Fisica Matematica - 28 aprile 2014

1 I parte

Esercizio 1.1

Sia $u(x,t)$ la soluzione dell'equazione $\partial_t^2 u = \partial_x^2 u$ in $(0,+\infty)$ con condizione di Dirichlet omogenea in $x=0$, di dato iniziale $\dot{u}_0(x) = 0$ e $u_0(x) = \mathcal{X}\{x \in (4,8)\}$. Disegna la soluzione per $t=1$ e per $t=6$.

Esercizio 1.2

Determina la soluzione dell'equazione

$$\partial_t u + x\,\partial_x u = \mathrm{e}^{-t} x$$

di dato iniziale nullo.

Esercizio 1.3

Trova le equazioni del moto per il campo $u(x,t)$ di densità di lagrangiana

$$\frac{1}{2}\left(\partial_t u^2 - \partial_x u^2\right) + \cos u$$

Mostra che $u \equiv 0$ è soluzione di equilibrio, linearizza l'equazione intorno all'equilibrio e determina la relazione di dispersione.

2 II parte

Esercizio 2.1

Considera l'equazione del calore $\partial_t u = \partial_x^2 u$ nell'intervallo $(0,1)$ con condizioni di Dirichlet omogenee al bordo e di dato iniziale $u_0(x) = 1$. Scrivi la soluzione come serie, utilizzando la soluzione fondamentale dell'equazione del calore.

Esercizio 2.2

Considera l'equazione del calore con sorgente $\partial_t u = \partial_x^2 u + 1$ nell'intervallo $(0,\pi)$ con condizioni di Dirichlet omogenee al bordo e di dato iniziale nullo. Scrivi la soluzione in serie di Fourier.
Determina il comportamento asintotico nel tempo della soluzione.

Esercizio 2.3

Poisuille (1799–1869) studiò i fluidi viscosi e determinò l'espressione della velocità del sangue in un capillare. Supponendo che il capillare sia il cilindro di base $\{(x,y)|\, x^2+y^2 \le R^2\}$, e di asse coincidente con l'asse z, e indicando con $v(x,y)$ la velocità lungo la direzione dell'asse, l'equazione che governa v è

$$\triangle v = -k$$

dove k tiene conto della viscosità e della caduta di pressione. La velocità è nulla sulle pareti del capillare. Determina l'espressione di v, cercando la soluzione tra quelle radiali.