6 Onde in serie e trasformata di Fourier, e relazione di dispersione

Esercizio 6.1 Onda illimitata con attrito viscoso

Risolvi con la trasformata di Fourier l'equazione delle onde in $|R$ con velocità c e attrito viscoso

$$\partial_t^2 u = c^2\,\partial_x^2 u - 2\beta\,\partial_t u,$$

per un generico dato iniziale.

Esercizio 6.2 Onda illimitata con attrito interno

Risolvi con la trasformata di Fourier l'equazione delle onde con velocità c e attrito interno

$$\partial_t^2 u = c^2\,\partial_x^2 u + 2\beta\,\partial_t\,\partial_x^2 u,$$

per un generico dato iniziale. Mostra che i modi con alti numeri d'onda vengono smorzati più rapidamente.
Mostra che se inizialmente l'energia meccanica totale

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\left((\partial_t u)^2 + c^2(\partial_x u)^2\right)$$

è limitata, allora decresce nel tempo

Esercizio 6.3

Risolvi l'equazione delle onde con velocità c e attrito interno

$$\partial_t^2 u = c^2\,\partial_x^2 u + 2\beta\,\partial_t\,\partial_x^2 u,$$

con dato iniziale $u(x,0)=0$ e $\partial_t u(x,0)=\sin x$.
Studia l'andamento della soluzione al variare di β.

Esercizio 6.4

Risolvi l'equazione forzata

$$\partial_t^2 u = c^2\,\partial_x^2 u + 2\beta\,\partial_t\,\partial_x^2 u + \sin(x)$$

con dato iniziale $u(x,0)=0$ e $\partial_t u(x,0)=0$.
Studia l'andamento della soluzione al variare di β.

Esercizio 6.5 L'equazione di Eulero-Bernoulli con attrito viscoso

Risolvi con la trasformata di Fourier l'equazione di Eulero Bernoulli con attrito viscoso:

$$\partial_t^2 u = -\,\partial_x^4 u - 2\beta\,\partial_t u$$

Esercizio 6.6

Risolvi l'equazione

$$\partial_t^2 u = -\,\partial_x^4 u - 2\beta\,\partial_t u + \cos x$$

e studia l'andamento della soluzione.

Esercizio 6.7

Considera in tutto $\mathbb{R}$ l'equazione

$$\partial_t^2 u = \partial_x \left((1+u^2)\, \partial_x u \right) + u - u^3$$

Determina i profili di equilibrio, cioè le costanti $\bar{u}$ tali che $u(x,t) = \bar{u}$ risolva l'equazione.
Discuti l'esistenza di piccoli moti ondosi introno alle soluzioni di equilibrio costanti.

Esercizio 6.8 Sine-Gordon

Considera in tutto $\mathbb{R}$ l'equazione

$$\partial_t^2 \phi = \partial_x^2 \phi + \sin\phi$$

Determina la Lagrangiana e l'energia.
Determina i profili di equilibrio, cioè le constanti $\bar{\phi}$ tali che $\phi(x,t) = \bar{\phi}$ risolve l'equazione.
Scrivi le equazioni delle piccole oscillazioni intorno alle posizioni di equilibrio, e determina la corrispondente relazione di dispersione, discutendo i casi in cui effettivamente il moto linearizzato è un moto di propagazione ondosa.

Esercizio 6.9 Equazione di Schrödinger

L'equazione che descrive il moto di una particella quantistica di massa m, libera di muoversi lungo una retta è

$$\mathrm{i}\,\partial_t \psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\partial_x^2 \psi(x,t)$$

dove la funzione complessa ψ, è la **funzione d'onda** (o ampiezza di probabilità), e $\hbar$ è la cosidetta costante di Plank "ridotta". Fisicamente, $\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2$ è la densità di probabilità di trovare la particella nel punto x.
Scrivi l'equazione in trasformata di Fourier, e determina la relazione di dispersione.
Risolvi l'equazione con dato iniziale $\psi_(x,0) = (2\pi\sigma^2)^{1/4}\mathrm{e}^{-x^2/(2\sigma^2)}$ e calcola $\rho(x,t)$.

Esercizio 6.10

Risolvi in serie di Fourier l'equazione delle onde con velocità c, in $[-\pi,\pi]$ con condizioni periodiche al bordo, per il dato iniziale $u_0(x) = \mathcal{X}\{x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]\}$, e $\dot{u}_0(x) \equiv 0$, con $a \in (-\pi,\pi)$ e $\varepsilon < \pi$.

Esercizio 6.11

Risolvi in serie di Fourier l'equazione delle onde con velocità c, in $[-\pi,\pi]$ con condizioni periodiche al bordo, per il dato iniziale $\dot{u}_0(x) = \mathcal{X}\{x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]\}$, e $u_0(x) \equiv 0$, con $a \in (-\pi,\pi)$ e $\varepsilon < \pi$.

Esercizio 6.12

Risolvi in serie di Fourier l'equazione delle onde con velocità c, in $[0,\pi]$ con condizioni nulle al bordo, per il dato iniziale $u_0(x) = \mathcal{X}\{x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]\}$, e $\dot{u}_0(x) \equiv 0$, con $a \in (0,\pi)$ e ε sufficientemente piccolo per dare senso al dato iniziale.

Esercizio 6.13

Risolvi l'equazione delle onde con velocità c, in $[0,\pi]$ con condizioni nulle al bordo, per il dato iniziale $u_0(x) = 0$, e $\dot{u}_0(x) = \sin(4x)$.

Esercizio 6.14

Risolvi l'equazione

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u + \sin(4x)$$

in $[0,\pi]$, con condizioni nulle al bordo, e dato iniziale nullo.

Esercizio 6.15

Risolvi in serie di Fourier l'equazione

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u + \sin(x/2)$$

in $[0, 2\pi]$ con condizioni periodiche al bordo.