Fisica Matematica - 15 luglio 2015

Esercizio 1 - irrinunciabile

Trova la soluzione $u(x,t)$ dell'equazione

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u + 2\,\partial_x^2\,\partial_t u$$

in $[0,\pi]$, con condizioni di Dirichlet omogenee al contorno e dato iniziale $u(x) = 0$ e $\partial_t u(x,0) = \sin(2x)$, e discuti dell'andamento asintotico della soluzione.

Esercizio 2

Notando che le costanti e le funzioni x, y, xy (e le loro combinazion lineari) hanno laplaciano nullo in $\mathbb{R}^2$, determina la soluzione dell'equazione di Laplace $\triangle u(x,y) = 0$ nel quadrato $[0,1]\times[0,1]$, con condizioni al contorno $u(x,0) = x-1$, $u(1,y) = -y$, $u(x,1) = -1$, $u(0,y) = -1$.

Esercizio 3

Risolvi l'equazione

$$\partial_t u + \partial_x(xu) = -x$$

con dato iniziale nullo.

Esercizio 4

Determina la soluzione al tempo $t = 2$ dell'equazione delle onde $\partial_t^2 u = \partial_x^2 u$ in $[0,+\infty)$, con condizioni di Neumann omogenee in $x = 0$ e dato iniziale

$$u(x,0) = 0, \qquad \partial_t u(x,0) = \mathcal{X}\{x \in (0,1)\}$$

(puoi anche procedere graficamente, a patto che dal grafico si desumano chiaramente i valori della soluzione).

Esercizio 5

Considera l'equazione

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u - \cos(\pi u)$$

in $\mathbb{R}$. Trovane le soluzioni stazionarie del tipo $u(x,t) = \bar{u}$ costante reale; discuti l'esistenza di piccoli moti ondosi intorno a queste soluzioni, studiando la relazione di dispersione per la corrispondente equazione linearizzata.