1 Flussi di fase, equazione del trasporto ed equazioni di Liouville

Esercizio 1.1

Considera l'equazione

$$\partial_x u(x,y) + \partial_y u(x,y) = 0$$

Determina le sue soluzioni attraverso il cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} \xi = x + y \\ \eta = x - y \end{cases}$$

Esercizio 1.2 *

Con riferimento al testo dell'esercizio precedente, considera un generico cambiamento di coordinate

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = A\boldsymbol{\xi}$$

con A matrice invertibile.
Quali sono i cambiamenti che trasformano l'equazione data in $\partial_\xi u = 0$?
Per affrontare la domanda in maniera generale, mostra preliminarmente che

$$\nabla_{\boldsymbol{\xi}} = A^t \nabla_{\mathbf{x}}$$

(cioè il gradiente si trasforma con la trasposta della trasformazione, mentre vale $\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = A\,\mathrm{d}\mathbf{x}$).

Esercizio 1.3

Considera l'equazione

$$\partial_x u(x,y) + 2\,\partial_y u(x,y) = 0$$

Determina le sue soluzioni, o geometricamente o attraverso un opportuno cambiamento lineare di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

con A matrice invertibile, che trasformi l'equazione in $\partial_\xi u = 0$.

Esercizio 1.4

Determina la soluzione del problema al contorno

$$\begin{cases} \partial_x u + 2\,\partial_y u = 0 & \text{per } y > 0 \\ u(x,0) = \sin(x) \end{cases}$$

Esercizio 1.5

Determina i valori di $\ell > 0$ per cui esiste la soluzione del problema al contorno

$$\begin{cases} \partial_x u + 2\,\partial_y u = 0 & \text{per } y \in (0,\ell) \\ u(x,0) = \sin(x) \\ u(x,l) = \sin(x) \end{cases}$$

Esercizio 1.6
Determina la soluzione del problema al contorno

$$\begin{cases} \partial_x u + 2\,\partial_y u = 0 & \text{per } (x,y) \in (0,1)^2 \\ u(x,0) = x \\ u(0,y) = y^2 \end{cases}$$

Discuti la regolarità della soluzione.

Esercizio 1.7
Utilizzando l'interpretazione geometrica, determina le soluzioni dell'equazione

$$y\,\partial_x u - x\,\partial_y y = 0$$

Esercizio 1.8 *
Utilizzando l'interpretazione geometrica, determina le soluzioni dell'equazione

$$y\,\partial_x u - x^3\,\partial_y y = 0$$

Esercizio 1.9
Risolvi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + x\,\partial_x u(x,t) = 0 \\ u(x,0) = \sin(x) \end{cases}$$

Calcola $\lim_{t\to+\infty} u(x,t)$ e $\lim_{t\to+\infty} \|u(x,t)\|_\infty$.

Esercizio 1.10
Risolvi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + (x-2)\,\partial_x u(x,t) = 0 \\ u(x,0) = \sin(x) \end{cases}$$

Calcola $\lim_{t\to+\infty} u(x,t)$ e $\lim_{t\to+\infty} \|u(x,t)\|_\infty$.

Esercizio 1.11
Risolvi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + x\,\partial_x u(x,t) = x\sin(t) \\ u(x,0) = 0; \end{cases}$$

Calcola $\lim_{t\to+\infty} u(x,t)$ e $\lim_{t\to+\infty} \|u(x,t)\|_\infty$.

Esercizio 1.12
Sia $c > 0$, risolvi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + c\,\partial_x u(x,t) = b(x,t) \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

dove

$$b(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in [-2,2],\ t \in [0,1] \\ -1 & \text{per } x \in [-2,2],\ t \in [1,2] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e calcola $\lim_{t\to+\infty} \|u(x,t)\|_\infty$.

Esercizio 1.13

Risolvi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(x,y,t) + y\,\partial_x u(x,y,t) - x\,\partial_y u(x,y,t) = 0 \\ u(x,y,0) = \frac{1}{1+x^2+y^2} \end{cases}$$

Esercizio 1.14

Risolvi

$$(A)\begin{cases} \partial_t u + x\,\partial_x u = 0 \\ u(x,0) = \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

$$(B)\begin{cases} \partial_t u + \partial_x (xu) = 0 \\ u(x,0) = \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

Determina, in entrambi i casi,

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t), \quad \lim_{t\to+\infty} \|u(\cdot,t)\|_\infty, \quad \lim_{t\to+\infty} \|u(\cdot,t)\|_1, \quad \lim_{t\to+\infty} \|u(\cdot,t)\|_2$$

Esercizio 1.15

Considera l'EDO $\dfrac{d}{dt}z = \frac{2}{\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z}} = \frac{1}{\cosh z}$. Trova il flusso, e verifica esplicitamente che

$$\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$$

Risolvi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u + \frac{1}{\cosh x}\,\partial_x u = 0 \\ u(x,0) = \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

Risolvi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x (\frac{u}{\cosh x}) = 0 \\ u(x,0) = \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

Esercizio 1.16

Considera l'EDO $\dfrac{d}{dt}z = z(z-1)$ nell'intervallo $[0,1]$. Verifica che il flusso $\Phi_t(x)$ è ben definito in $[0,1]\times\mathbb{R}\to[0,1]$. Verifica esplicitamente che

$$\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$$

Risolvi in $[0,1]$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u + (x(x-1)\,\partial_x u = 0 \\ u(x,0) = x^2 \end{cases}$$

e calcola

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t), \quad \lim_{t\to+\infty} \|u(\cdot,t)\|_\infty, \quad \lim_{t\to+\infty} \|u(\cdot,t)\|_1, \quad \lim_{t\to+\infty} \|u(\cdot,t)\|_2$$

Risolvi in $[0,1]$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(x(x-1)u) = 0 \\ u(x,0) = x^2 \end{cases}$$

e calcola

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t), \quad \lim_{t\to+\infty} \|u(\cdot,t)\|_\infty, \quad \lim_{t\to+\infty} \|u(\cdot,t)\|_1, \quad \lim_{t\to+\infty} \|u(\cdot,t)\|_2$$

Esercizio 1.17 ** Fattori integranti

Considera la forma differenziale

$$a(x,y)\,\mathrm{d}x + b(x,y)\,\mathrm{d}y$$

Si chiama "fattore integrante" una funzione $\lambda(x,y)$ tale che

$$\lambda(x,y)(a(x,y)\,\mathrm{d}x + b(x,y)\,\mathrm{d}y) = \mathrm{d}\omega$$

è esatta.

a. Considera l'equazione

$$-b(x,y)\,\partial_x u(x,y) + a(x,y)\,\partial_y u(x,y) = 0$$

Mostra che se λ è un fattore integrante per $a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y$ e ω è una primitiva, allora per ogni F funzione reale di variabile reale, la funzione

$$u(x,y) = F(\omega(x,y))$$

è soluzione.

b. Ipotizza che l'equazione

$$-b(x,y)\,\partial_x u(x,y) + a(x,y)\,\partial_y u(x,y) = 0$$

abbia una soluzione non nulla. Mostra che se $\partial_x u/a = \partial_y y/b$ è una funzione definita ovunque, allora è un fattore integrante per $a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y$.

c. Mostra che l'EDO

$$\begin{cases} \dot{x} = -b(x,y) \\ \dot{y} = a(x,y) \end{cases}$$

ha $\omega(x,y)$ come integrale primo, e dunque anche qualunque $u = F(\omega)$.

d. Supponi a, b mai nulle; mostra che l'EDP

$$\partial_t u - b\,\partial_x u + a\,\partial_y u = 0$$

ha soluzioni stazionarie non banali se e solo se esiste un fattore integrante per $a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y$, e quindi se e solo se l'EDO del punto precedente ha un integrale primo globale (e non constante).

e. Risolvi $y^3\,\partial_x u - x\,\partial_y u = 0$.

f. Risolvi $x\,\partial_x u - y\,\partial_y u = 0$.

g. Mostra che l'EDO

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$$

che descrive il moto di un oscillatore armonico con attrito, ha solo integrali primi costanti.

h. Mostra che le uniche soluzioni in tutto $\mathbb{R}^2$ di

$$y\,\partial_x u - (x+y)\,\partial_y u = 0$$

sono le costanti.