4 Equazione delle onde in una dimensione

Esercizio 4.1

Sia $\dot{u}_0(x) = \delta(x-y)$, $u_0(x) = 0$. Determina la soluzione dell'equazione delle onde su $\mathbb{R}$ con tale dato inziale $u(x,t)$.

Esercizio 4.2

Considera l'equazione delle onde in $[0,L]$, con condizioni di Dirichlet omogenee. Sia $\dot{u}_0(x) = \delta(x-y)$, con $y \in (0,L)$ e $u_0(x) = 0$. Determina $u(x,t)$.

Esercizio 4.3

Considera l'equazione delle onde in $[0,2]$, con condizioni di Dirichlet omogenee. Sia $u_0(x) = 1 - |x-1|$, e $\dot{u}_0(x) = 0$. Determina $u(x,t)$.

Esercizio 4.4

Considera l'equazione delle onde in $\mathbb{R}$ e considera la sua soluzione debole

$$u(x,t) = \mathcal{X}\{|x-ct| < 1\}$$

Quanto vale $\partial_t u(x,t)$?

Esercizio 4.5

Considera l'equazione delle onde in $\mathbb{R}$ e la sua soluzione debole

$$u(x,t) = \mathcal{X}\{|x+2-ct| < 1\} - \mathcal{X}\{|x-2+ct| < 1\}$$

Esiste un istante di tempo in cui $u(x,t)$ è nullo? Esiste un istante di tempo in cui l'impulso è nullo?

Esercizio 4.6

Considera l'equazione delle onde in $[0,+\infty)$ con condizioni di Dirichlet omogenee in $x=0$. Determina per riflessione la soluzione per un generico dato inziale $u_0(x)$, $\dot{u}_0(x)$ con $u_0(0) = 0 = \dot{u}_0(0)$.

Esercizio 4.7

Considera l'equazione delle onde in $[0,+\infty)$ con condizioni di Neumann omogenee in $x=0$. Determina la soluzione per un generico dato inziale $u_0(x)$, $\dot{u}_0(x)$ con $u_0'(0) = 0$, prolungando il dato iniziale per parità.

Esercizio 4.8

Considera l'equazione delle onde in $[0,L]$ con condizioni di Neumann omogenee in $x=0$ e $x=L$. Mostra che si può ottenere la soluzione prolungando il dato per parità in $[-L,0]$, e poi per periodicità.

Esercizio 4.9 *

Considera l'equazione delle onde in $[0,L]$ con condizione di Dirichlet omogenea in 0 e di Neumann omogenea in $x=L$. Mostra come si possa ottenere la soluzione con gli opportuni aggiustamenti del metodo delle riflessioni.

Esercizio 4.10

Considera l'equazione delle onde in $[0, L]$, con condizioni di Neumann omogenee. Sia $\dot{u}_0(x) = \delta(x-y)$, con $y \in (0, L)$ e $u_0(x) = 0$. Determina $u(x, t)$.

Esercizio 4.11

Considera l'equazione delle onde in $[-1, 1]$, con condizioni di Neumann omogenee. Sia $u_0(x) = 2x^2 - x^4$, e $\dot{u}_0(x) = 0$. Verifica che il dato iniziale è compatibile con le condizioni al contorno. Determina $u(x, t)$.

Esercizio 4.12

Considera l'equazione delle onde in $[-1, 1]$, con condizioni di Neumann omogenee. Quale condizione va imposta su $\dot{u}_0(x)$ affinché sia compatibile con le condizioni al contorno?

Esercizio 4.13 Una piccola "patologia"

Considera l'equazione delle onde in $[-1, 1]$, con condizioni di Neumann omogenee. Sia $u_0(x) = 0$, e $\dot{u}_0(x) = 1$. Verifica che il dato iniziale è compatibile le condizioni al contorno. Determina $u(x, t)$. Calcola l'energia. È costante?

Esercizio 4.14

Considera l'equazione delle onde in $[0, L]$. con condizioni di Dirichlet omogenee. Mostra che la soluzione è limitata uniformemente in t.
Mostra che nel caso di condizioni di Neumann omogenee la soluzione è limitata uniformemente in t se e solo se

$$\int_0^L \dot{u}_0(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Esercizio 4.15 *

Sia $g(t) = (1 - \cos(t))\mathcal{X}\{t \in [0, 2\pi]\}$. Risolvi l'equazione delle onde in $[0, +\infty)$ con dato iniziale nullo e condizione al contorno di Dirichlet non omogenea $u(0, t) = g(t)$.

Esercizio 4.16 *

Sia $g(t) = (1 - \cos(t))\mathcal{X}\{t \in [0, 2\pi]\}$. Risolvi l'equazione delle onde in $[0, +\infty)$ con dato iniziale nullo e condizione al contorno di Neumann non omogenea $\partial_x u(0, t) = g(t)$.