II esonero di Fisica Matematica

16 gennaio 2014

compito corretto

1) Indicando con $\hat{\mathbf{x}}$ il versore di $\mathbf{x}$, considera il campo $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 2^6\hat{\mathbf{x}}/|\mathbf{x}|^9$ con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5$. Calcola la sua divergenza nei punti $\mathbf{x}$ con $|\mathbf{x}| = 2$.

(**A**) -3
(**B**) $9/16$
(**C**) $-9/16$
(**D**) -5
(**E**) $-9/8$
(**F**) $-5/8$
(**G**) **punti 1.72:** $-5/16$
(**H**) $9/8$
(**I**) $5/8$
(**J**) $-1/4$

---

2) Considera il cambimento di variabili $x = x(z) = z^{10}$, da $(0, +\infty)$ in sé. L'operatore $100\,\partial_x^2$ nella nuova variabile è:

(**A**) $z^{-19}\,\partial_z^2 - 20z^{-18}\,\partial_z$
(**B**) $z^{-20}\,\partial_z^2 - 18z^{-19}\,\partial_z$
(**C**) $z^{-20}\,\partial_z^2 - 20z^{-19}\,\partial_z$
(**D**) $z^{-18}\,\partial_z^2 - 20z^{-19}\,\partial_z$
(**E**) $z^{-18}\,\partial_z^2 - 10z^{-19}\,\partial_z$
(**F**) $z^{-20}\,\partial_z^2 - 9z^{-19}\,\partial_z$
(**G**) $z^{-19}\,\partial_z^2 - 18z^{-20}\,\partial_z$
(**H**) **punti 1.72:** $z^{-18}\,\partial_z^2 - 9z^{-19}\,\partial_z$
(**I**) $z^{-19}\,\partial_z^2 - 10z^{-18}\,\partial_z$
(**J**) $z^{-19}\,\partial_z^2 - 9z^{-18}\,\partial_z$
(**K**) $z^{-19}\,\partial_z^2 - 20z^{-20}\,\partial_z$
(**L**) $z^{-19}\,\partial_z^2 - 9z^{-20}\,\partial_z$

---

3) Considera l'equazione $\partial_t u = \partial_x^2 u - \delta(x+5) + 2\delta(x-4)$ nell'intervallo $[-10, 10]$ con condizioni di Dirichlet omogenee al bordo. La sua soluzione stazionaria in $x = 0$ vale:

(**A**) 12
(**B**) $13/2$
(**C**) $23/2$
(**D**) **punti 1.72:** $7/2$
(**E**) 2
(**F**) -2
(**G**) 8

(H) $-3/2$

---

4) Si $u(x,t)$ soluzione dell'equazione del calore $\partial_t u = \partial_x^2 u$ nella semiretta $x > 0$ con condizione di Dirichlet omogenea al bordo, di dato iniziale $u(x,0) = \delta(x-4)$. Quanto vale $u(4,1)$?

(A) $\left(\mathrm{e}^{4}+\mathrm{e}^{-4}\right)/\sqrt{4\pi}$
(B) $\left(1+\mathrm{e}^{-16}\right)/\sqrt{4\pi}$
(C) $\left(1+\mathrm{e}^{-4}\right)/\sqrt{4\pi}$
(D) $\left(\mathrm{e}^{4}-\mathrm{e}^{-4}\right)/\sqrt{4\pi}$
(E) $\left(1-\mathrm{e}^{-4}\right)/\sqrt{4\pi}$
(F) $\mathrm{e}^{-16}/\sqrt{\pi}$
(G) **punti 1.72:** $\left(1-\mathrm{e}^{-16}\right)/\sqrt{4\pi}$
(H) $\mathrm{e}^{-4}/\sqrt{\pi}$

---

5) Si $u(x,t)$ soluzione dell'equazione del calore $\partial_t u = \partial_x^2 u$ nella semiretta $x > 0$ con condizione di Neumann omogenea al bordo, di dato iniziale $u(x,0) = \delta(x-4)$. Quanto vale $u(4,1)$?

(A) $\left(\mathrm{e}^{4}+\mathrm{e}^{-4}\right)/\sqrt{4\pi}$
(B) $\mathrm{e}^{-16}/\sqrt{\pi}$
(C) **punti 1.72:** $\left(1+\mathrm{e}^{-16}\right)/\sqrt{4\pi}$
(D) $\mathrm{e}^{-4}/\sqrt{\pi}$
(E) $\left(1-\mathrm{e}^{-16}\right)/\sqrt{4\pi}$
(F) $\left(1-\mathrm{e}^{-4}\right)/\sqrt{4\pi}$
(G) $\left(1+\mathrm{e}^{-4}\right)/\sqrt{4\pi}$
(H) $\left(\mathrm{e}^{4}-\mathrm{e}^{-4}\right)/\sqrt{4\pi}$

---

6) Sia $u(x,y)$ soluzione dell'equazione di Laplace nel quadrato $[0,\pi]^2$, con condizioni al contorno miste $\partial_y u(x,0) = 0$, $u(\pi,y) = 0$, $\partial_y u(x,\pi) = 0$, $u(0,y) = \cos(7y)$. Il valore di $u(\pi - \pi/14, 0)$ è:

(A) $\left(\mathrm{e}^{13\pi/2}-\mathrm{e}^{-13\pi/2}\right)/\left(\mathrm{e}^{7\pi}-\mathrm{e}^{-7\pi}\right)$
(B) $-\left(\mathrm{e}^{\pi/2}-\mathrm{e}^{-\pi/2}\right)/\left(\mathrm{e}^{7\pi}-\mathrm{e}^{-7\pi}\right)$
(C) **punti 1.72:** $\left(\mathrm{e}^{\pi/2}-\mathrm{e}^{-\pi/2}\right)/\left(\mathrm{e}^{7\pi}-\mathrm{e}^{-7\pi}\right)$
(D) $-\left(\mathrm{e}^{13\pi/2}-\mathrm{e}^{-13\pi/2}\right)/\left(\mathrm{e}^{7\pi}-\mathrm{e}^{-7\pi}\right)$

---

7) Sia $u(x,y)$ soluzione dell'equazione di Laplace nel quadrato $[0,\pi]^2$, con condizioni al contorno di Dirichlet $u(x,0) = 0$, $u(\pi,y) = 0$, $u(x,\pi) = \sin(7x)$, $u(0,y) = 0$. Il valore di $u(\pi - \pi/14, \pi/14)$ è:

(A) $\left(\mathrm{e}^{13\pi/2}-\mathrm{e}^{-13\pi/2}\right)/\left(\mathrm{e}^{7\pi}-\mathrm{e}^{-7\pi}\right)$
(B) **punti 1.72:** $\left(\mathrm{e}^{\pi/2}-\mathrm{e}^{-\pi/2}\right)/\left(\mathrm{e}^{7\pi}-\mathrm{e}^{-7\pi}\right)$
(C) $-\left(\mathrm{e}^{\pi/2}-\mathrm{e}^{-\pi/2}\right)/\left(\mathrm{e}^{7\pi}-\mathrm{e}^{-7\pi}\right)$
(D) $-\left(\mathrm{e}^{13\pi/2}-\mathrm{e}^{-13\pi/2}\right)/\left(\mathrm{e}^{7\pi}-\mathrm{e}^{-7\pi}\right)$

Risposte:

1	2	3	4	5	6	7

Cognome																		
Nome																		

Firma: