5 Distribuzioni

Esercizio 5.1

Mostra che la derivata nel senso delle distribuzioni di $f(x) = |x|$ è la funzione segno $\operatorname{sgn}(x)$.

Esercizio 5.2

Mostra che come funzione di variabile reale

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sgn}\, x = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \neq 0 \\ \text{non esiste} & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Prova invece che, nel senso delle distribuzioni

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sgn}\, x = 2\delta(x)$$

Esercizio 5.3

Calcola la derivata nel senso delle distribuzioni delle seguenti funzioni

$$\begin{array}{l} \mathcal{X}\{x > 0\} \\ \mathcal{X}\{x < 0\} \\ \mathcal{X}\{x \in (a, b)\} \end{array}$$

Esercizio 5.4

Considera la funzione di due variabili

$$\mathcal{X}\{x - ct > 0\}$$

Calcola la sua derivata distribuzionale rispetto a x e calcola la sua derivata distribuzionale rispetto a t. Mostra che

$$\frac{d}{dt}\mathcal{X}\{x - ct > 0\} = -c\frac{d}{dx}\mathcal{X}\{x - ct > 0\}$$

Esercizio 5.5

Determinare nel senso delle distribuzioni, la derivata di

$$f(x) = x^2\mathcal{X}\{|x| < 1\}$$

Esercizio 5.6

Mostra che

$$x\delta(x-1) = \delta(x-1)$$

e, più in generale, che

$$f(x)\delta(x - x_0) = f(x_0)$$

Esercizio 5.7 Successioni di distribuzioni

Una successione di distribuzioni F_n **converge** a F nel senso delle distribuzioni se $\forall \phi \in K$

$$\lim_{n \to +\infty} F(\phi_n) = F(\phi)$$

Mostra che, in questo senso,

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \mathcal{X}\{|x| < \varepsilon\}$$

dove δ è definita da

$$\int \delta(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \phi(0)$$

Esercizio 5.8 δ-approssimanti

Sia $g(x)$ una funzione continua positiva e di integrale 1. Mostra che

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

La famiglia di funzioni

$$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

viene detta "δ-approssimante".

Esercizio 5.9

Usando la definizione precedente, provare che, se $c > 0$,

$$\delta(cx) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \mathcal{X}\{|xc| < \varepsilon\} = \frac{1}{c}\delta(x)$$

Mostra che per $c \neq 0$

$$|c|\delta(cx) = \delta(x)$$

Esercizio 5.10

Usando la definizione precedente, mostra che

$$\delta(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}) = \mathrm{e}^{-1}\delta(x-1)$$

Più in generale, data $f \in \mathbf{C}^1$, supponi che l'equazione $f(x) = f(x_0)$ ammetta solo la soluzione $x = x_0$, e che $f'(x_0) \neq 0$. Dimostra che

$$\delta(f(x) - f(x_0)) = \frac{1}{|f'(x_0)|}\delta(x - x_0)$$

Generalizza la dimotrazione, provando che, nel caso l'equazione $f(x) = c$ ammetta n soluzioni x_i in cui la derivata non è nulla,

$$\delta(f(x) - a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|f'(x_i)|}\delta(x - x_i)$$

Esercizio 5.11

Semplifica più che puoi le seguenti espressioni:

$$\begin{array}{l} \delta(|x| - 2) \\ \delta(x^2 - 4) \\ \delta(x^2 + 4) \\ x\delta(x^2 - 4) \end{array}$$

Esercizio 5.12 Dipolo I

Determina nel senso delle distribuzioni

$$p = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \left(\delta(x - \varepsilon) - \delta(x + \varepsilon) \right)$$

Mostra che la distribuzione ottenuta ha "massa" nulla, nel senso che $\int p(x)\,\mathrm{d}x = 0$, e che invece il momento primo non è nullo, cioè $\int xp(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$.

Esercizio 5.13 Dipolo II

Sia $g(x)$ una funzione regolare, a media nulla. Determinare nel senso delle distribuzioni

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^2} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

Esercizio 5.14 Dipolo III

Sia $g(x)$ una densità di carica elettrica, a supporto compatto. Osservare questa carica da molto lontano corrisponde a considerare la carica in variabili riscalate con un parametro piccolo ε:

$$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

Mostrare che sussite il seguente sviluppo in ε piccolo (nel senso delle distribuzioni)

$$g_\varepsilon(x) = c_0 \delta(x) + c_1 \varepsilon \delta'(x) + c_2 \varepsilon^2 \delta^{(2)} \dots$$

dove c_0 è la carica totale, e c_1 è il momento di dipolo della distribuzione.

Esercizio 5.15 ** Continuità e limitatezza

Vale il seguente Teorema: F è un funzionale lineare e continuo su K se e solo se, per ogni compatto C, esiste una costante a e un intero m, tale che per ogni $\phi \in K$ con supporto in C

$$|F(\phi)| \leq a \sup |\phi^{(m)}|$$

Chiamerò "limitatezza su K" questa proprietà. Con questo esercizio dimostrerari questo teorema.

- Prova che la limitatezza in K implica la continuità.
- Per il viceversa, prova innanzi tutto che se d è il diametro di un compatto C e $\phi \in K$ ha supporto in C, allora

  $$\sup |\phi| \leq d \sup |\phi'|$$

  e più in generale, che se $k < n$

  $$\sup |\phi^{(k)}| \leq d^{(n-k)} \sup |\phi^{(n)}|$$

  Queste due asserzioni dicono che puoi stimare una funzione a supporto compatto in termini delle sue derviate. Suggerimento: $\phi(x) = \int_{\min C}^{x} \phi'(z)\,\mathrm{d}z \dots$
- Supponi per assurdo che F sia continuo e non limitato. Prova che la non limitatezza implica che esiste un compatto C e una successione $\phi_n \in K$ con supporto in C tale che

  $$|F(\phi_n)| \geq n(1 + d^n) \sup |\phi_n^{(n)}|$$

- Mostra che la successione

  $$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n}(1 + d^n)} \phi_n$$

  tende a 0 in K.
- Mostra che $F(\psi_n)$ non tende a 0 e deduci l'assurdità dell'ipotesi che F non fosse limitato su K.