel caso dell'equazione in  $\mathbb{R}$  l'unicità è conseguenza del fatto che necessariamente la soluzione è somma di due onde viaggianti in verso opposto, che sono determinate imponendo il dato iniziale.

Tra gli esempi abbiamo però considerato il caso del dato iniziale

$$u_0 = 1 - \cos x, \quad \dot{u}_0 = 0$$

per il problema di Cauchy in  $[0, 2\pi]$  con condizioni di Dirichlet omogenee. La soluzione che si costruisce per riflessione ha una singolarità nella derivata seconda in  $x$  lungo le rette  $x = t + 2k\pi$  e  $x = \pi - t + 2k\pi$ , con  $k$  intero.

Questo esempio induce a due riflessioni: abbiamo trovato una soluzione che però non verifica l'equazione in tutti i punti, e inoltre non è garantita l'unicità, che Buttà dimostra nella classe  $\mathbf{C}^2$ . D'altra parte, il dato iniziale che abbiamo considerato sembra un dato del tutto legittimo, ed evidentemente la soluzione trovata è "quella giusta" e sarà ragionevolmente unica. Si noti, infine, che la formula di d'Alembert permette di evolvere nel tempo dati iniziali anche non regolari. Possiamo considerare questi moti come soluzioni dell'equazione delle onde?

Per ottenere una teoria consistente che tenga in conto tutti questi aspetti, si procede *indebolendo* la nozione di soluzione. Ci sono vari modi di farlo, e qui presento quello più comune.

Sia data una funzione  $f$  in  $\mathbb{R}^n$ . Considero una qualunque funzione  $\phi \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  e a supporto compatto, che chiamerò **funzione test** o anche, in gergo più fisico, **osservabile** (regolare). Indicherò con  $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbb{R}^n) = \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  lo spazio vettoriale delle funzioni test. Se conosco  $f$ , posso calcolare

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\phi$$

Al variare di  $\phi$ , questo integrale assume diversi valori, e l'insieme di questi valori dà informazioni su  $f$ . In particolare vale il seguente teorema, che è una variante del lemma 1.2.

### **Teorema 2.4 Lemma Fondamentale del Calcolo delle Variazioni (LFCV)**

Sia  $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^n)$ , se

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi f = 0 \quad \forall \phi \in \mathbf{K}$$

allora  $f = 0$ .

Sia  $f$  misurabile e localmente sommabile . se

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi f = 0 \quad \forall \phi \in \mathbf{K}$$

allora  $f = 0$  q.o..

La dimostrazione nel caso continuo è una facile conseguenza del teorema della permanenza del segno: se, per assurdo, fosse  $f(x_0) \neq 0$ , e dunque, senza mancare di generalità,  $f(x_0) = c > 0$ , esisterebbe un intorno di  $x_0$  in cui  $f(x) \geq c/2$ . Scegliendo una funzione test con supporto nell'intorno e positiva si avrebbe l'assurdo

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} \phi f \geq c \int_{\mathbb{R}^n} \phi > 0.$$

Il caso di  $f$  misurabile si può dimostrare utilizzando il lemma 1.2. Lo lascio come esercizio, suggerendo di provare prima che per ogni rettangolo  $A$  si ha  $\int_A f = 0$  (utilizzando funzioni caratteristiche di  $A$  approssimate, e usando la convergenza dominata), per poi estendere questa affermazione ai misurabili.

Questo lemma ci dice che conoscere  $\int_{\mathbb{R}^n} \phi f$  per ogni  $f$  è equivalente a conoscere  $f$ . Infatti se  $\int_{\mathbb{R}^n} \phi f = \int_{\mathbb{R}^n} \phi g$ , allora  $\int \phi(f-g) = 0$  per ogni  $\phi$  e dunque  $f = g$  q.o.. Inoltre, l'affermazione

$$\forall \phi \in \mathbf{K} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \phi f = 0$$

è una versione “debole” dell'affermazione  $f \equiv 0$ , infatti discende da questa.

C'è un altro modo di vedere LFCV. Considera queste due affermazioni

$$(F_0) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = 0$$

$$(W_0) \quad \forall \phi \in \mathbf{K}, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)f(x) dx = 0$$

Dall'affermazione  $(F_0)$  (“forte”) deriva l'affermazione  $(W_0)$  (“weak”, che vuol dire “debole”). Al contrario, nel caso di massima generalità, da  $(W_0)$  segue che  $f(x) = 0$ , ma solo a meno di qualche punto. Quindi in effetti  $(W_0)$  è un'affermazione più debole di  $(F_0)$  ma quasi dello stesso contenuto.

Considerate ora una funzione  $f(x)$  di una sola variabile reale, e le seguenti affermazioni

$$(F) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 0$$

$$(W) \quad \forall \phi \in \mathbf{K} \quad \int_{\mathbb{R}} \phi'(x)f(x) dx = 0$$

L'affermazione  $(W)$  (“weak”) è una versione debole dell'affermazione  $(F)$ ; infatti, moltiplicando l'uguaglianza  $(F)$  per  $\phi \in \mathbf{K}$  e integrando per parti, si ottiene

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)f'(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} \phi'(x)f(x) dx$$

Notate inoltre che  $(F)$  è un'uguaglianza per  $f$  che ha senso scrivere se è noto che  $f$  è derivabile, mentre l'affermazione  $(W)$  si può formulare qualunque sia  $f$ , anche non derivabile. L'affermazione  $(F)$  implica che  $f$  è costante; la stessa conclusione si ottiene dall'affermazione  $(W)$ . Dimostriamolo.

**Teorema 2.5** *Se  $f$  è una misurabile e localmente integrabile in  $\mathbb{R}$  e vale  $(W)$ , allora  $f$  è una funzione costante q.o..*

Notate che dunque l'affermazione  $(W)$  dà le stesse conclusioni dell'affermazione  $(F)$ . La dimostrazione richiede una certa fatica, proprio perché non possiamo usare il fatto che  $f$  sia una funzione regolare (altrimenti, integrando per parti, potremmo dimostrare  $(F)$  usando il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni, e quindi usare il calcolo integrale per scoprire che  $f$  è costante).

Il primo passo consiste nel notare la seguente equivalenza: sia  $\psi \in \mathbf{K}$ , allora

$$\int_{\mathbb{R}} \psi = 0 \text{ se e solo se } \exists \phi \in \mathbf{K} : \psi = \phi',$$

cioè le funzioni in  $\mathbf{K}$  a integrale nullo sono tutte e sole derivate di funzioni di  $\mathbf{K}$ . L'implicazione  $\psi = \phi' \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \psi = 0$  è ovvia, il viceversa si ottiene semplicemente definendo

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^x \psi(y) dy$$

e notando che ha supporto compatto. Dunque l'affermazione  $(W)$  equivale a

$$\int_{\mathbb{R}} \psi f = 0 \quad \forall \psi \in \mathbf{K} \text{ con } \int_{\mathbb{R}} \psi = 0.$$

Sia ora  $h \in \mathbf{K}$  con integrale  $\int_{\mathbb{R}} h = 1$ , allora,  $\forall \phi \in \mathbf{K}$  si può scrivere

$$\phi = \left( \phi - h \int_{\mathbb{R}} \phi \right) + h \int_{\mathbb{R}} \phi$$

e  $\phi - h \int_{\mathbb{R}} \phi$  ha integrale nullo. Possiamo usare quest'ultima funzione come generica funzione a media nulla, ottenendo che  $\forall \phi \in \mathbf{K}$

$$\int_{\mathbb{R}} \left( \phi(x) - h(x) \int_{\mathbb{R}} \phi(y) dy \right) f(x) dx = 0$$

da cui

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x) f(x) dx - \int_{\mathbb{R}} \phi(y) dy \int_{\mathbb{R}} h(x) f(x) dx = 0$$

che, scambiando i nomi delle variabili di integrazione nel membro di destra e raccogliendo, diventa

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x) (f(x) - c) dx \quad \text{con } c = \int_{\mathbb{R}} h(y) f(y) dy$$

Per l'arbitrarietà di  $\phi$ , segue che  $f(x) = c$  per quasi ogni  $x$ .

Scrivo ora una versione debole dell'equazione delle onde, ipotizzando che  $u$  sia una soluzione  $\mathbf{C}^2$ , di dato iniziale  $u_0(x)$ ,  $\dot{u}_0(x)$ . Sia  $\phi(x, t)$  una funzione in  $\mathbf{K}(\mathbb{R}^2)$ . Dall'equazione segue che

$$\int_0^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}} dx \phi(x, t) (\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u) = 0$$

Integrando per parti in  $t$  il primo addendo e per parti in  $x$  il secondo, dopo aver opportunamente scambiato gli ordini di integrazione:

$$- \int_{\mathbb{R}} dx \phi(x, 0) \dot{u}_0(x) - \int_0^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}} dx (\partial_t \phi \partial_t u - c^2 \partial_x \phi \partial_x u) = 0$$

Integrando di nuovo per parti, si ottiene la formulazione debole del problema di Cauchy per l'equazione delle onde:

$$\int_{\mathbb{R}} dx (-\phi(x, 0) \dot{u}_0(x) + \partial_t \phi(x, 0) u(x, 0)) + \int_0^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}} dx (\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2) \phi(x, t) u(x, t) = 0$$

Questa formulazione contiene il fatto che  $u_0$ ,  $\dot{u}_0$  sia il dato iniziale, e non richiedere regolarità per  $u(x, t)$ .

In generale, indebolire il concetto di soluzione permette di provare teoremi di esistenza che nel caso "forte" sono impossibili, ma a scapito dell'unicità. Nel caso dell'equazione delle onde, che è lineare, non c'è questo problema: la soluzione debole esiste (ce lo garantisce ancora la formula di d'Alembert) ed è anche unica.

**Proposizione 2.1** *Sia  $u_0(x)$  una funzione  $\mathbf{C}^1$  e  $\dot{u}_0(x)$  una funzione continua. La funzione*

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (u_0(x + ct) + u_0(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \dot{u}_0(z) dz$$

*è una funzione  $\mathbf{C}^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ , ed è una soluzione debole dell'equazione delle onde, nel senso spiegato sopra.*

Dimostrazione per esercizio.

Discutiamo invece dell'unicità (argomento facoltativo). Siano  $u$  e  $v$  due funzioni  $\mathbf{C}^1$ , soluzioni deboli con lo stesso dato iniziale. Si mostra facilmente che la differenza  $w(x, t) = 0$  è una soluzione debole, di dato iniziale nullo. L'unicità equivale a provare che  $w \equiv 0$ . Procediamo per passi.

1) Sia

$$\bar{w}(x, t) = \begin{cases} w(x, t) & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

La funzione  $\bar{w}$  è  $\mathbf{C}^1$  e verifica

$$\int_{\mathbb{R}} dt \int_{\mathbb{R}} dx (\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2) \phi(x, t) \bar{w}(x, t) = 0 \quad (7)$$

per ogni  $\phi \in \mathbf{K}(\mathbb{R}^2)$  (provare per esercizio).

2) Con il cambiamento di variabili  $\xi = x + ct$ ,  $\eta = x - ct$  l'equazione 7 diventa

$$\int_{\mathbb{R}} d\xi d\eta \partial_{\xi\eta}^2 \phi(\xi, \eta) \bar{w}(\xi, \eta) = 0 \quad (8)$$

per ogni  $\phi \in \mathbf{K}(\mathbb{R}^2)$  (sto usando, con abuso di notazione, lo stesso nome delle funzioni, indipendentemente dal cambio di variabili).

3) L'equazione 8 implica che esistono due funzioni continue  $\theta_{\pm}$  tali che

$$u(\xi, \eta) = \theta_-(\xi) + \theta_+(\eta)$$

Lascio la dimostrazione per esercizio, con la seguente traccia:

- scegliere  $\phi(\xi, \eta) = A(\xi)B(\eta)$ , con  $A, B \in \mathbf{K}(\mathbb{R})$
- sia  $h \in \mathbf{K}(\mathbb{R})$  una funzione a integrale 1; decomporre  $A$  e  $B$  lungo  $h$ , e sostituire nell'integrale;
- notare che  $\int d\xi h(\xi) \bar{w}(\xi, \eta)$  è una funzione data di  $\eta$  (non dipende da  $A$  e  $B$ ) e che  $\int d\eta h(\eta) \bar{w}(\xi, \eta)$  è una funzione data di  $\xi$
- invocare il LFCV e ottenere la conclusione

4) Poiché  $\bar{w}(x, t)$  è nulla per  $t \leq 0$ , si ha che  $\bar{w}(\xi, \eta)$  è nulla per  $\xi \leq \eta$ . Inserendo questa affermazione nella decomposizione ottenuta al punto 3) si ottiene che  $\theta_{\pm}$  sono due costanti a somma nulla e dunque  $w \equiv 0$ .

Non è difficile estendere la formulazione debole al caso di dominio limitato.

**Definizione** Una funzione  $\mathbf{C}^1[0, L], [0, +\infty)$  è soluzione debole dell'equazione delle onde  $\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u$  se

**caso periodico:** per ogni  $\phi \in \mathbf{K}(\mathbb{R}^2)$ , periodica in  $x$

$$\int_0^L (-\phi(x, 0) \dot{u}_0(x) + \partial_t \phi(x, 0) u_0(x)) + \int_0^{+\infty} dt \int_0^L dx (\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2) \phi(x, t) u(x, t) = 0$$

**caso Dirichlet omogeneo:** per ogni  $\phi \in \mathbf{K}(\mathbb{R}^2)$

$$\int_0^L (-\phi(x, 0)\dot{u}_0(x) + \partial_t \phi(x, 0)u_0(x)) + \int_0^{+\infty} (\phi(L, t) \partial_x u(L, t) - \phi(0, t) \partial_x u(0, t)) + \int_0^{+\infty} dt \int_0^L dx (\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2) \phi(x, t) u(x, t) = 0$$

**caso Neumann omogeneo:** per ogni  $\phi \in \mathbf{K}(\mathbb{R}^2)$

$$\int_0^L (-\phi(x, 0)\dot{u}_0(x) + \partial_t \phi(x, 0)u_0(x)) + \int_0^{+\infty} (-\partial_x \phi(L, t)u(L, t) + \partial_x \phi(0, t)u(0, t)) + \int_0^{+\infty} dt \int_0^L dx (\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2) \phi(x, t) u(x, t) = 0$$

Per esercizio, mostrare che se  $u$  è soluzione debole  $\mathbf{C}^1$ , allora la soluzione che si ottiene per prolungamento (periodico nel caso periodico, dispari e poi periodico nel caso Dirichlet omogeneo, pari e poi periodico nel caso Neumann omogeneo) è soluzione debole  $\mathbf{C}^1$  in tutto  $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ . Come corollario, dedurre l'unicità.

## 2.4 Distribuzioni

Approfittando del fatto che ho definito le soluzioni deboli, ho un po' esteso la parte di teoria delle distribuzioni che Buttà espone brevemente a pagina 37.

La definizione di distribuzione si ottiene dotando  $\mathbf{K}$ , cioè lo spazio delle funzioni  $\mathbf{C}^\infty$  a supporto compatto, della struttura di **spazio vettoriale topologico** (cioè dotato di una topologia rispetto alla quale le operazioni di spazio vettoriale sono continue). La topologia è quella indotta dalla seguente nozione di convergenza:

$\phi_n \rightarrow \phi$  in  $\mathbf{K}$  se e solo se  $\exists K$  compatto, tale che

$$\text{supp}(\phi_n) \subset K, \text{ e } \forall m \geq 0, \partial_x^m \phi_n \rightarrow \partial_x^m \phi \text{ uniformemente in } K$$

se e solo se, esiste un compatto  $K$  che contiene tutti i supporti delle funzioni  $\phi_n$ , e in  $K$  le  $\phi_n$  convergono a  $\phi$  uniformemente con tutte le loro derivate (ho usato una notazione che va bene solo in dimensione 1, l'estensione in dimensione qualunque è ovvia).

I funzionali lineari continui su  $\mathbf{K}$  si chiamano **distribuzioni**. In generale, i funzionali lineari continui su uno spazio vettoriale costituiscono uno spazio vettoriale, che prende il nome di spazio duale, e si indica con un apice; dunque lo spazio delle distribuzioni si indica con  $\mathbf{K}'$ . Nell'esercizio 5.15 (facoltativo) illustro qual è la condizione che garantisce la continuità di un funzionale lineare su  $\mathbf{K}$ .

Segnalo qui i fatti principali che riguardano le distribuzioni.

- Una funzione misurabile localmente sommabile  $f$  definisce in modo naturale una distribuzione, perché  $\phi \rightarrow \int f(x)\phi(x) dx$  è un funzionale lineare continuo, dunque le distribuzioni **estendono** il concetto di funzione. Le distribuzioni definite da funzioni misurabili localmente sommabili si dicono **distribuzioni regolari**. Con un abuso di notazione, indicherò con  $\int_{\mathbb{R}} f\phi$  il valore della distribuzione  $f$  sulla funzione  $\phi$  anche nel caso in cui  $f$  non sia regolare.
- Il primo esempio interessante di distribuzione che non è una funzione è la delta di Dirac (vedi Buttà pag. 37, e gli esercizi della sezione 5).

- Il **valore principale** nel senso di Cauchy dell'integrale  $\int_{\mathbb{R}} \phi(x)/x dx$  definisce una distribuzione (provare per esercizio).
- Lo spazio delle distribuzioni  $\mathbf{K}'$  è uno spazio vettoriale (cioè è ben definita la somma di distribuzioni e la moltiplicazione per uno scalare).
- È semplice definire una nozione di convergenza di sequenze di distribuzioni:  $f_n \rightarrow f$  se e solo se  $\int f_n \phi \rightarrow \int f \phi$  per ogni  $\phi \in \mathbf{K}$ ; inoltre, si può dimostrare che se  $\int f_n \phi$  è convergente per ogni  $\phi \in \mathbf{K}$ , allora il limite definisce una distribuzione.

Qualche osservazione sul prodotto di distribuzioni.

- Se  $f \in \mathcal{K}'$  e  $\tilde{\phi} \in \mathbf{K}$ , è facile definire la distribuzione  $\tilde{\phi}f$  (per esercizio). Dunque si può moltiplicare una distribuzione per una funzione di  $\mathcal{K}$ . Si dimostri, per esempio, che  $\tilde{\phi}(x)\delta(x-a) = \tilde{\phi}(a)\delta(x-a)$ .
- Una distribuzione  $f$  ha supporto contenuto in  $B$  se  $\int f\phi = 0$  per ogni  $\phi$  con supporto in  $B^c$ . Ne segue che se  $\tilde{\phi}$  è una funzione  $\mathbf{C}^\infty$ , e  $f$  una distribuzione a supporto compatto, il prodotto  $\tilde{\phi}f$  è una distribuzione (rispetto all'affermazione precedente, ho rimosso la limitazione di supporto compatto su  $\tilde{\phi}$ , ma l'ho introdotta su  $f$ ).
- In generale, posso moltiplicare distribuzioni con supporto disgiunto, per esempio  $\delta(x-a)\delta(x-b)$  vale 0 se  $a \neq b$ . Al contrario, non si riesce a dare senso al prodotto tra distribuzioni con lo stesso supporto. Per esempio  $\delta^2(x)$  non ha significato. Per esercizio, sia  $g_\varepsilon$  una  $\delta$ -approssimante (vedi esercizio 5.8); dimostra che  $g_\varepsilon(x-a)g_\varepsilon(x-b)$  tende a 0 nel senso delle distribuzioni se  $a \neq b$ , non ha limite neanche nel senso delle distribuzioni se  $a = b$ .

Infine, è facile provare che, con le definizioni date, assegnata una distribuzione  $f$ , il funzionale lineare

$$\phi \rightarrow - \int_{\mathbb{R}} \phi' f$$

definisce una distribuzione, che, per definizione, è la **derivata distribuzionale** di  $f$ . Si vedano gli esercizi per maggiori esempi.

## 2.5 Alcune osservazioni sulla $\delta$

Quanto vale  $\delta(2x)$ ? Ci sono vari modi per dare una risposta sensata a questa domanda:

- calcolare il limite di  $g_\varepsilon(2x)$  dove  $g_\varepsilon$  è una  $\delta$ -approssimante
- Osservare che, cambiando variabile,

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\delta(2x) dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(y/2)\delta(y) dy/2 = \phi(0)/2$$

Da questi esempi e quelli sulla sezione 3 degli esercizi si deduce che se  $a \neq 0$ :

$$|a|\delta(a(x-x_0)) = \delta(x-x_0)$$

Si può formalizzare questa affermazione, notando che per ogni distribuzione  $f$  si può definire  $f(ax + b)$  attraverso l'identità

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x) f(ax + b) dx = \int_{\mathbb{R}} \phi\left(\frac{y - b}{a}\right) f(y) dy$$

In questo modo si può definire la composizione di una distribuzione con una trasformazione lineare di coordinate. Utilizzando le  $\delta$ , spesso capita di dover considerare anche trasformazioni non lineari, che possono essere trattate nello stesso modo. Sia  $g_\varepsilon$  una  $\delta$  approssimante, con  $g = g_1$  a supporto compatto e sia  $f(x)$  una funzione  $\mathbf{C}^1$  con un unico 0 in  $x_0$ , e  $f'(x_0)$  non nullo. Per  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo, vale la seguente identità:

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x) g_\varepsilon(f(x)) dx = \int \phi(f^{-1}(y)) g_\varepsilon(y) \frac{1}{|f'(f^{-1}(y))|} dy$$

dove  $f^{-1}$  è l'inversa di  $f$  in un intorno opportuno di  $x_0$  (che esiste perché  $f'(x_0) \neq 0$ ). Passando al limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) g_\varepsilon(f(x)) dx = \frac{1}{|f'(x_0)|} \phi(x_0)$$

dunque

$$|f'(x)| \delta(f(x)) = |f'(x_0)| \delta(f(x)) = \delta(x - x_0). \quad (9)$$

Più in generale, se  $f$  si annulla in  $x_i$ , con  $i = 1, \dots, n$ , e  $f'(x_i) \neq 0$ , vale

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i)$$

Al contrario, non si può dare senso a  $\delta(x^2)$  (provare, per esercizio, a calcolare il limite di  $g_\varepsilon(x^2)$ ).

Un secondo fatto importante sulla  $\delta$  è che vale la seguente identità (provata nella sezione sulla trasformata di Fourier):

$$\int_{\mathbb{R}} dx e^{ix\lambda} = \int_{\mathbb{R}} dx \cos(x\lambda) = 2 \int_0^{+\infty} dx \cos(x\lambda) = 2\pi\delta(\lambda) \quad (10)$$

Gli integrali a sinistra vanno intesi come limite per  $R \rightarrow +\infty$  degli integrali su  $|x| < R$ , e l'uguaglianza va pensata integrando contro una funzione test in  $\lambda$ .

Usando la delta si può anche dimostrare che

$$\int_{\mathbb{R}} dx \frac{\sin x}{x} = \pi \quad (11)$$

senza fare uso del calcolo dei residui della teoria delle funzioni di variabili complesse. Per dimostrarlo, intanto va osservato che l'integrale va inteso come

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{|x| < R} dx \frac{\sin x}{x}$$

(infatti la singolarità in 0 è eliminabile, ma l'integrando non è sommabile a infinito). Notiamo poi che, se  $\alpha \neq 0$ , cambiando variabile si ha

$$\int_{\mathbb{R}} dx \frac{\sin(\alpha x)}{x} = \operatorname{sgn} \alpha \int_{\mathbb{R}} dx \frac{\sin x}{x}$$

Derivando entrambi i membri in  $\alpha$ , nel senso delle distribuzioni, si ha che

$$\int_{\mathbb{R}} dx \cos(\alpha x) = 2\delta(\alpha) \int_{\mathbb{R}} dx \frac{\sin x}{x}$$

Ma la distribuzione al primo membro vale  $2\pi\delta(a)$ , dunque l'integrale di  $\sin(x)/x$  vale  $\pi$ . In conclusione

$$\int_{\mathbb{R}} dx \frac{\sin(\alpha x)}{x} = \pi \operatorname{sgn}(\alpha) \quad (12)$$

Come esercizio, si rifaccia questa dimostrazione, limitando gli integrali a  $|x| < R$ , integrando contro una funzione test, e poi passando al limite per  $R \rightarrow +\infty$ .

L'uso della  $\delta$  permette di chiarire il significato della formula di Duhamel (nelle dispense si Buttà questo argomento è trattato nel paragrafo 3.6). Considero per semplicità il caso di una EDO lineare a coefficienti costanti, non omogenea, in  $\mathbb{R}^n$ . Sia

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$$

con dato iniziale nullo al tempo  $t = 0$ . con  $A$  matrice a coefficienti costanti. Per risolvere questo problema, consideriamo preliminarmente il problema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{a}\delta(t - s)$$

con  $s > 0$  e dato iniziale nullo, e con  $\mathbf{a}$  vettore assegnato. Integrando in  $t$ , e usando che  $x_0 = 0$ , si ottiene

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t A\mathbf{x}(r) dr + \mathbf{a}\mathcal{X}\{t > s\}$$

quindi per  $t < s$

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t A\mathbf{x}(r) dr$$

da cui si ottiene che  $\mathbf{x}(t) = 0$  per  $t < s$ , mentre per  $t \geq s$

$$\mathbf{x}(t) = \int_s^t A\mathbf{x}(r) dr + \mathbf{a}$$

Da queste uguaglianze si ottiene che  $\mathbf{x}$  risolve

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \text{con dato iniziale } \mathbf{x}(s) = \mathbf{a}$$

e dunque

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{X}\{t \geq s\} e^{A(t-s)} \mathbf{a}$$

Usiamo questa formula per risolvere l'equazione assegnata, considerando

$$\mathbf{f}(t) = \int_0^{+\infty} \mathbf{f}(s) \delta(t - s) ds$$

Per linearità, la soluzione è data da

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^{+\infty} \mathcal{X}\{t \geq s\} e^{A(t-s)} \mathbf{f}(s) ds = \int_0^t e^{A(t-s)} \mathbf{f}(s) ds$$

che è esattamente la formula di Duhamel.

Si noti, infine, che nel caso dell'equazione di Newton (e dunque anche nel caso dell'equazione delle onde) questa analisi ha un importante aspetto fisico. L'equazione è

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{a}\delta(t - s)$$

dove, dimensionalmente,  $\mathbf{a}$  ha le dimensioni di un impulso, cioè massa per velocità, e quindi forza per il tempo, infatti  $\delta(t - s)$  ha la dimensione del reciproco del tempo (per esercizio, giustificare questa affermazione). Il problema dato è equivalente a

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad \text{con} \quad \dot{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{a} \text{ dato iniziale al tempo } s$$

cioè assegnare una forza impulsiva  $\mathbf{a}\delta(t - s)$  è equivalente a considerare  $\mathbf{a}$  come impulso iniziale.

## 2.6 Distribuzioni temperate

Una funzione  $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  è una funzione a **decrecenza rapida** se  $f \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R})$  e  $\forall m, n \in \mathbb{N}$ , esiste  $C$  tale che

$$|x|^m |f^{(n)}(x)| \leq C \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Detto in parole, la funzione  $f$  e tutte le sue derivate vanno a 0 più rapidamente di qualunque potenza per  $|x| \rightarrow +\infty$ .

Lo spazio delle funzioni a decrecenza rapida si indica con  $\mathbf{S}_\infty$ . Evidentemente questo spazio contiene lo spazio  $\mathbf{K}$ , quello delle funzioni  $\mathbf{C}^\infty$  a supporto compatto.

Spesso lo spazio  $\mathbf{S}_\infty$  viene utilizzato come spazio per definire le distribuzioni. La nozione di convergenza che si introduce su questo spazio è quella della convergenza uniforme di  $f$  con tutte le sue derivate e tutti i momenti delle sue derivate (si chiamano **momenti** di una funzione  $g$  le funzioni  $x^m g(x)$ ). Per la precisione

$$f_k \rightarrow 0 \quad \text{in} \quad \mathbf{S}_\infty \quad \text{se} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad x^m f^{(n)}(x) \rightarrow 0 \text{ uniformemente}$$

Le distribuzioni su  $\mathbf{S}_\infty$  sono i funzionali lineari continui su questo spazio e prendono il nome di **distribuzioni temperate**. Siccome  $\mathbf{K} \subset \mathbf{S}_\infty$  (con inclusione continua),

$$\mathbf{S}_\infty' \subset \mathbf{K}'$$

cioè ogni distribuzione temperata è una distribuzione, ma non vale il viceversa.

Per chiarire questo punto, prova per esercizio che

1.  $e^{|x|} \in \mathbf{K}'$  ma non definisce una distribuzione temperata (usare  $e^{-\sqrt{1+x^2}/2}$  come funzione test, mostrando che è in  $\mathbf{S}_\infty$ ).
2.  $\delta(x - x_0)$  e 1 sono distribuzioni che appartengono sia a  $\mathbf{K}$  che a  $\mathbf{S}_\infty$ .
3.  $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \delta(x - n)$  è una distribuzione qualunque siano i valori di  $c_n$ , ma esistono scelte di  $c_n$  per cui non è una distribuzione temperata.

## 3 Serie e trasformata di Fourier

Per questo argomento *vedi anche* Kolmogorov-Fomin **Elementi di teoria delle funzioni e analisi funzionale**, capitolo III par. 4 sugli spazi di Hilbert, e capitolo VIII, in particolare il paragrafo 1 per la serie di Fourier, i paragrafi 3, 4, 5 per la trasformata di Fourier.

### 3.1 Serie di Fourier

Scrivere sunto e definizione in  $\mathbf{L}^2$  (intanto *vedi* Kolmogorov) Esercizi sulle condizioni al contorno in  $\mathbf{L}^2$ .

### 3.2 Trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier estende alle funzioni definite su  $\mathbb{R}$  l'analisi spettrale dell'operatore  $\partial_x^2$  fatta nel caso delle funzioni periodiche su  $[-L, L]$ .

Sia  $f(x) \in \mathbf{C}_0^\infty$ , e sia  $L$  tale che  $\text{supp}(f) \subset [-L, L]$ . Vale l'identità

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ik\pi x/L} \hat{f}_k$$

dove  $\hat{f}_k$  è definito da

$$\hat{f}_k = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^L e^{-ik\pi x/L} f(x) dx$$

Lo scopo di questa sezione è "passare al limite" per  $L \rightarrow +\infty$  nella definizione e nell'uguaglianza. A questo scopo, definisco  $\varepsilon = \pi/L$ , e osservo che essendo il supporto di  $f$  dentro  $[-L, L]$  posso estendere a tutto  $\mathbb{R}$  l'integrale nella definizione di  $\hat{f}_k$ :

$$\hat{f}_k = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ik\pi x/L} f(x) dx = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\varepsilon kx} f(x) dx$$

Sostituendo questa espressione nella serie di Fourier, e ricordando che  $2L = 2\pi/\varepsilon$  ottengo

$$f(x) = \sum_k \frac{\varepsilon}{2\pi} e^{ik\varepsilon x} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda y} f(y) dy.$$

Questa uguaglianza suggerisce di definire

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x} f(x) dx \quad (13)$$

Dunque

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\varepsilon kx} \hat{f}(\varepsilon k)$$

Non è difficile notare che il termine di destra è costituito da somme di Riemann per l'integrale della funzione  $e^{i\lambda x} \hat{f}(\lambda)$  su  $\mathbb{R}$ . Dunque mi aspetto che nel limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  (cioè  $L \rightarrow +\infty$ )

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} d\lambda \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\lambda x} \hat{f}(\lambda) \quad (14)$$

La coppia di formule (13) e (14) sono l'analogo in tutto  $\mathbb{R}$  dello sviluppo in serie di Fourier: (13) definisce i coefficienti dello sviluppo, (14) afferma che  $f$  si può ricostruire come a partire dai coefficienti. In pratica,  $f$  è combinazione lineare delle funzioni periodiche  $e^{i\lambda x}$ .

Per provare queste affermazioni per funzioni  $f$  con opportune proprietà, premetto una definizione e un paio di lemmi.

**Definizione** Si chiama **trasformata di Fourier** di una funzione  $f$  la funzione

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x} f(x) dx$$

**Lemma 3.1** *La trasformata di Fourier porta funzioni di  $\mathbf{S}_\infty$  in funzioni di  $\mathbf{S}_\infty$*

La dimostrazione si basa sul fatto che la trasformata di Fourier trasforma la regolarità di  $f$  nel decadimento di  $\hat{f}$  e viceversa. Utilizzeremo l'ipotesi che  $f \in \mathbf{S}_\infty$  e dunque tutte le sue derivate sono assolutamente sommabili (poichè decadono più rapidamente di ogni potenza). Notiamo innanzitutto che, come avviene per la serie di Fourier, la trasformata di Fourier trasforma le derivate in moltiplicazioni:

$$\hat{f}'(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-i\lambda x} \frac{d}{dx} f(x) = i\lambda \hat{f}(\lambda)$$

come si verifica facilmente integrando per parti. Iterando si ottiene

$$(i\lambda)^n \hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-i\lambda x} \frac{d^n f}{dx^n}(x)$$

Vediamo invece chi sono le derivate in  $\lambda$ :

$$\frac{d^m \hat{f}}{d\lambda^m}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^m}{d\lambda^m} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-i\lambda x} f(x) = \frac{(-i)^m}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-i\lambda x} x^m f(x)$$

Mettendo insieme derivate e momenti otteniamo:

$$i^n \lambda^n \frac{d^m \hat{f}}{d\lambda^m}(\lambda) = (-i)^m \int_{\mathbb{R}} dx e^{-i\lambda x} \frac{d^n}{dx^n} (x^m f(x))$$

L'integrale ottenuto è limitato per l'ipotesi che  $f \in \mathbf{S}_\infty$  dunque

$$|\lambda|^n \left| \frac{d^m \hat{f}}{d\lambda^m}(\lambda) \right| \leq c < +\infty$$

e quindi  $\hat{f} \in \mathbf{S}_\infty$ .

Questo calcolo si applica anche nel caso che  $f$  sia meno regolare. Per esempio, si noti che se  $n = 0$ , il lemma asserisce che  $\hat{f}$  è derivabile  $m$  volte se  $|x^m|f(x)$  è sommabile (cioè con modulo integrabile); se invece  $m = 0$ , il lemma asserisce che  $|\lambda|^n|\hat{f}|$  è limitata se  $f \in \mathbf{C}^n$  e la sua derivata  $n$ -esima è sommabile.

Usando questi lemmi, non è difficile dimostrare il teorema seguente

**Teorema 3.1** *Se  $f \in \mathbf{S}_\infty$  allora*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} d\lambda e^{i\lambda x} \hat{f}(\lambda) \tag{15}$$

La dimostrazione consiste in due passi: prima dimostreremo la tesi per  $f \in \mathbf{K}$ , poi completeremo la prova per  $f \in \mathbf{S}_\infty$ .

Sia dunque  $f \in \mathbf{K} \subset \mathbf{S}_\infty$ . Per  $L$  abbastanza grande e definendo  $\varepsilon = \pi/L$ , si ha, per la sviluppatibilità in serie di Fourier delle funzioni  $2L$  periodiche, che, per  $|x| \leq L$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon e^{i\varepsilon k x} \hat{f}(\varepsilon k)$$

Sia  $g(\lambda) = e^{i\lambda} \hat{f}(\lambda)$ . La (15) è dimostrata se provo che per  $g \in \mathbf{S}_\infty$ ,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon g(\varepsilon k) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} g(\lambda) d\lambda.$$

Poiché  $g \in \mathbf{S}_\infty$ ,  $|g(\lambda)| \leq C/(1 + |\lambda|^2)$ . Osservo che

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon g(\varepsilon k) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}_\varepsilon(\lambda) d\lambda$$

con

$$\tilde{g}_\varepsilon(\lambda) = \sum_k g(\varepsilon k) \mathcal{X}\{|\lambda - \varepsilon k| < \varepsilon/2\}.$$

Si può facilmente provare che per  $\varepsilon$  piccolo, se  $|\lambda - \varepsilon k| < \varepsilon/2$  allora

$$\frac{1}{1 + (\varepsilon k)^2} \leq \frac{1 + \varepsilon}{1 + \lambda^2}$$

(come si poteva immaginare notando che la derivata di  $1/(1 + \lambda^2)$  è minore di 1). Quindi  $|g|$  e  $|\tilde{g}_\varepsilon|$  sono maggiorate da una costante per la funzione sommabile  $1/(1 + \lambda^2)$ , e la tesi segue per convergenza dominata.

Resta da provare che il teorema vale per  $f \in \mathbf{S}_\infty$ . Procederò approssimando  $f$  mediante **troncamenti**, cioè mediante approssimazioni a supporto compatto.

Sia  $h(x) \in \mathbf{C}^\infty$  una funzione tale che

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \leq 0 \\ 0 & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

con  $0 \leq h(x) \leq 1$  (per costruire una tale  $h$  vedi l'appendice a fine capitolo).

Data  $f \in \mathbf{S}_\infty$  e  $n$  intero positivo, sia

$$f_n(x) = f(x)h(x - n)h(-(x + n))$$

Si verifica facilmente che:

$$\begin{aligned} f_n &\in \mathbf{K} \\ f_n(x) &= f(x) \text{ per } |x| \leq n \\ f_n(x) &= 0 \text{ per } |x| \leq n + 1 \\ |f_n(x)| &\leq |f(x)| \\ |f_n^{(m)}(x)| &\leq C \sum_{0 \leq k \leq m} |f^{(k)}(x)| \end{aligned}$$

dove con  $f^{(m)}$  indico la derivata  $m$ -esima di  $f$ .

Per  $|x| \leq n$  si ha che

$$f(x) = f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x} \hat{f}_n(\lambda) d\lambda$$

poiché  $f_n \in \mathbf{K}$ .

Inoltre,

$$\hat{f}_n(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x} f(x) dx$$

e poiché  $|f_n| \leq |f|$ , per convergenza dominata si ha che

$$\hat{f}_n(\lambda) \rightarrow \hat{f}(\lambda).$$

Questo risultato non basta per chiudere il teorema, perché è necessario che converga l'integrale in  $\lambda$ . La convergenza dell'integrale è però garantita ancora una volta dalla convergenza dominata. Infatti

$$\hat{f}_n(\lambda) = \frac{1 + \lambda^2}{1 + \lambda^2} \hat{f}_n(\lambda) = \frac{1}{1 + \lambda^2} \int_{\mathbb{R}} dx \frac{e^{i\lambda x}}{\sqrt{2\pi}} (f_n(x) - \partial_x^2 f_n(x))$$

Poiché le derivate di  $f_n$  sono stimate dalle derivate di  $f$ , l'integrale si può stimare con una costante che non dipende da  $n$ , ottenendo

$$|\hat{f}_n(\lambda)| \leq \frac{c}{1 + \lambda^2}.$$

Questa condizione di dominatezza con una funzione sommabile permette di passare al limite sotto integrale, ottenendo la tesi: per ogni  $x$ :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x} \hat{f}_m(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x} \hat{f}(\lambda)$$

### Definizione

Si chiama **trasformata di Fourier** l'operatore  $\mathcal{F}$  che porta una funzione  $f(x)$  in

$$\mathcal{F}[f](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-i\lambda x} f(x)$$

Si chiama **antitrasformata di Fourier** l'operatore  $\hat{\mathcal{F}}$  che porta una funzione  $g(\lambda)$  in

$$\hat{\mathcal{F}}[g](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} d\lambda e^{i\lambda x} g(\lambda)$$

Il teorema dimostrato sopra garantisce che  $\mathcal{F}$  e  $\hat{\mathcal{F}}$  sono operatori lineari da  $\mathbf{S}_{\infty}$  in sé, e che sono uno l'inverso dell'altro.

### Osservazione

Il fatto che una funzione si uguale all'antitrasformata della sua trasformata di Fourier vale anche se  $f \in \mathbf{C}^2$ , con  $f$  e le sue derivate sommabili (verificare per esercizio). Si possono dare condizioni sufficienti più restrittive per la convergenza a  $f(x)$  dell'integrale di Fourier, vedi Kolmogorov-Fomin capitolo VIII.

Una conseguenza immediata della possibilità di sviluppare le funzioni mediante la traformata di Fourier è l'analogo in  $\mathbb{R}$  dell'uguaglianza di Parseval.

**Teorema 3.2** *Plancherel-Parseval.* Se  $f, g \in \mathbf{S}_{\infty}$  allora

$$\int_{\mathbb{R}} dx \bar{f}(x) g(x) = \int_{\mathbb{R}} d\lambda \bar{\hat{f}}(\lambda) \hat{g}(\lambda)$$

In particolare, scegliendo  $g = f$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} dx |f(x)|^2 = \int_{\mathbb{R}} d\lambda |\hat{f}(\lambda)|^2$$

Poiché  $f, g \in \mathbf{S}_\infty$ , anche  $\hat{f}, \hat{g} \in \mathbf{S}_\infty$ , dunque tutti gli scambi nell'ordine di integrazione nei passaggi seguenti sono leciti:

$$\int_{\mathbb{R}} dx \bar{f}(x)g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx \bar{f}(x) \int_{\mathbb{R}} d\lambda e^{i\lambda x} \hat{g}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} d\lambda \hat{g}(\lambda) \int_{\mathbb{R}} dx \bar{f}(x) e^{i\lambda x} = \int_{\mathbb{R}} d\lambda \hat{g}(\lambda) \bar{\hat{f}}(\lambda)$$

Quest'identità suggerisce che come i coefficienti di Fourier definiscono un'isometria tra  $L^2[-L, L]$  e  $\ell^2$  (lo spazio delle successioni indicizzate in  $\mathbb{Z}$  e quadrato sommabili), così la trasformata di Fourier è un'isometria di  $L^2(\mathbb{R})$  in sé. In effetti si può dimostrare che la trasformata di Fourier si può definire per funzioni in  $L^2(\mathbb{R})$ , e anche in tal caso  $f(x)$  si ricostruisce mediante l'antitrasformata. Infatti,  $\mathcal{F}$  è un funzionale lineare continuo definito su  $\mathbf{S}_\infty$ , che è un sottoinsieme denso di  $L^2$ , dunque si estende facilmente per densità (per i dettagli vedi Kolmogorov, capitolo VIII).

Nel definire i coefficienti di Fourier in  $[-\pi, \pi]$ , abbiamo diagonalizzato l'operatore derivata seconda (ma in realtà anche l'operatore derivata prima), determinando la base di autofunzioni  $e^{ikx}$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ , che soddisfano la condizione di ortogonalità

$$(e^{ikx}, e^{ihx}) = 2\pi\delta_{hk},$$

dove  $(\cdot, \cdot)$  indica il prodotto hermitiano in  $L^2$ :

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} \bar{f}(x)g(x) dx$$

Nel caso di  $\mathbb{R}$ , l'analoga affermazione non può essere vera, perché le funzioni  $e^{i\lambda x}$  non sono in  $L^2(\mathbb{R})$ . D'altra parte è vera la seguente identità (nel senso delle distribuzioni)

$$(e^{i\lambda x}, e^{i\mu x}) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(\mu-\lambda)x} dx = 2\pi\delta(\lambda - \mu)$$

Infatti

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} d\lambda \hat{f}(\lambda) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{|\lambda| > R} d\lambda \frac{1}{2\pi} \int dx e^{-i\lambda x} f(x) \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int dx f(x) \int_{|\lambda| > R} d\lambda \frac{1}{2\pi} e^{-i\lambda x} \end{aligned}$$

e poiché  $f(0) = \int_{\mathbb{R}} \delta(x)f(x) dx$ , si conclude che, in distribuzione

$$\int_{\mathbb{R}} d\lambda e^{-i\lambda x} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{|\lambda| > R} d\lambda e^{-i\lambda x} = 2\pi\delta(x)$$

Passando al coniugato e tenendo presente che  $\delta$  è una distribuzione reale, si ottiene la tesi cercata. Infine, notando che il seno è una funzione dispari, si ottiene anche che

$$2\pi\delta(x) = \int_{\mathbb{R}} d\lambda \cos(\lambda x)$$

Nel caso dell'operatore  $\partial_x^2$  per le funzioni periodiche in  $[0, 2\pi]$  abbiamo ottenuto un insieme numerabile di autofunzioni e autovalori: lo **spettro** dell'operatore è detto **puntuale** (valori al più numerabili). Nel caso dell'operatore  $\partial_x^2$  per le funzioni su  $\mathbb{R}$ , le autofunzioni trovate  $e^{i\lambda x}$

non sono nello spazio giusto ( $L^2$ ) e si dicono **autofunzioni generalizzate**. Il corrispondente spettro è tutta la semiretta  $(-\infty, 0]$ , e prende il nome di **spettro continuo**. In entrambi i casi vale un **teorema spettrale**: ogni funzione si può scrivere come combinazione lineare delle autofunzioni (o delle autofunzioni generalizzate) e vale l'identità di Parseval.

### Appendice sui troncamenti

Sia  $r > 0$  e

$$\tilde{g}_r(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, x > r \\ e^{-1/|x|^2 - 1/|x-r|^2} & \text{se } x \in [0, r] \end{cases}$$

e sia

$$g_r(x) = \frac{\tilde{g}_r(x)}{\int_{\mathbb{R}} \tilde{g}_r(x)}, \quad h_r(x) = \int_x^{+\infty} dy g_r(y)$$

Non è difficile provare che tutte e tre queste funzioni sono  $C^\infty$  e che hanno derivate limitate da costanti (che divergono solo se  $r \rightarrow 0$ ). È facile inoltre provare che  $0 \leq h_r(x) \leq 1$ ,  $h_r(x) = 1$  se  $x \leq 0$ ,  $h_r(x) = 0$  se  $x \geq r$ .

### 3.3 Velocità di gruppo e velocità di fase

Utilizzando la trasformata di Fourier, è più facile trattare l'argomento del paragrafo 5.5 delle dispense di Buttà.

Inoltre, ho mostrato in un modo differente come si può calcolare la trasformata di Fourier di  $e^{-x^2/2}$  (in un modo più simile a quello che si usa nei corsi di variabile complessa).

**Proposizione 3.1** Per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ , risulta

$$\int dx e^{-(x+i\alpha)^2/2} = \int dx e^{-x^2/2} = \sqrt{2\pi}$$

Nota, innanzitutto, che

$$\int dx e^{-(x+i\alpha)^2/2} = \int dx e^{-x^2+\alpha^2} (\cos(\alpha x) - i \sin(\alpha x))$$

Dunque, per  $\alpha$  in un compatto, l'integrando è una funzione limitata uniformemente in  $\alpha$  da una funzione sommabile in  $x$ , e lo stesso accade per la derivata rispetto ad  $\alpha$ . Dunque possiamo derivare sotto segno di integrale in  $\alpha$

$$\partial_\alpha \int dx e^{-(x+i\alpha)^2/2} = -i \int dx (x+i\alpha) e^{-(x+i\alpha)^2/2} = i \int dx \partial_x e^{-(x+i\alpha)^2/2} = 0$$

Ma allora, in effetti, l'integrale non dipende da  $\alpha$  ed è uguale al valore di  $\int e^{-x^2/2}$  che notoriamente è  $\sqrt{2\pi}$ .

## 4 L'equazione delle onde in dimensione 2 e 3

Rispetto alle dispense di Buttà, capitolo 5, ci sono due differenze: ricavo la formula di Kirchhoff trovando, con le distribuzioni, la funzione di Green per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t^2 G = c^2 \Delta G \\ G(\mathbf{x}, 0) = 0 \\ \partial_t G(\mathbf{x}, 0) = \delta(\mathbf{x}) \end{cases}$$

Questa parte non c'è nelle dispense di Buttà; riporto il conto nel paragrafo successivo. Inoltre dimostro che se  $h(\mathbf{x})$  è  $C^1$ , la funzione

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x} - \mathbf{y})h(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

risolve effettivamente il problema di Cauchy con  $u(\mathbf{x}, 0) = 0$  e  $\partial_t u(\mathbf{x}, 0) = h(\mathbf{x})$ . Nelle dispense di Buttà questa dimostrazione viene fatta in modo elegante utilizzando i lemmi 5.6, 5.7, 5.8. Qui vi propongo il conto “brutale” delle derivate di  $u$ , da cui si ottiene la tesi.

## 4.1 La formula di Kirchhoff

In questo paragrafo troverò la funzione di Green per l'equazione delle onde in  $\mathbb{R}^3$

$$\partial_t^2 u = c^2 \Delta u$$

Questo calcolo si riduce facilmente alla determinazione della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t^2 G(\mathbf{x}, t) = c^2 \Delta G(\mathbf{x}, t) \\ u_0(\mathbf{x}) = 0 \\ \partial_t G(\mathbf{x}, 0) = \delta(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (16)$$

Se infatti  $G(\mathbf{x}, t)$  è soluzione di questo problema: allora la funzione  $G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t)$  risolve l'equazione con dato  $\partial_t G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, 0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ , e, per linearità, la funzione

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) \dot{u}_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

risolve l'equazione con dato  $\dot{u}_0(\mathbf{x})$  assegnato.

Infine, noto che se  $u(\mathbf{x}, t)$  è soluzione di dato iniziale  $u_0(\mathbf{x}) = 0$  e  $\dot{u}_0(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})$ , allora la funzione  $w(\mathbf{x}, t) = \partial_t u(\mathbf{x}, t)$  risolve l'equazione delle onde (provare per esercizio) con dato iniziale

$$w(\mathbf{x}, 0) = \partial_t u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}), \quad \partial_t w(\mathbf{x}, 0) = \partial_t^2 u(\mathbf{x}, 0) = c^2 \partial_x^2 u(\mathbf{x}, 0) = 0$$

(l'ultima uguaglianza segue dal fatto che  $u(\mathbf{x}, 0)$  è identicamente nulla). Ne segue che

$$u(\mathbf{x}, t) = \partial_t \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

risolve l'equazione delle onde con dato iniziale  $u_0(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ , e  $\dot{u}_0(\mathbf{x}) = 0$ . In definitiva la formula di Kirchhoff afferma che la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale  $u_0(\mathbf{x})$  e  $\dot{u}_0(\mathbf{x})$  è data da

$$u(\mathbf{x}, t) = \partial_t \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) u_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) \dot{u}_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

Rimane dunque da determinare  $G$ .

La soluzione del problema (16) è particolarmente semplice in trasformata di Fourier. Infatti il problema di riscrive come

$$\begin{cases} \partial_t^2 \hat{G}(\lambda, t) = -c^2 |\lambda|^2 \hat{G}(\lambda, t) \\ \hat{G}(\lambda, t) = 0 \\ \partial_t \hat{G}(\lambda, 0) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \end{cases} \quad (17)$$

la cui soluzione è

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{c|\lambda|} \sin(c|\lambda|t)$$

Dunque la funzione  $G$  cercata è

$$G(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d\lambda \frac{1}{c|\lambda|} \sin(c|\lambda|t) e^{i\lambda \cdot \mathbf{x}}$$

Naturalmente questa espressione ha significato solo nel senso delle distribuzioni. I passaggi che seguono sono in effetti tutti giustificabili integrando contro una funzione test in  $\mathbf{x}$  e considerando l'integrale in  $d\lambda$  su regioni sferiche di raggio divergente.

Passo in coordinate sferiche  $\rho, \phi, \vartheta$  in  $\lambda$ , usando come asse verticale la direzione del vettore  $\mathbf{x}$ . L'angolo  $\phi \in [0, 2\pi]$  esprime la rotazione intorno a  $\mathbf{x}$ , l'angolo  $\vartheta$  è quello formato da  $\lambda$  e  $\mathbf{x}$  e varia tra 0 e  $\pi$ ; l'elemento di misura è  $\rho^2 \sin \vartheta$ . Si ottiene

$$G(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3 c} \int_0^{+\infty} d\rho \rho \sin(ct\rho) \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta e^{i\rho|\mathbf{x}| \cos \vartheta}$$

Integro in  $d\phi$ , ottenendo un coefficiente  $2\pi$ , e integro in  $d\vartheta$ , usando che  $\sin \vartheta d\vartheta = -d(\cos \vartheta)$ :

$$G(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{i4\pi^2 |\mathbf{x}| c} \int_0^{+\infty} d\rho \sin(ct\rho) (e^{i\rho|\mathbf{x}|} - e^{-i\rho|\mathbf{x}|})$$

Usando l'espressione del seno come esponenziale complesso:

$$G(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi^2 |\mathbf{x}| c} \int_0^{+\infty} d\rho \sin(ct\rho) \sin(\rho|\mathbf{x}|)$$

Usando che l'integrando è una funzione pari

$$G(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi^2 |\mathbf{x}| c} \int_{\mathbb{R}} d\rho \sin(ct\rho) \sin(\rho|\mathbf{x}|)$$

Usando le formule di prostaferesi

$$G(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{8\pi^2 |\mathbf{x}| c} \int_{\mathbb{R}} d\rho (\cos(\rho(ct - |\mathbf{x}|)) - \cos(\rho(ct + |\mathbf{x}|)))$$

Ricordando che

$$\int d\rho \cos(a\rho) = 2\pi \delta(a)$$

si ottiene infine

$$G(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{x}| c} (\delta(|\mathbf{x}| - ct) - \delta(|\mathbf{x}| + ct))$$

Per  $t > 0$  la seconda delta è nulla, dunque la funzione di Green cercata è

$$G(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{x}| c} \delta(|\mathbf{x}| - ct) = \frac{1}{4\pi c^2 t}$$

dove, nell'ultimo passaggio, ho usato che la  $\delta$  impone  $|\mathbf{x}| = ct$ .

Per capire il senso di questa espressione, scriviamo quella che dovrebbe essere la soluzione dell'equazione delle ode di velocità iniziale  $h(\mathbf{x})$ :

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\mathbb{R}^3} \delta(|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - ct) h(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Scegliendo come variabile di integrazione  $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$  e integrando su sfere concentriche

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|\mathbf{z}|=ct} h(\mathbf{x} + ct\mathbf{z}) \sigma(d\mathbf{z}).$$

Verifico ora che la funzione  $u$  risolve l'equazione delle onde. Innanzitutto noto che

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|\mathbf{z}|=ct} \sigma(d\mathbf{z}) h(\mathbf{x} + \mathbf{z}) = \frac{t}{4\pi} \int_{|\mathbf{z}|=1} \sigma(d\mathbf{z}) h(\mathbf{x} + ct\mathbf{z}) \quad (18)$$

Calcolo la derivata prima in  $t$ :

$$\partial_t u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\mathbf{z}|=1} \sigma(d\mathbf{z}) h(\mathbf{x} + ct\mathbf{z}) + \frac{t}{4\pi} \int_{|\mathbf{z}|=1} \sigma(d\mathbf{z}) c\mathbf{z} \cdot \nabla h(\mathbf{x} + ct\mathbf{z}) \quad (19)$$

Il primo addendo è uguale a  $u/t$ , l'integrale nel secondo addendo è invece

$$\int_{|\mathbf{z}|=1} \sigma(d\mathbf{z}) c\mathbf{z} \cdot \nabla h(\mathbf{x} + ct\mathbf{z}) = \frac{1}{ct^2} \int_{|\mathbf{z}|=ct} \sigma(d\mathbf{z}) \mathbf{n} \cdot \nabla h(\mathbf{x} + \mathbf{z}) \quad (20)$$

che per il teorema della divergenza è pari a

$$\frac{1}{ct^2} \int_{|\mathbf{z}| \leq ct} d\mathbf{z} \Delta h(\mathbf{x} + \mathbf{z})$$

Dunque

$$\partial_t u = \frac{u}{t} + \frac{w}{t}$$

dove

$$w(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c} \int_{|\mathbf{z}| \leq ct} dz \Delta h(\mathbf{x} + \mathbf{z})$$

Calcolo la derivata seconda:

$$\partial_t^2 u = \partial_t \left( \frac{u}{t} + \frac{w}{t} \right) = \frac{\partial_t u}{t} + \frac{\partial_t w}{t} - \frac{u}{t^2} - \frac{w}{t^2} = \frac{\partial_t w}{t}$$

(nell'ultima uguaglianza ho usato l'espressione di  $\partial_t u$  scritta sopra). Resta da calcolare

$$\partial_t w = \frac{1}{4\pi c} \partial_t \int_{|\mathbf{z}| \leq ct} dz \Delta h(\mathbf{x} + \mathbf{z}) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\mathbf{z}|=ct} \sigma(d\mathbf{z}) \Delta h(\mathbf{x} + \mathbf{z})$$

Poiché  $\Delta h(\mathbf{x} + \mathbf{z}) = \Delta_{\mathbf{x}} (h(\mathbf{x} + \mathbf{z}))$ , il laplaciano può essere portato fuori dal segno di integrale, e si ottiene che

$$\partial_t^2 u = \frac{\partial_t w}{t} = c^2 \Delta u$$

Restano da verificare le condizioni iniziali. Usando la (18):

$$|u(x, t)| \leq t \sup |h(\mathbf{x})|$$

che tende a 0 per  $t \rightarrow 0$ . Usando le (19), (20) ottengo che

$$\partial_t u = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{|\mathbf{z}|=1} \sigma(d\mathbf{z}) h(\mathbf{x} + ct\mathbf{z}) + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|\mathbf{z}|=1} \sigma(d\mathbf{z}) c\mathbf{z} \cdot \nabla h(\mathbf{x} + ct\mathbf{z})$$

Per  $t \rightarrow 0$  il secondo addendo va a 0 perché è stimato da  $ct \sup |\nabla h|$ . Sviluppando per  $t$  piccoli  $h(\mathbf{x} + ct\mathbf{z})$  e integrando si ottiene che il primo addendo tende a  $h(x)$ .

Possiamo ora scrivere la formula di Kirchhoff, ricordando che la soluzione di dato iniziale  $g(\mathbf{x})$  e velocità iniziale nulla è data da:

$$\begin{aligned} \partial_t \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|\mathbf{z}|=ct} g(\mathbf{x} + \mathbf{z}) \sigma(d\mathbf{z}) \right) &= \partial_t \left( \frac{t}{4\pi c^2} \int_{|\mathbf{z}|=1} g(\mathbf{x} + ct\mathbf{z}) \sigma(d\mathbf{z}) \right) \\ &= \frac{1}{4\pi c^2} \int_{|\mathbf{z}|=1} g(\mathbf{x} + ct\mathbf{z}) \sigma(d\mathbf{z}) + \frac{t}{4\pi c} \int_{|\mathbf{z}|=1} \mathbf{z} \cdot \nabla g(\mathbf{x} + ct\mathbf{z}) \sigma(d\mathbf{z}) \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{|\mathbf{z}|=ct} (g(\mathbf{x} + \mathbf{z}) + \nabla g(\mathbf{x} + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{z}) \sigma(d\mathbf{z}). \end{aligned}$$

Aggiungendo anche la soluzione di dato nullo e velocità iniziale  $h$ , si ha infine

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=ct} (g(\mathbf{y}) + (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \nabla g(\mathbf{y}) + th(\mathbf{y})) \sigma(d\mathbf{y}).$$

Da questa formula e dai passaggi precedenti è chiaro che per avere una soluzione  $\mathbf{C}^2$  in  $\mathbf{x}$  e  $t$  è necessario  $h \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R}^3)$ ,  $g \in \mathbf{C}^3(\mathbb{R}^3)$ .

## 4.2 La formula di Poisson

Nelle dispense di Buttà, la formula di Poisson viene determinata integrando nella terza variabile la formula di Kirchhoff. Ho preferito integrare direttamente la funzione di Green. A questo punto la formula di Poisson segue con gli analoghi ragionamenti fatti nel caso di Kirchhoff.

Mostro come la funzione di Green nel piano, che indico con  $G_2(\mathbf{x})$ , con  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ , si ottenga integrando  $G$ :

$$G_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\mathbb{R}} dz \delta \left( \sqrt{|\mathbf{x}|^2 + z^2} - ct \right)$$

Per integrare la  $\delta$ , uso il risultato dimostrato nel paragrafo 2.5, osservando che nella variabile  $z$  l'argomento della  $\delta$  si annulla in

$$\pm \sqrt{c^2 t^2 - |\mathbf{x}|^2}$$

(ma è necessario che  $ct \geq |\mathbf{x}|$ ), e che la derivata in  $z$  dell'argomento della  $\delta$  è

$$\frac{z}{\sqrt{|\mathbf{x}|^2 + z^2}}$$

che, calcolata in  $\pm\sqrt{c^2t^2 - |\mathbf{x}|^2}$  dà

$$\pm \frac{1}{ct} \sqrt{c^2t^2 - |\mathbf{x}|^2}$$

Si ottiene, dunque:

$$G_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi c^2 t} 2 \frac{ct}{\sqrt{c^2t^2 - |\mathbf{x}|^2}} = \frac{1}{2\pi c} \frac{1}{\sqrt{c^2t^2 - |\mathbf{x}|^2}}$$

## 5 L'equazione di Poisson e le funzioni armoniche

Su questi argomenti ho seguito più precisamente le dispense di Buttà, capitolo 6, tranne che per l'ordine e per come ho derivato la funzione di Green per il problema di Poisson.

Ho introdotto le funzioni di Green ipotizzando la sua forma radiale e utilizzando la formula di Gauss: se  $G_n(\mathbf{x}) = g(|\mathbf{x}|)$  è la funzione di Green ed è radiale, allora, poiché

$$\int_{|\mathbf{x}|<R} G_n(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \int_{|\mathbf{x}|<R} \delta(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = -1$$

si ottiene

$$-1 = \int_{|\mathbf{x}|<R} G_n(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{|\mathbf{x}|=R} \nabla G_n(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{x}} \, \sigma(d\mathbf{x}) = g'(R) |\partial B_R(\mathbf{0})| = g'(R) R^{n-1} |\partial B_1|$$

Integrando, si ottiene l'espressione per  $g$ .

Nel 2014-2015 ho invece ottenuto  $G_3$  usando la trasformata di Fourier, e  $G_2$  integrando in una variabile (con un'accortezza per aggirare il problema delle divergenze). Questi due conti di trovano nel paragrafo successivo 5.1

Sia con questa procedura che con quella precedente, è necessario verificare che la funzione ottenuta è la funzione di Green. Invece di dimostrare che, in distribuzione,

$$\Delta G(\mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x})$$

dimostro, nel paragrafo 5.2, in modo leggermente diverso, il teorema 6.16 delle dispense di Buttà.

### 5.1 La funzione di Green attraverso la trasformata di Fourier

La funzione di Green soddisfa

$$\Delta G(\mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x})$$

che in trasformata di Fourier è

$$-|\lambda|^2 \hat{G}(\lambda) = -\frac{1}{8\pi^3}$$

Dunque

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{\mathbb{R}^3} d\lambda \frac{1}{|\lambda|^2} e^{i\lambda \cdot \mathbf{x}}$$

Passando in coordinate sferiche (come nel caso della determinazione della formula di Kirchhoff nel paragrafo 4.1), ottengo

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} d\rho \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta e^{i|\mathbf{x}|\rho \cos \vartheta} = \frac{2}{4\pi^2 |\mathbf{x}|} \int_0^{+\infty} d\rho \frac{\sin(|\mathbf{x}|\rho)}{\rho}$$

L'integrando è una funzione pari, dunque

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2|\mathbf{x}|} \int_{-\infty}^{+\infty} d\rho \frac{\sin(|\mathbf{x}|\rho)}{\rho} = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \operatorname{sgn} |\mathbf{x}| = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}$$

dove, nell'ultima uguaglianza, ho usato (12).

Per ricavare l'espressione della funzione di Green in dimensione 2, ho mostrato che l'integrale di  $G$  nella terza variabile è divergente, ma converge il seguente limite, dove  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ :

$$G_2(\mathbf{x}) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{4\pi} \int_{-R}^R dz \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{x}|^2 + z^2}} - \frac{1}{4\pi} \int_{-R}^R dz \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}} \right) = -\frac{1}{2\pi} \log |\mathbf{x}|$$

## 5.2 La soluzione del problema di Poisson in $\mathbb{R}^3$

Dimostro, in un modo leggermente diverso, il teorema 6.17 delle dispense di Buttà, cioè che se  $f \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}^3)$  e  $f$  e  $\nabla f$  sono limitate e sommabili, allora la funzione

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y})$$

è soluzione dell'equazione di Poisson. Dò per già dimostrato che

$$\nabla u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} \nabla_x G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \nabla f(\mathbf{y})$$

e che dunque vale

$$\Delta u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} \nabla_x G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \nabla f(\mathbf{y}) = - \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} \nabla_y G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \nabla f(\mathbf{y})$$

Ricordo che, se  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ,

$$\nabla G(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{x}}{4\pi|\mathbf{x}|^3}, \quad \Delta G(\mathbf{x}) = 0$$

Isolo la singolarità nell'integrale, considerando

$$- \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \geq \varepsilon} d\mathbf{y} \nabla_y G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \nabla f(\mathbf{y}) = - \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \geq \varepsilon} d\mathbf{y} \nabla_y \cdot (\nabla_y G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) f(\mathbf{y})) + \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \geq \varepsilon} d\mathbf{y} \Delta_y G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) f(\mathbf{y})$$

Il laplaciano di  $G$  è nullo (la singolarità è fuori dal dominio), dunque

$$- \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \geq \varepsilon} d\mathbf{y} \nabla_y G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \nabla f(\mathbf{y}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| = \varepsilon} \sigma(d\mathbf{y}) \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} f(\mathbf{y}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{|\mathbf{z}| = \varepsilon} \sigma(d\mathbf{y}) f(\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{z})$$

che tende a  $-f(\mathbf{x})$  per  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Nota che il segno rimane  $-$  perché la normale esterna al dominio  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq \varepsilon$  è  $-(\mathbf{y} - \mathbf{x})/|\mathbf{y} - \mathbf{x}|$ .

Se  $f$  è a supporto compatto (che è l'ipotesi che ho usato per questo teorema nel corso 2015-2016), non c'è altro da aggiungere.

Se invece  $f$  non è a supporto compatto e verifica le ipotesi scritte su, oer concludere la prova, mostro che effettivamente non di sono contributi al bordo "all'infinito", cioè che

$$g(R) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=R} \sigma(d\mathbf{y}) |f(\mathbf{y})|$$

tende a 0 per  $R \rightarrow +\infty$ .

Si procede così: integrando in  $R$  da 1 a  $+\infty$  si ha che

$$\int_1^{+\infty} dR g(R) = \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\geq 1} d\mathbf{y} |f(\mathbf{y})| < +\infty$$

La funzione  $g(R)$  è  $\mathbf{C}^1$ , con derivata limitata (esercizio), dunque, poiché è sommabile,  $g(R) \rightarrow 0$  per  $R \rightarrow +\infty$ .

### 5.3 La III identità di Grenn

Nelle dispense di Buttà, c'è la dimostrazione classica della III identità di Green. Poiché l'argomento principale è una riformulazione dell'isolamento della singolarità che abbiamo già usato nel paragrafo 5.2, qui vi propongo una dimostrazione alternativa, che usa il fatto, già dimostrato, che se  $\phi \in \mathbf{K}$  allora

$$\Delta \int_{\mathbb{R}^n} G_n(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) = -\phi(\mathbf{x})$$

Chiamo  $w = \int_{\mathbb{R}^n} G_n(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y})$ , e sia  $u \in \mathbf{C}^2(\Omega) \cap \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$ . Moltiplicando per  $u$  e integrando su  $\Omega$  ottengo

$$-\int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \Delta w(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Usando la seconda identità di Green nel secondo membron e ottengo

$$-\int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \Delta u(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} (u(\mathbf{x}) \partial_n w(\mathbf{x}) - \partial_n u(\mathbf{x}) w(\mathbf{x})) \sigma(d\mathbf{x})$$

Sostituendo a  $w$  la sua espressione in termini di  $G_n$ , e scambiano l'ordine di integrazione (si può per la sommabilità degli integrandi, vedi nota a fine paragrafo) ho che il secondo membro è

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(\mathbf{y}) \left( \int_{\Omega} G_n(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \sigma(d\mathbf{x}) (\partial_{n_x} G_n(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u(\mathbf{x}) - G_n(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \partial_n u(\mathbf{x})) \right) d\mathbf{y}$$

Scambio il nome delle variabili  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ , tenendo presente che  $G_n$  è pari, e che  $\partial_{n_x} G_n(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{n} \cdot \nabla G(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ , che, scambiando le variabili diventa  $\mathbf{n} \cdot \nabla G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = -\mathbf{n} \cdot \nabla G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \partial_{n_y} \nabla G(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ . Ottengo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(\mathbf{x}) \left( \int_{\Omega} G_n(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\partial\Omega} \sigma(d\mathbf{y}) (\partial_{n_y} G_n(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) - G_n(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \partial_n u(\mathbf{y})) \right) d\mathbf{x}$$

Scegliendo arbitrariamente  $\phi$  con il supporto dentro  $\Omega$ , ottengo che  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ :

$$u(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} G_n(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\partial\Omega} \sigma(d\mathbf{y}) (G_n(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \partial_n u(\mathbf{y}) - \partial_{n_y} G_n(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u(\mathbf{y}))$$

che è proprio la terza identità di Green.

. Noto infine che il gradiente di  $G_n(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  diverge come  $1/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n-1}$ , non sommabile in  $\mathbf{x}$ , però la presenza del versore normale rende limitato il termine

$$\int_{\Omega} d\mathbf{x} \int_{\partial\Omega} d\mathbf{y} |\mathbf{n}_y \cdot \nabla G_n(\mathbf{x} - \mathbf{y})| |u(\mathbf{y})|$$

Per rendersene conto, considero il caso particolare in cui la frontiera di  $\Omega$  è localmente un semipiano. Ci si può ridurre a questo per le ipotesi di regolarità su  $\partial\Omega$ , mediante opportuni cambiamenti di variabili. Sia dunque  $\mathbf{x} = (\mathbf{p}, z) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ , con  $\Omega = \{\mathbf{x} \mid z \geq 0, |\mathbf{p}| \leq 1\}$ , sia  $u$  a nulla per  $|\mathbf{p}| \geq 1$ . Per quest'ultima ipotesi, gli integrali sul bordo si riducono agli integrali sul bordo  $z = 0$ . Sia dunque  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Risulta

$$|\mathbf{n}_y \cdot \nabla G_n(\mathbf{x} - \mathbf{y})| = c \frac{z}{(|\mathbf{p} - \mathbf{y}|^2 + z^2)^{n/2}}$$

che è sommabile in  $d\mathbf{p} \, d\mathbf{y} \, dz$  su  $z > 0$  e  $|\mathbf{p}|, |\mathbf{y}|$  limitati (completare per esercizio).