4 Equazione delle onde in una dimensione

Esercizio 4.1

Sia $u_0(x) = \mathcal{X}\{x \in (0,1)\}$ e $\dot{u}_0(x) = 0$. Determina la soluzione dell'equazione delle onde su $\mathbb{R}$ con tale dato inziale.

Esercizio 4.2

Sia $u_0(x) = \mathcal{X}\{x \in (0,1)\}$ e $\dot{u}_0(x) = 0$. Determina la soluzione dell'equazione delle onde su $[0,+\infty)$ con la condizione di Dirichlet nulla in $x = 0$, al tempo $t = 1/4$ e $t = 0.5$

Esercizio 4.3

Sia $\dot{u}_0(x) = \mathcal{X}\{x \in (0,1)\}$ e $u_0(x) = 0$. Determina la soluzione dell'equazione delle onde su $[0,+\infty)$ con la condizione di Dirichlet nulla in $x = 0$, al tempo $t = 1/4$ e $t = 0.5$

Esercizio 4.4

Sia $u_0(x) = \mathcal{X}\{x \in (0,1)\}$ e $\dot{u}_0(x) = 0$. Determina la soluzione dell'equazione delle onde su $[0,2]$ con la condizione di Dirichlet nulla in $x = 0$ e in $x = 2$, ai tempu $t = 2 + 1/4$, $t = 3 - 1/4$.

Esercizio 4.5

Sia $u_0(x) = \mathcal{X}\{x \in (0,1)\}$ e $\dot{u}_0(x) = 0$. Determina la soluzione dell'equazione delle onde su $[0,2]$ con la condizione di Dirichlet nulla in $x = 0$ e di Neumann nulla in $x = 2$, per $t < 8$ (procedere solo graficamente).

Esercizio 4.6

Considera l'equazione delle onde in $[0,L]$, con condizioni di Dirichlet omogenee. Sia $\dot{u}_0(x) = \delta(x-y)$, con $y \in (0,L)$ e $u_0(x) = 0$. Determina $u(x,t)$.

Esercizio 4.7

Considera l'equazione delle onde in $[0,2]$, con condizioni di Dirichlet omogenee. Sia $u_0(x) = 1 - |x-1|$, e $\dot{u}_0(x) = 0$. Determina $u(x,t)$.

Esercizio 4.8

Considera l'equazione delle onde in $[0,L]$, con condizioni di Neumann omogenee. Sia $\dot{u}_0(x) = \delta(x-y)$, con $y \in (0,L)$ e $u_0(x) = 0$. Determina $u(x,t)$.

Esercizio 4.9

Considera l'equazione delle onde in $[-1,1]$, con condizioni di Neumann omogenee. Sia $u_0(x) = 2x^2 - x^4$, e $\dot{u}_0(x) = 0$. Verifica che il dato iniziale è compatibile con le condizioni al contorno. Determina $u(x,t)$.

Esercizio 4.10

Considera l'equazione delle onde in $[-1,1]$, con condizioni di Neumann omogenee. Quale condizione va imposta su $\dot{u}_0(x)$ affinché sia compatibile con le condizioni al contorno?

Esercizio 4.11 Una piccola "patologia"

Considera l'equazione delle onde in $[-1,1]$, con condizioni di Neumann omogenee. Sia $u_0(x) = 0$, e $\dot{u}_0(x) = 1$. Verifica che il dato iniziale è compatibile le condizioni al contorno. Determina $u(x,t)$.

Calcola l'energia. È costante?

Esercizio 4.12

Considera l'equazione delle onde in $[0, L]$. con condizioni di Dirichlet omogenee. Mostra che la soluzione è limitata uniformemente in t.
Mostra che nel caso di condizioni di Neumann omogenee la soluzione è limitata uniformemente in t se e solo se

$$\int_0^L \dot{u}_0(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Esercizio 4.13

Considera l'equazione delle onde con dato iniziale $u_0(x)$ periodico su $[0, L]$. Sotto quali condizioni per $\dot{u}_0(x)$ la soluzione è periodica in t e qual è, nel caso, il suo periodo?

Esercizio 4.14 *

Sia $g(t) = (1 - \cos(t))\mathcal{X}\{t \in [0, 2\pi]\}$. Risolvi l'equazione delle onde in $[0, +\infty)$ con dato iniziale nullo e condizione al contorno di Dirichlet non omogenea $u(0, t) = g(t)$.

Esercizio 4.15 *

Sia $g(t) = (1 - \cos(t))\mathcal{X}\{t \in [0, 2\pi]\}$. Risolvi l'equazione delle onde in $[0, +\infty)$ con dato iniziale nullo e condizione al contorno di Neumann non omogenea $\partial_x u(0, t) = g(t)$.

Esercizio 4.16

Considera l'equazione delle onde in $\mathbb{R}$ e considera la sua soluzione debole

$$u(x, t) = \mathcal{X}\{|x - ct| < 1\}$$

Quanto vale $\partial_t u(x, t)$?

Esercizio 4.17

Considera l'equazione delle onde in $\mathbb{R}$ e la sua soluzione debole

$$u(x, t) = \mathcal{X}\{|x + 2 - ct| < 1\} - \mathcal{X}\{|x - 2 + ct| < 1\}$$

Esiste un istante di tempo in cui $u(x, t)$ è nullo? Esiste un istante di tempo in cui l'impulso è nullo?