Fisica Matematica - 24 giugno 2014

1 I parte

Esercizio 1.1

Sia $u(x,t)$ la soluzione dell'equazione $\partial_t^2 u = \partial_x^2 u$ in $[0,1]$, con condizione omogenea di Neumann in $x=0$ e omogenea di Dirichlet in $x=1$, di dato iniziale $u(x,0)=0$ e $\partial_t u(x,0) = \delta(x-0.2)$. Determina $u(x,0.9)$, aiutandoti con il grafico delle caratteristiche.

Esercizio 1.2

Sia $u(x,t) : \mathbb{R}\times[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ una funzione regolare tale che, per ogni $\phi(x,t)\in\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}\times(0,+\infty))$ a supporto compatto

$$\int_{\mathbb{R}\times[0,+\infty)} \partial_t^2\phi(x,t)u(x,t)\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}\times[0,+\infty)} \partial_x\left(\mathrm{e}^x\,\partial_x\phi(x,t)\right)u(x,t)\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}t$$

Notare che per le ipotesi, ϕ e le derivate di ϕ sono nulle al tempo 0.

Determina l'equazione differenziale soddisfatta da $u(x,t)$ (cioè passa dalla formulazione debole alla formulazione forte).

Esercizio 1.3

Considera la lagrangiana

$$L[u] = b(t)u(1,t) + \frac{1}{2}\int_0^1 \left((\partial_t u)^2 - (\partial_x u)^2\right)\mathrm{d}x$$

con $b(t)$ funzione regolare assegnata.

Determina le equazioni del moto, e la condizione al contorno in $x=1$, che si ottengono imponendo la stazionarietà dell'azione nello spazio dei moti $u(x,t)$ con $u(0,t)=0$.

2 II parte

Esercizio 2.1

Considera l'equazione del calore $\partial_t u = \partial_x^2 u$ nell'intervallo $[-\pi,\pi]$, con condizioni di Dirichlet omogenee al bordo, e di dato iniziale $u_0(x) = \delta(x+\pi/2)-\delta(x-\pi/2)$. Scrivi la soluzione in serie di Fourier, e determina il comportamento asintotico della soluzione.

Esercizio 2.2

Determina le soluzioni di equilibrio dell'equazione

$$\partial_t u = \partial_x^2 u + \delta(x+\pi/2) - \delta(x-\pi/2)$$

nell'intervallo $[-\pi,\pi]$ con condizione di Dirichlet omogenee al bordo.

Esercizio 2.3

Determina la soluzione dell'equazione $\triangle u(x,y) = 0$ in $[0,\pi]^2$, con condizione di Dirichlet omogenea in $y=0$ e $y=\pi$, e non omogena sugli altri bordi, data da $u(0,y)=u(\pi,y)=\sin y$.