

7 Cambi di coordinate

Esercizio 7.1 Coordinate polari.

Determinare l'espressione del gradiente, della divergenza e del laplaciano in coordinate polari.

Esercizio 7.2 Coordinate ellittiche.

Sia $a > 0$. Considera il cambiamento di variabili

$$\begin{aligned}x &= a \cosh \mu \cos \phi \\y &= a \sinh \mu \sin \phi\end{aligned}$$

con $\mu \geq 0$, $\phi \in [0, 2\pi]$. Mostra che questo cambiamento di coordinate è regolare per $\mu \neq 0$.

Mostra che per μ costante (x, y) descrive ellissi, con i fuochi in $x = \pm a$, mentre per ϕ costante (x, y) descrive iperboli. Mostra inoltre che queste ellissi e queste iperboli si intersecano perpendicolarmente.

Determina l'espressione del laplaciano in questo sistema di coordinate.

Esercizio 7.3 Coordinate sferiche

Determina l'espressione del gradiente, della divergenza e del laplaciano in coordinate sferiche.

Esercizio 7.4

Sia $f = f(|\mathbf{x}|)$ una funzione radiale in \mathbb{R}^n . Esprimi Δf in termini delle derivate di f e di $\rho = |\mathbf{x}|$.

Esercizio 7.5

Determina le soluzioni in \mathbb{R}^n dell'equazione $\Delta f = 0$ tra le funzioni radiali, definite in $\mathbf{x} \neq 0$.

Determina quali di esse hanno laplaciano pari a $-\delta(x)$.

Esercizio 7.6

Considera il cambio di variabile regolare $x = x(z) = e^z$, definito da $z \in \mathbb{R}$ in $(0, +\infty)$. Determina l'espressione dell'operatore ∂_x^2 in termini delle derivate rispetto a z .