

# 1 Equazioni differenziali ordinarie e flussi di fase

## Esercizio 1.1

Risolvi le seguenti e.d.o. lineari autonome, scrivendo esplicitamente il corrispondente flusso di fase e calcolando lo jacobiano.

$$\begin{array}{lll} \dot{x} = 1 & \dot{x} = x & \dot{x} = x + 1 \\ \dot{x} = -2 & \dot{x} = -2x & \dot{x} = -2x + 1 \end{array}$$

## Esercizio 1.2

Risolvi le seguenti e.d.o. lineari non autonome, scrivendo esplicitamente il corrispondente flusso di fase a due parametri e calcolando lo jacobiano.

$$\begin{array}{llll} \dot{x} = t & \dot{x} = -x + t & \dot{x} = -2tx & \dot{x} = -2tx + t^2 \\ \dot{x} = xe^t & \dot{x} = xe^t + x & \dot{x} = -x + e^{2t} & \dot{x} = 2x + e^{2t} \end{array}$$

## Esercizio 1.3

Risolvi l'e.d.o.

$$\dot{x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\cosh x}$$

Trova il corrispondente flusso, e verifica esplicitamente che

$$\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$$

Determina lo Jacobiano del flusso

## Esercizio 1.4

Risolvi l'e.d.o.

$$\dot{x} = x + 1/(1 + t^2)$$

e determinane il flusso, utilizzando il metodo della variazione delle costanti.

## Esercizio 1.5

Risolvi l'e.d.o.

$$\dot{x} = x + 1/(1 + t^2)$$

e determinane il flusso, utilizzando il metodo della variazione delle costanti.

## Esercizio 1.6 Risonanze

Risolvi l'e.d.o.

$$\dot{x} = -x + e^{\lambda t}$$

cercando soluzioni particolari della forma  $ce^{\lambda t}$ .

Mostra che questo procedimento non funziona se  $\lambda = -1$ , cioè se la forzante coincide con il moto proprio del sistema.

Nel caso  $\lambda = -1$  cerca soluzioni della forma  $cte^{-t}$

## Esercizio 1.7 Risonanze

Usando gli esponenziali complessi, risolvi l'e.d.o.

$$\ddot{x} = -x + \cos t$$

usando il metodo sviluppato nell'esempio precedente.

### Esercizio 1.8

Risolvi l'e.d.o.

$$\ddot{x} = x$$

e determinane il flusso.

### Esercizio 1.9 Sistemi lineari

Considera l'e.d.o.  $\ddot{x} = x$

a. Riscrivi l'e.d.o. come un sistema di e.d.o. del primo ordine nelle due variabili  $(x, \dot{x}) = \mathbf{z}$ .

b. Riconosci che è della forma

$$\frac{d}{dt}\mathbf{z} = A\mathbf{z}$$

dove  $A$  è una matrice  $2 \times 2$ .

c. Cerca delle soluzioni della forma  $\mathbf{v}e^{\lambda t}$ , con  $\mathbf{v}$  vettore costante.

d. Mostra che  $\mathbf{v}$  deve essere autovettore di autovalore  $\lambda$

e. Risolvi il problema agli autovalori  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$  per la matrice  $A$  del sistema che stai considerando.

f. Usa le due soluzioni trovate per scrivere il flusso.

g. Scrivi esplicitamente la matrice  $e^{At}$

### Esercizio 1.10 Variazione delle costanti per i sistemi

Considera l'e.d.o.

$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z} + \mathbf{b}(t)$$

con  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ ,  $A$  matrice reale e  $\mathbf{b}$  vettore che dipende dal tempo. Utilizza il metodo della variazione delle costanti cercando una soluzione particolare della forma  $e^{At}\mathbf{w}(t)$ .

Mostra che in definitiva ottieni il flusso

$$\Phi_{t,s}(\mathbf{z}) = e^{A(t-s)}\mathbf{z} + \int_s^t dr e^{-A(t-r)}\mathbf{b}(r)$$

### Esercizio 1.11

Determina il flusso per l'edo lineare non autonoma

$$\ddot{x} = x + t$$

e dell'equazione usando il risultato dei due esercizi precedenti.

### Esercizio 1.12

Determina il flusso per l'edo lineare non autonoma

$$\ddot{x} = x + e^{\nu t}$$

cercando soluzioni della forma  $ce^{\nu t}$ . Mostra che nel caso  $\nu = 1$  non trovi soluzioni. In questo caso procedi con il metodo della variazione delle costanti, oppure cercando soluzioni particolari della forma  $ate^t$ .

### **Esercizio 1.13**

Scrivi la Lagrangiana per un oscillatore armonico di pulsazione  $\omega$ . Scrivi le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange. Determina il flusso associato.

### **Esercizio 1.14**

Risolvi l'esercizio precedente in formalismo hamiltoniano.

### **Esercizio 1.15**

Determina il flusso per l'oscillatore armonico con attrito

$$\ddot{x} = -\omega^2 x - 2\beta\dot{x}$$

dove  $\beta$  è un parametro positivo.

### **Esercizio 1.16**

Determina, al variare di  $\omega$ , il flusso per l'oscillatore armonico forzato

$$\ddot{x} = -\omega^2 x + \cos t$$

### **Esercizio 1.17**

Determina il flusso per l'oscillatore armonico forzato-smorzato

$$\ddot{x} = -\omega^2 x - 2\beta\dot{x} + \cos t$$

### **Esercizio 1.18**

Determina il flusso per l'edo lineare non autonoma

$$\ddot{x} = x + t$$