Fisica Matematica - 22 aprile 2015

Esercizio 1 - irrinunciabile

Trova la soluzione $u(x, y, t)$ dell'equazione

$$\partial_t u = \triangle u - \cos x \sin(2y)$$

in $[-\pi, \pi]^2$, con condizioni periodiche al contorno, e dato iniziale nullo. Determina il suo comportamento asintotico.

Esercizio 2

Trova la soluzione $u(x, y)$ dell'equazione di laplace $\triangle u = 0$, nel dominio $x^2 + y^2 > 1$, che va a 0 per $x^2 + y^2 \to +\infty$, e che al bordo vale $x - y$.

Esercizio 3

Risolvi l'equazione

$$\partial_t u + \frac{1}{1+t^2}\, \partial_x (xu) = 0$$

con dato iniziale $u_0(x)$.

Esercizio 4

Sia $u(x, t)$ la soluzione dell'equazione $\partial_t^2 u = \partial_x^2 u$ in $[0, 1]$ con condizioni di Neumann omogenee in $x = 0$ e $x = 1$, con dato iniziale $u(x, 0) = 0$ e $\partial_t u(x, 0) = \delta(x - 0.1) - \delta(x - 0.8)$. Determina $u(x, 0.9)$, per $x \in [0, 1]$ (puoi anche limitarti a procedere graficamente, a patto che dal grafico si desumano chiaramente i valori della soluzione).

Esercizio 5

Considera l'equazione delle onde in $\mathbb{R}$, con attrito interno

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u + \partial_t\, \partial_x^2 u$$

Discuti l'esistenza e il comportamento di soluzioni del tipo $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx - \omega t)}$, con $k \in \mathbb{R}$ fissato.