3 Modelli microscopici ed Equazioni di Eulero-Lagrange

Esercizio 3.1

Considera una catena di oscillatori nel piano cartesiano fatta nel seguente modo. Sia $n > 1$ il numero di oscillatori e sia $\varepsilon = L/n$.
I punti materiali di coordinate $(\varepsilon i + u_i, v_i)$ e massa M/n sono consecutivamente legati da molle con lunghezza riposo pari a $\lambda\varepsilon$, con $\lambda \in (0, 1)$. Gli estremi sono fissati: $u_0 = u_n = 0 = v_0 = v_n$. Le costanti elastiche delle molle sono tutte uguali a k.
Scrivere la lagrangiana delle piccole oscillazioni nelle variabili (u_i, v_i), con $i = 1 \dots (n-1)$. Mostra che nel limite $\varepsilon \to 0$, scalando opportunamente k, le equazioni tendono formalmente alle equazioni di una corda vibrante, sia nella variabile u che nella variabile v.

Esercizio 3.2 Corda verticale

Considera una catena di oscillatori con il primo fissato nell'origine di un piano cartestiano, fatta nel seguente modo. Sia $n > 1$ il numero di oscillatori e sia $\varepsilon = L/n$.
I punti materiali corrispondenti avranno coordinate $(u_i, -\varepsilon i - v_i)$ e massa M/n, e sono consecutivamente legati da molle con lunghezza riposo pari a ε. L'estremo iniziale è fissato, con $u_0 = 0 = v_0$. Le costanti elastiche delle molle sono tutte uguali a k. Sul sistema agisce la gravità, diretta verso il basso.
Scrivi la lagrangiana del sistema a n fissato, e scrivine il limite per $n \to +\infty$, riscalando opportunamente la costate k.

Considera $u \equiv 0$. Trova l'equazione per v e trova la soluzione di equilibrio (dovrai ipotizzare che v è crescente, verifica a posteriori che la soluzione travata ha questa proprietà).

Nella lagrangiana completa fissa v alla soluzione di equilibrio che hai trovato, e scrivi l'equazione per u nel caso di piccole oscillazioni.

Esercizio 3.3 * Aste

Un possibile modello per descrivere in alcuni i casi il moto di una sottile e lunge asta si può ottenere come segue. Considera un sistema di $n+1$ punti materiali, di coordinate $P_i = (i\varepsilon, v_i)$, con $i \in 0 \dots n$, con $\varepsilon = L/n$. Ogni punto ha massa $\rho\varepsilon = M/n$, dove M è la massa complessiva dell'asta. In ogni punto è presente una "molla a torsione" che favorisce l'allineamento tra i segmenti che P_iP_{i-1} e $P_{i+1}P_i$: detto α_i l'angolo tra i due segmenti consecutivi, la molla ha energia potenziale $k\alpha_i^2/2$.
Scrivere la lagrangiana delle piccole oscillazioni, discutere il limite formale delle equazioni e della lagrangiana delle piccole oscillazioni nel limite $\varepsilon \to 0$, scalando eventualmente i parametri.

Esercizio 3.4

Considera una corda di densità ρ, suscettibile di deformazioni trasversali e longitudinali, descritta, al tempo t, dalla curva

$$x \to \begin{pmatrix} x + u(x,t) \\ v(x,t) \end{pmatrix}$$

con estremi fissati in $(0,0)$ e $(L,0)$. Supponi che l'energia potenziale sia T volte la lunghezza della corda. Scrivi la lagrangiana e le equazioni del moto e scrivi le equazioni del moto.
Linearizza le equazioni del moto.

Esercizio 3.5 Equilibrio di un corda pesante I

Usando le variabili u e v come nell'esercizio precedente, prova che la configurazione di equilibrio di una corda elastica pesante fissata agli estremi su un asse orizzontale, nel limite dei piccoli scostamenti, è data da una parabola.

Esercizio 3.6 Equilibrio di un corda pesante II

Considera una corda pesante, per la quale l'energia potenziale elastica sia proporzionale alla lunghezza della corda (*vedi* esercizio 3.4). Scrivi le equazione per l'equilibrio.

Esercizio 3.7 Equilibrio di un corda pesante III

Considera una corda pesante, per la quale l'energia elastica sia proporzionale all'integrale di $(\partial_x^2 u)^2 + (\partial_x^2 v)^2$. Trova i profili di equilibrio $\bar{u}$ e $\bar{v}$. Mostra che nel caso dinamico, u e $v - \bar{v}$ verificano l'equazione delle onde.

Esercizio 3.8 ** Catenaria

Considera un modello di catena composta da $n-1$ punti materiali di massa $\varepsilon\rho$, di coordinate $P_i = (x_i, y_i)$, $i \in \{1, \dots n-1\}$; fissa inoltre gli ulteriori punti $(x_0, y_0) = (0, 0)$ e $(x_n, y_n) = (L, 0)$. I punti sono soggetti ai vincoli $|(x_{i+1}, y_{i+1}) - (x_i, y_i)| = \varepsilon$, $i \in \{1, \dots n-1\}$ con $n\varepsilon = \ell$, con $\ell > L$ (cioè distano l'uno dall'altro esattamente ε). Usa come variabili lagrangiane gli angoli θ_i che la direzione del segmento che congiunge P_{i-1} a P_i forma con l'asse delle x. Scrivi l'energia potenziale nel limite $n \to +\infty$, utilizzando come variabile $\theta(s)$, dove s è l'ascissa curvilinea. Trova l'equazione del minimo per l'energia potenziale, soggetta ai vincoli che il punto finale della catena coincida con $(L, 0)$. Mostra che l'equazione che si ottiene implica che

$$\frac{d}{ds} \tan\theta(s) = cost$$

Scrivi questa equazione ipotizzando che la catena sia descritta dal profilo $(x, f(x)$. L'equazione che si ottiene si può risolvere esplicitamente e da come profilo in coseno iperbolico
(*vedi* `http://it.wikipedia.org/wiki/Catenaria`).

Scrivi l'energia cinetica e le equazioni del moto corrispondenti.

Esercizio 3.9

Scrivi la lagrangiana che ha come equazioni di Eulero Lagrange

$$\partial_t^2 u = c^2\, \partial_x^2 u - \lambda u$$

Trova l'espressione del corrispondente integrale primo.

Esercizio 3.10

Scrivi la lagrangiana che ha come equazioni di Eulero Lagrange

$$\partial_t^2 u = -\,\partial_x^4 u$$

Trova l'espressione del corrispodente integrale primo.
Considera la Lagrangiana trovata nel segmento $[0, L]$ e discuti le condizioni al contorno da assegnare a u per ottenere l'equazione data dal principio di azione stazionaria.

Esercizio 3.11 *

Nell'equazione delle onde per il campo elettromagnetico compare l'indice di rifrazione $n(x) \geq 1$, che dipende dal mezzo:

$$\partial_t^2 u = \frac{c^2}{n(x)}\, \partial_x^2 u$$

(questa è una versione scalare dell'equazione, che in realtà riguarda le oscillazioni trasversali dei campi elettromagnetici). Trova la corrispondente lagrangiana (nota che n può dipendere dalla posizione x nel mezzo).
Trova l'espressione del corrispondente integrale primo.

Esercizio 3.12 *

Sia $a(x) > 0$, trova la Lagrangiana per l'equazione

$$\partial_t^2 u(x,t) = \partial_x(a(x)\,\partial_x u(x,t))$$

Trova l'espressione del corrispodente integrale primo.

Esercizio 3.13

Sia

$$\mathcal{L}[u] = \int_0^1 L(\partial_t u, \partial_x u, \partial_x^2 u, \partial_x^3 u)dx$$

una lagrangiana per la funzione u, assunta periodica in $[0,1]$. Scrivi le equazioni di Eulero Lagrange per u.

Esercizio 3.14 Corda su tappeto elastico

Sia

$$\mathcal{L}[u] = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(\partial_t u)^2 - \frac{c^2}{2}(\partial_x u)^2 - \frac{\gamma}{2}u^2\right)$$

una lagrangiana per la funzione u, assunta periodica in $[0,1]$. Scrivi le equazioni di Eulero Lagrange per u. Notare che l'energia potenziale costa di una parte di energia elastica interna e di una parte di energia elastica di richiamo dalla posizione $u(x) \equiv 0$.
Determina l'energia meccanica.

Esercizio 3.15

Sia

$$\mathcal{L}[u] = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(\partial_t u)^2 - \frac{c^2}{2}(\partial_x u)^4\right)$$

una lagrangiana per la funzione u, assunta periodica in $[0,1]$. Scrivi le equazioni di Eulero Lagrange per u.
Determina l'energia meccanica.

Esercizio 3.16

Considera la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \int_0^L \frac{\rho}{2}(\partial_t v)^2 - T\int_0^L \sqrt{1 + \partial_x v^2}$$

Trova le equazioni del moto. Linearizza le equazioni del moto.

Esercizio 3.17

Sia

$$\mathcal{L}[u] = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(\partial_t u)^2 - \frac{c^2}{2}u^2(\partial_x u)^2\right)$$

una lagrangiana per la funzione u, assunta periodica in $[0,1]$. Scrivere le equazioni di Eulero Lagrange per u.
Determina l'energia meccanica.

Riconosci che le costanti risolvano le equazioni, e linearizza l'equazione intorno a una costante non nulla.

Esercizio 3.18

Sia

$$\mathcal{L}[u] = U_-(u(0,t),t) + U_+(u(1,t),t) + \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(\partial_t u)^2 - \frac{c^2}{2}(\partial_x u)^2\right)$$

la Lagrangiana per una corda vibrante, con forzanti agli estremi $x = 0$ e $x = 1$ di energia potenziale $U_-(u(0,t),t)$, $U_+(u(1,t),t)$. Considerando come spazio dei moti possibili le funzioni $u(x,t)$ regolari, senza condizioni al bordo, ricavare le equazioni di Eulero–Lagrange considerando variazioni δu aribitrarie, e determinare le condizioni al contorno che deve soddisfare $u(x,t)$.

Esercizio 3.19

Considera la lagrangiana

$$L[u] = b(t)u(1,t) + \frac{1}{2}\int_0^1 \left((\partial_t u)^2 - (\partial_x u)^2\right) \mathrm{d}x$$

con $b(t)$ funzione regolare assegnata.
Determina le equazioni del moto, e la condizione al contorno in $x = 1$, che si ottengono imponendo la stazionarietà dell'azione nello spazio dei moti $u(x,t)$ con $u(0,t) = 0$.

Esercizio 3.20 C

onsidera l'equazione in $\mathbb{R}$

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u + \mathrm{e}^{u^2-u} - 1$$

Determina le soluzioni stazionarie del tipo $u(x,t) = \bar{u}$, con $\bar{u}$ costante reale e trova le equazioni del moto per piccoli spostamenti intorno all'equilibrio.