8 Equazione di Laplace e Poisson

Alcuni dei seguenti esercizi sono tratti dalle dispense di un corso di Fisica Matematica per Ingegneri, del prof. E. Cirillo, che trovate nella cartella `NoteAggiuntive` con il nome ENMC.pdf (in qualche caso ci sono suggerimenti e risposte).

Esercizio 8.1

Risolvere l'equazione di Laplace $\triangle u = 0$ nell'interno del rettangolo $[0, a] \times [0, b]$, e con condizioni al bordo $u(x, 0) = \sin(3\pi x/a)$ per $x \in [0, a]$, e nulla sugli altri tre lati.

Esercizio 8.2

Sia $f \in \mathbf{C}^1([0, a])$ e nulla agli estremi. Risolvere l'equazione di Laplace $\triangle u = 0$ nell'interno del rettangolo $[0, a] \times [0, b]$, e con condizioni al bordo $u(x, 0) = f(x)$ per $x \in [0, a]$, e nulla sugli altri tre lati.

Esercizio 8.3

Risolvere l'equazione di Laplace $\triangle u = 0$ nell'interno del rettangolo $[0, a] \times [0, b]$, e con condizioni al bordo $u(x, 0) = \sin(\pi x/a)$ e $u(x, b) = \sin(3\pi x/a)$ per $x \in [0, a]$, e nulla sugli altri due lati.

Esercizio 8.4

Risolvere l'esercizio precedente come sovrapposizione delle soluzioni dell'equazione di Laplace con condizioni al bordo nulle tranne che sul bordo $y = 0$ e $y = b$ rispettivamente.

Esercizio 8.5

Risolvere l'equazione di Laplace $\triangle u = 0$ nell'interno del rettangolo $[0, a] \times [0, b]$, e con condizioni al bordo $u(0, y) = 0$, $u(a, y) = V$, per $y \in [0, b]$, e $u(x, 0) = Vx/a = u(x, b)$ per $x \in [0, a]$.

Esercizio 8.6

Si trovino tutti i polinomi di secondo grado che risolvono l'equazione di Laplace nel piano.

Esercizio 8.7

Si trovi qualche soluzione esplicita non nulla dell'equazione di Laplace nel rettangolo $[0, a] \times [0, b]$, con $u(x, 0) = 0$ per $x \in [0, a]$ e $u(0, y) = 0$ per $y \in [0, b]$.

Esercizio 8.8

Si trovi qualche soluzione esplicita non nulla dell'equazione di Laplace nel rettangolo $[0, a] \times [0, b]$, con $u(x, b) = 0$ per $x \in [0, a]$ e $u(0, y) = 0$ per $y \in [0, b]$.

Esercizio 8.9 **

Utilizzando gli esercizi percedente, mostrare come si può risolvere l'equazione di Laplace nel rettangolo $[0, a] \times [0, b]$ con condizioni al contorno regolari date da

$$u(x, 0) = f^-(x), \quad u(x, b) = f^+(x) \quad \text{per} \quad x \in [0, a]$$

e

$$u(0, y) = g^-(y), \quad u(a, y) = g^+(y) \quad \text{per} \quad y \in [0, b]$$

con $f^\pm$ e $g^\pm$ di classe $\mathbf{C}^1$. Preliminarmente, dare le condizioni su $f^\pm$ e $g^\pm$ in modo che le condizioni al contorno siano complessivamente continue.

Esercizio 8.10 Il condensatore piano a facce parallele

Risolvere l'equazione di Laplace nella striscia $[0, a] \times \mathbb{R}$, con condizioni al bordo $u(0, y) = 0$ e $u(a, y) = V$ per $y \in \mathbb{R}$.

Esercizio 8.11 Dati al bordo discontinui

Risolvere l'equazione di Laplace nel rettangolo $[0, a] \times [0, b]$, con $u(x, 0) = 0$ e $u(x, b) = V$ per $x \in [0, a]$, e $u(0, y) = 0 = u(a, y)$ per $y \in [0, b]$.
Ricordo che si può sviluppare con $\sin(kx/a)$, $k \geq 1$, anche una funzione che non è nulla ai bordi $x = 0$ e $x = a$ (naturalmente la serie non onvergerge ai bordi).

Esercizio 8.12

Risolvere l'equazione di Laplace nel quadrato $[0, \pi] \times [0, \pi]$, con $u(x, 0) = 0$ e $u(x, \pi) = f(x)$, e con $\partial_x u(0, y) = 0 = \partial_x u(\pi, y)$, per $y \in [0, \pi]$.

Esercizio 8.13

Risolvere l'equazione di Laplace nella corona circolare $|\mathbf{x}| = \rho \in [r, R]$, con dati al contorno $u(\mathbf{x}) = a$ per $\rho = r$, e $u(\mathbf{x}) = 0$ per $\rho = R$.
Discuti il limite della soluzione per $r \to 0$.

Esercizio 8.14 Superfici minime

Sia $(x, y) \to (x, y, f(x, y))$ una superficie, con $(x, y) \in \Omega$ dominio del piano. Sia $S[f]$ l'area della superficie. Determinare le equazioni per f che rendono stazionario (minimo) il funzionale $S[f]$.
Risolvere l'equazione nel caso in cui Ω sia una corona circolare di raggi r e R, con $r < R$, e con i dati al contorno $f(\mathbf{x}) = 0$ per $|\mathbf{x}| = R$, e $f(\mathbf{x}) = a$ se $|\mathbf{x}| = r$. Discutere l'esistenza di una soluzione regolare, e il limite per $r \to 0$.

(Fate attenzione all'espressione della divergenza in coordinate polari...)

Esercizio 8.15

Risolvere l'equazione di Laplace nella corona circolare $|\mathbf{x}| = \rho \in [r, R]$, con dati al contorno $u(\mathbf{x}) = 0$ per $\rho = r$, e $u(\mathbf{x}) = x_1$ per $\rho = R$.

Esercizio 8.16 Gravità sottoterra

Considera un corpo a simmetria sferica, cavo al centro. Determina il campo gravitazionale all'interno risolvendo l'opportuno problema di Laplace.

Esercizio 8.17 Corpi celesti sferici

Considera un corpo celeste sferico con il centro nel punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, con densità di massa omogenea, in un campo gravitazionale generato da una massa puntiforme posta nell'origine. Mostra che la risultante della forza che agisce sul corpo è pari a quella che agirebbe sul suo centro se tutta la massa fosse lì concentrata (utilizza il teorema della media).
Mostra che lo stesso risultato vale se il corpo ha una densità che varia solo con la distanza dal suo centro.

NB Il campo **generato** da una massa a simmetria sferica è uguale a quello di una pari massa puntiforme posta nel centro. Questo esercizio riguarda l'effetto **subito** da un corpo a simmetria sferica immerso in un campo gravitazionale.

Esercizio 8.18 Poisson a simmetria radiale

Risolvi l'equazione di Poisson $\triangle u = f$ in $\mathbb{R}^2$ con f a simmetria radiale, e a supporto compatto. Risolvi la stessa equazione nel caso tridimensionale, con $f = f(|\mathbf{x}|)$.