8 Equazione del calore

Alcuni dei seguenti esercizi sono tratti dalle dispense di un corso di Fisica Matematica per Ingegneri, del prof. E. Cirillo, che trovate nella cartella `NoteAggiuntive` con il nome ENMC.pdf (in qualche caso ci sono suggerimenti e risposte).

Esercizio 8.1

Sia $u(\mathbf{x}, t)$ la soluzione dell'equazione del calore in $\mathbb{R}^n$ di dato iniziale $u_0(\mathbf{x})$, limitato. Mostrare che $|u(\mathbf{x}, t)| \leq \|u_0(\mathbf{x})\|_\infty$ usando la rappresentazione della soluzione mediante la funzione di Green. Mostrare che se u_0 è sommabile, allora $\|u(\cdot, t)\|_1 \leq \|u(\cdot, t)\|_0$ e che $\|u(\cdot, t)\|_\infty$ tende a 0 per $t \to +\infty$.

Esercizio 8.2

Sia $u(\mathbf{x}, t)$ la soluzione dell'equazione del calore in $\mathbb{R}^n$ con sorgente $f(\mathbf{x}, t)$, di dato iniziale nullo. Mostrare che

$$\|u(\cdot, t)\|_\infty \leq \int_0^t \mathrm{d}s \|f(\cdot, t)\|_\infty$$

e che, se f è sommabile in x,

$$\|u(\cdot, t)\|_1 \leq \int_0^t \mathrm{d}s \|f(\cdot, t)\|_1$$

Esercizio 8.3

Mostrare che i risultati enunciati nei due esercizi precedenti valgono anche nel caso dell'equazione nell'intervallo $[0, L]$ con condizioni di Dirichlet omogenee.

Esercizio 8.4

Scrivere, sotto forma di integrale, l'equazione in $\mathbb{R}$ con i seguenti dati iniziali:

- $u_0(x) = \delta(x)$
- $u_0(x) = T_0 \operatorname{sgn}(x)$
- $u_0(x) = \mathcal{X}\{|x| < \ell\}$, con $\ell > 0$
- $u_0(x) = \mathrm{e}^{-\alpha|x|}$, con $\alpha > 0$
- $u_0(x) = T_0\, \mathcal{X}\{x \in (0, \ell)\}$, con $\ell > 0$

Ove possibile, esprimere la soluzione in termini della funzione

$$E(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \mathrm{d}y \mathrm{e}^{-y^2/2} = \int_{-x}^x \mathrm{d}y \frac{\mathrm{e}^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

che esprime la probabilità di trovare una variabile gaussiana standard nell'intervallo $[-x, x]$. La funzione E è legata alla funzione degli errori

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{d}y \mathrm{e}^{-y^2}$$

infatti $E(x) = \operatorname{erf}(\sqrt{2}x)$

Esercizio 8.5

Risolvere l'equazione del calore nella semiretta $x > 0$, con le seguenti condizioni iniziali e al contorno.

- $u_0(x) = T_0 \mathcal{X}\{x \in (0, \ell)\}$, con $\ell > 0$, e dato al bordo $u(0,t) = 0$, $\forall t > 0$
- $u_0(x) = T_0 \mathcal{X}\{x \in (0, \ell)\}$, con $\ell > 0$, e dato al bordo $\partial_x u(0,t) = 0$, $\forall t > 0$
- $u_0(x) = T_0 \left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha x}\right)$, con $\alpha > 0$ e dato al bordo $u(0,t) = 0$, $\forall t > 0$.

Esercizio 8.6

Risolvere l'equazione del calore nell'intervallo $[0, \ell]$, con condizioni di Neumann omogenee, e dato iniziale $u_0(x)$ assegnato.
Discutere il comportamento asintotico.

Esercizio 8.7

Risolvere l'equazione del calore in $[0, 2\pi]$, con condizioni periodiche al contorno, e dato inziale $u_0(x) = A_0 + A_1 \cos(mx)$, con m intero positivo.
Discutere il comportamento asintotico.

Esercizio 8.8

Determinare tutti i polinomi di grado al massimo due in x e t che risolvono l'equazione del calore sulla retta.

Esercizio 8.9

Risolvere l'equazione del calore in $[0, 1]$, con condizioni al bordo $u(0,t) = a$ e $u(1,t) = b$ e dato iniziale nullo. (suggerimento: sottrarre a u una soluzione dell'equazione delle onde che renda nullo il dato al bordo).
Determinare il comportamento asintotico.

Esercizio 8.10

Risolvere l'equazione del calore in $[0, 1]$, con condizioni al bordo $\partial_x u(0,t) = a$ e $\partial_x u(1,t) = a$ e dato iniziale nullo. (suggerimento: sottrarre a u una soluzione dell'equazione delle onde che renda nullo il dato al bordo).
Determinare il comportamento asintotico.

Esercizio 8.11

Risolvere l'equazione del calore in $[0, 1]$, con condizioni al bordo $\partial_x u(0,t) = a$ e $\partial_x u(1,t) = b$ e dato iniziale nullo. (suggerimento: sottrarre a u una soluzione dell'equazione delle onde che renda nullo il dato al bordo).
Determinare il comportamento asintotico.

Esercizio 8.12

Risolvere l'equazione $\partial_t u = \nu\, \partial_x^2 u + q\delta(x - \pi/2)$ in $[0, \pi]$, con condizione di Dirichlet omogenee.
Determinare il comportamento asintotico della soluzione per $t \to +\infty$.

Esercizio 8.13

Risolvere l'equazione $\partial_t u = \nu\, \partial_x^2 u + q\delta(x - \pi/2)$ in $[0, \pi]$, con condizioni al bordo $u(0,t) = 0$ e $u(\pi, t) = T$.
Determinare il comportamento asintotico della soluzione per $t \to +\infty$.

Esercizio 8.14

Risolvere l'equazione $\partial_t u = \nu\, \partial_x^2 u + q\delta(x-\pi/2)$ in $[0,\pi]$, con condizione di Neumann omogenee.
Determinare il comportamento asintotico della soluzione per $t \to +\infty$.

Esercizio 8.15

Risolvere l'equazione $\partial_t u = \nu \triangle u + q\delta(x-1)\delta(y-1)$ nel quadrato $[0,2]^2$, con condizioni di Dirchlet omogenee al contorno.
Determinare il comportamento asintotico della soluzione per $t \to +\infty$.

Esercizio 8.16

Determinare il comportamento asintotico della soluzione dell'equazione $\partial_t u = \nu \triangle u + q\delta(\mathbf{x})$ nel cerchio $|\mathbf{x}| < R$, con condizioni di Dirchlet omogenee al contorno.