5 L'equazione delle onde in serie e trasformata di Fourier

Esercizio 5.1

Risolvi in serie di Fourier l'equazione delle onde con velocità c, in $[-\pi, \pi]$ con condizioni periodiche al bordo, per il dato iniziale $u_0(x) = \mathcal{X}\{x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]\}$, e $\dot{u}_0(x) \equiv 0$, con $a \in (-\pi, \pi)$ e $\varepsilon < \pi$.

Esercizio 5.2

Risolvi in serie di Fourier l'equazione delle onde con velocità c, in $[-\pi, \pi]$ con condizioni periodiche al bordo, per il dato iniziale $\dot{u}_0(x) = \mathcal{X}\{x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]\}$, e $u_0(x) \equiv 0$, con $a \in (-\pi, \pi)$ e $\varepsilon < \pi$.

Esercizio 5.3

Risolvi in serie di Fourier l'equazione delle onde con velocità c, in $[0, \pi]$ con condizioni nulle al bordo, per il dato iniziale $u_0(x) = \mathcal{X}\{x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]\}$, e $\dot{u}_0(x) \equiv 0$, con $a \in (0, \pi)$ e ε sufficientemente piccolo per dare senso al dato inziale.

Esercizio 5.4

Risolvi in serie di Fourier l'equazione delle onde con velocità c, in $[0, \pi]$ con condizioni nulle al bordo, per il dato iniziale $\dot{u}_0(x) = \mathcal{X}\{x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]\}$, e $u_0(x) \equiv 0$, con $a \in (0, \pi)$ e ε sufficientemente piccolo per dare senso al dato inziale.

Esercizio 5.5

Risolvi in serie di Fourier l'equazione delle onde con velocità c, in $[0, \pi]$ con condizioni di Neumann omogenee al bordo, per il dato iniziale $u_0(x) = \mathcal{X}\{x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]\}$, e $\dot{u}_0(x) \equiv 0$, con $a \in (0, \pi)$ e ε sufficientemente piccolo per dare senso al dato inziale.

Esercizio 5.6

Risolvi in serie di Fourier l'equazione delle onde con velocità c, in $[0, \pi]$ con condizioni Neumann omogenee al bordo, per il dato iniziale $\dot{u}_0(x) = \mathcal{X}\{x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]\}$, e $u_0(x) \equiv 0$, con $a \in (0, \pi)$ e ε sufficientemente piccolo per dare senso al dato inziale.

Esercizio 5.7

Risolvi in serie di Fourier l'equazione delle onde con velocità c, in $[0, \pi]$ con condizioni $u(0) = 0$ e $u'(\pi) = 0$ per il dato iniziale $u_0(x) = \mathcal{X}\{x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]\}$, e $\dot{u}_0(x) \equiv 0$, con $a \in (0, \pi)$ e ε sufficientemente piccolo per dare senso al dato inziale.

Esercizio 5.8

Risolvi in serie di Fourier l'equazione delle onde con velocità c, in $[0, \pi]$ con condizioni $u(0) = 0$ e $u'(\pi) = 0$ per il dato iniziale $\dot{u}_0(x) = \mathcal{X}\{x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]\}$, e $u_0(x) \equiv 0$, con $a \in (0, \pi)$ e ε sufficientemente piccolo per dare senso al dato inziale.

Esercizio 5.9

Risolvi in serie di Fourier l'equazione delle onde con velocità c, in $[0, \ell]$ con condizioni nulle al bordo, per il dato iniziale

$$u_0(x) = \begin{cases} bx/a & \text{se } x \in [0, a] \\ b(\ell - x)/(\ell - a) & \text{se } x \in [a, \ell] \end{cases}$$

con $a \in (0, \ell)$ e $u_0(x) \equiv 0$.

Esercizio 5.10

Considera in tutto $\mathbb{R}$ l'equazione di Eulero-Lagrange che hai determinato nell'esercizio 2.14. Trova la relazione di dispersione.

Esercizio 5.11

Considera in tutto $\mathbb{R}$ l'equazione di Eulero-Lagrange che hai determinato nell'esercizio 2.15. Trova la relazione di dispersione. INFATTIBILE, TESTO ERRATO EQUAZIONE LINEARIZZATA NULLA

Esercizio 5.12

Considera in tutto $\mathbb{R}$ l'equazione di Eulero-Lagrange che hai determinato nell'esercizio 2.16. Trova la relazione di dispersione del linerarizzato intorno a una costante.

Esercizio 5.13 Onda illimitata con attrito viscoso

Risolvi con la trasformata di Fourier l'equazione delle onde con velocità c e attrito viscoso $-2\beta\,\partial_t u$.

Esercizio 5.14 L'equazione di Eulero-Bernoulli con attrito viscoso

Risolvi con la trasformata di Fourier l'equazione di Eulero Bernoulli con attrito viscoso:

$$\partial_t^2 u = -\,\partial_x^4 u - 2\beta\,\partial_t u$$

Esercizio 5.15 Onda illimitata con attrito interno

Risolvi con la trasformata di Fourier l'equazione delle onde con velocità c e attrito interno

$$\partial_t^2 u = c^2\,\partial_x^2 u + 2\beta\,\partial_t\,\partial_x^2 u$$

Mostra che se inizialmente l'energia meccanica totale

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left((\partial_t u)^2 + c^2(\partial_x u)^2\right)$$

è limitata, allora nel tempo decresce.

Esercizio 5.16

Considera in tutto $\mathbb{R}$ l'equazione

$$\partial_t^2 u = \partial_x\left((1+u^2)\,\partial_x u\right) + u - u^3$$

Determina i profili di equilibrio, cioè le constanti $\bar{u}$ tali che $u(x,t) = \bar{u}$ risolve l'equazione.
Scrivi le equazioni delle piccole oscillazioni intorno alle posizioni di equilibrio, e determina la corrispondente relazione di dispersione.

Esercizio 5.17 Sine-Gordon

Considera in tutto $\mathbb{R}$ l'equazione

$$\partial_t^2\phi = \partial_x^2\phi + \sin\phi$$

Determina la Lagrangiana e l'energia.
Determina i profili di equilibrio, cioè le constanti $\bar{\phi}$ tali che $\phi(x,t) = \bar{\phi}$ risolve l'equazione.
Scrivi le equazioni delle piccole oscillazioni intorno alle posizioni di equilibrio, e determina la corrispondente relazione di dispersione, discutendo i casi in cui effettivamente il moto linearizzato è un moto di propagazione ondosa.