

## 6 Uguaglianze e limiti

### Esercizio 6.1

Siano  $f$  e  $g$  due funzioni scalari in  $\mathbb{R}^n$ . Prova che

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

### Esercizio 6.2

Sia  $\mathbf{w}$  un campo vettoriale in dimensione  $n$ , e sia  $f$  una funzione scalare. Prova che

$$\operatorname{div}(f\mathbf{w}) = \nabla f \cdot \mathbf{w} + f \operatorname{div} \mathbf{w}$$

### Esercizio 6.3

Calcolare la divergenza del campo vettoriale  $\hat{\mathbf{x}}$  in  $\mathbb{R}^n$  per  $\mathbf{x} \neq 0$ .

### Esercizio 6.4

Sia  $A$  una matrice; calcolare la divergenza del campo vettoriale  $A\mathbf{x}$  in  $\mathbb{R}^n$ .

### Esercizio 6.5

Siano  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  due vettori in  $\mathbb{R}^n$ . Con il simbolo  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  indico il prodotto tensore, cioè la matrice di coefficienti  $a_i b_j$  (equivalentemente, è il prodotto tra il vettore riga  $\mathbf{a}$  e il vettore colonna  $\mathbf{b}$ ).

Calcolare la divergenza di  $A\hat{\mathbf{x}}$ , dove  $A$  è una matrice, mostrando come si estrime in funzione della traccia di  $A$  e di  $A\hat{\mathbf{x}} \otimes \hat{\mathbf{x}}$ .

### Esercizio 6.6

Sia  $\mathbf{v}$  un vettore, calcola la divergenza di  $\hat{\mathbf{x}} \otimes \hat{\mathbf{x}} \mathbf{v}$ .

### Esercizio 6.7

Sia  $f$  una funzione in  $\mathbb{R}^n$ . Provare che

$$(\nabla f)(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \nabla_x(f(\mathbf{x} - \mathbf{y})) = -\nabla_y(f(\mathbf{x} - \mathbf{y}))$$

### Esercizio 6.8

Sia  $f(\mathbf{x})$  una funzione regolare in  $\mathbb{R}^3$ . Calcola il limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$  di

$$\int_{|\mathbf{x}|=\varepsilon} \sigma(d\mathbf{x}) \frac{1}{|\mathbf{x}|^2} f(\mathbf{x})$$

### Esercizio 6.9

Sia  $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$  a supporto compatto. Provare, isolando la singolarità, che

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \cdot \nabla f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = cf(\mathbf{x})$$

per un'opportuna costante  $c$ .

### Esercizio 6.10

Sia  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  un campo vettoriale regolare in  $\mathbb{R}^3$ . Calcola il limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$  di

$$\int_{|\mathbf{x}|=\varepsilon} \sigma(d\mathbf{x}) \frac{\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^4} \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

### Esercizio 6.11

Calcolare la derivata temporale e il laplaciano in  $\mathbb{R}^n$  della funzione

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{t^{n/2}} e^{-|\mathbf{x}|^2/t}$$

Trovare  $\nu$  tale che  $u$  risolva  $\partial_t u = \nu \Delta u$ .

### Esercizio 6.12 \* Scaling parabolico per l'equazione del calore

Sia  $u(\mathbf{x}, t)$  soluzione di  $\partial_t u = \nu \Delta u$ . Per quali  $\alpha$  e  $\beta$  parametri positivi la funzione  $u(\alpha \mathbf{x}, \beta t)$  è soluzione della stessa equazione?

Risolvere lo stesso problema per l'equazione delle onde, e discutere la differenza tra le due risposte.