Esonero di Fisica Matematica

12 novembre 2013

compito corretto

1) Considera il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + (-4x-16)\,\partial_x u(x,t) = 0 \\ u(x,0) = -x \end{cases}$$

Quanto vale $u(1,1)$?
(**A**) $-4e^4 - 1$
(**B**) **punti 1.2, X:** $-5e^4 + 4$
(**C**) $-e^4 - 4$
(**D**) $4e^4 - 1$
(**E**) $-5e^8 - 4e^4$
(**F**) $-e^4 + 4$
(**G**) $-5e^4 - 4$
(**H**) $-e^8 - 4e^4$
(**I**) $-4e^4 + 10$
(**J**) $-e^8 + 4e^4$
(**K**) $-5e^8 + 4e^4$
(**L**) $-3e^4 - 5$

---

2) Considera il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + (-4x-16)\,\partial_x u(x,t) = 0 \\ u(x,0) = -x \end{cases}$$

Riscrivilo in forma debole, considerando una funzione test $\phi(x,t)$ a supporto compatto in $\mathbb{R}^2$ e infinitamente derivabile, e integrando l'equazione moltiplicata per ϕ nel dominio $\mathbb{R} \times [0,+\infty)$.

(**A**) $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, \phi(-x,0) - \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, u(x,t)\, (\partial_t\phi(x,t) + (-4x-16)\,\partial_x\phi(x,t)) = 0$

(**B**) $-\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, x\phi(x,0) - \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, u(x,t)\, (\partial_t\phi(x,t) + (-4x-16)\,\partial_x\phi(x,t) - 4\phi(x,t)) = 0$

(**C**) $-\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, \phi(-x,0) - \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, u(x,t)\, (\partial_t\phi(x,t) + (-4x-16)\,\partial_x\phi(x,t)) = 0$

(**D**) **punti 1.2, X:** $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, x\phi(x,0) - \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, u(x,t)\, (\partial_t\phi(x,t) + (-4x-16)\,\partial_x\phi(x,t) - 4\phi(x,t)) = 0$

(**E**) $-\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, \phi(-x,0) - \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, u(x,t)\, (\partial_t\phi(x,t) + (-4x-16)\,\partial_x\phi(x,t) - 4\phi(x,t)) = 0$

(**F**) $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, \phi(-x,0) - \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, u(x,t)\, (\partial_t\phi(x,t) + (-4x-16)\,\partial_x\phi(x,t) - 4\phi(x,t)) = 0$

(**G**) $-\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, x\phi(x,0) - \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, u(x,t)\, (\partial_t\phi(x,t) + (-4x-16)\,\partial_x\phi(x,t)) = 0$

(**H**) $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, x\phi(x,0) - \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, u(x,t)\, (\partial_t\phi(x,t) + (-4x-16)\,\partial_x\phi(x,t)) = 0$

---

3) Considera il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \partial_x\left((-4x-16)u(x,t)\right) = 0 \\ u(x,0) = -x \end{cases}$$

Quanto vale $u(1,1)$?

(**A**) $-e^8 - 4e^4$
(**B**) $-4e^4 + 10$
(**C**) $-5e^4 + 4$
(**D**) $-5e^4 - 4$
(**E**) $-3e^4 - 5$
(**F**) **punti 1.2, X:** $-5e^8 + 4e^4$
(**G**) $-e^8 + 4e^4$
(**H**) $-e^4 - 4$
(**I**) $4e^4 - 1$
(**J**) $-4e^4 - 1$
(**K**) $-5e^8 - 4e^4$
(**L**) $-e^4 + 4$

---

4) Considera l'equazione $\partial_t^2 u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t)$ nell'intervallo $[0,16]$, con condizioni di Dirichlet omogenee al bordo, e dato iniziale $u_0(x) = -(8 - |x-8|)$ e $\dot{u}_0(x) = -16\delta(x-8)$. Quanto vale $u(12,16)$?
(**A**) 8
(**B**) -4
(**C**) 12
(**D**) -2
(**E**) -20
(**F**) -18
(**G**) **punti 1.2, X:** 4
(**H**) 14

---

5) Considera l'equazione $\partial_t^2 u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t)$ nell'intervallo $[0,16]$, con condizioni di Neumann omogenee al bordo, e dato iniziale $u_0(x) = -(8 - |x-8|)$ e $\dot{u}_0(x) = -16\delta(x-8)$. Quanto vale $u(12,16)$?
(**A**) 8
(**B**) -18
(**C**) -4
(**D**) 14
(**E**) 4
(**F**) **punti 1.2, X:** -20
(**G**) 12
(**H**) -2

---

6) Considera il funzionale

$$A[u] = \frac{9}{2}u(0)^2 - 4u(0) + \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x (\partial_x u)^2$$

definito nello spazio delle funzioni regolari che verificano la condizione $u(1) = 0$. La condizione di stazionarietà di $A[u]$ in u implica che $\partial_x^2 u(x) = 0$ per $x \in (0,1)$ e che u verifica una precisa condizione al bordo $x = 0$. Quale?
(**A**) $0 = 9u(0) - 4$
(**B**) $\partial_x u(0) = 9u^2(0)/2 - 4u(0)$
(**C**) $\partial_x u(0) = -4$
(**D**) $0 = 9u^2(0)/2 - 4u(0)$
(**E**) $u(0) = 9$
(**F**) $\partial_x u(0) = 9u(0)$
(**G**) $u(0) = 9u^2(0)/2 - 4u(0)$

(**H**) $\partial_x u(0) = -9u^2(0)/2 + 4u(0)$
(**I**) $u(0) = 0$
(**J**) $\partial_x u(0) = -4u(0)$
(**K**) $\partial_x u(0) = -9u(0)$
(**L**) $u(0) = 9u(0) - 4$
(**M**) $\partial_x u(0) = 4u(0) - 9$
(**N**) $\partial_x u(0) = +4$
(**O**) **punti 1.2, X:** $\partial_x u(0) = 9u(0) - 4$
(**P**) $\partial_x u(0) = 0$

---

7) Determina le equazioni del moto per un campo $u(x,t)$ di densità di Lagrangiana

$$\frac{1}{2}(\partial_t u)^2 - \frac{1}{2}\,(5u - 4\,\partial_x u)^2$$

NB ricorda che le equazioni del moto non sono influenzate dalle condizioni al contorno, dunque scegli quelle che preferisci.
(**A**) $\partial_t^2 u = -16\,\partial_x^2 u - 25u$
(**B**) $\partial_t^2 u = 16\,\partial_x^2 u + 25u$
(**C**) **punti 1.2, X:** $\partial_t^2 u = 16\,\partial_x^2 u - 25u$
(**D**) $\partial_t^2 u = 16\,\partial_x^2 u + 50u\,\partial_x u - 25u$
(**E**) $\partial_t^2 u = 16\,\partial_x^2 u - 20u\,\partial_x u + 25u$
(**F**) $\partial_t^2 u = 5\,\partial_x u + 4\,\partial_x^2 u$
(**G**) $\partial_t^2 u = 16\,\partial_x^2 u + 50u\,\partial_x u + 25u$
(**H**) $\partial_t^2 u = 5\,\partial_x u - 4\,\partial_x^2 u$
(**I**) $\partial_t^2 u = -5\,\partial_x u + 4\,\partial_x^2 u$
(**J**) $\partial_t^2 u = -5\,\partial_x u - 4\,\partial_x^2 u$

---

8) Determina la soluzione di $\partial_t^2 u = \partial_x^2 u$ nell'intervallo $[0,\pi]$ con condizioni di Dirichlet omogenee ai bordi, e dato iniziale $u_0(x) = 3\sin(2x)$, $\dot u_0(x) = 4\sin(5x)$.
(**A**) $u(x,t) = 3\sin(2x)\cos(2t) + 4\sin(5x)\cos(5t)$
(**B**) $u(x,t) = \frac{3}{5}\sin(2x)\sin(5t) + 2\sin(5x)\sin(2t)$
(**C**) $u(x,t) = 3\sin(2x)\cos(5t) + 4\sin(5x)\cos(2t)$
(**D**) $u(x,t) = 3\sin(2x)\cos(5t) + 2\sin(5x)\sin(2t)$
(**E**) **punti 1.2, X:** $u(x,t) = 3\sin(2x)\cos(2t) + \frac{4}{5}\sin(5x)\sin(5t)$
(**F**) $u(x,t) = \frac{3}{5}\sin(2x)\sin(5t) + 4\sin(5x)\cos(2t)$
(**G**) $u(x,t) = \frac{3}{2}\sin(2x)\sin(2t) + \frac{4}{5}\sin(5x)\sin(5t)$
(**H**) $u(x,t) = \frac{3}{2}\sin(2x)\sin(2t) + 4\sin(5x)\cos(5t)$

---

9) Considera l'equazione

$$\partial_t^2 u = 8\,\partial_x^2\left(\frac{u}{8}\right)^7 + u - 8\left(\frac{u}{8}\right)^7$$

Linearizza l'equazione intorno all'equilibrio $u(x,t) \equiv 8$ e trova la relazione di dispersione per l'equazione linearizzata cercando soluzioni del tipo $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda x - \omega t)}$.
(**A**) $\omega^2 = 8\lambda^2 + 7$
(**B**) $\omega^2 = 7\lambda^2 + 15$
(**C**) $\omega^2 = 7\lambda^2 + 7$
(**D**) $\omega^2 = 8\lambda^2 + 6$
(**E**) $\omega^2 = 8\lambda^2 + 15$
(**F**) **punti 1.2, X:** $\omega^2 = 7\lambda^2 + 6$

---

10) Considera la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq -1 \\ 4x - 2 & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

La sua derivata nel senso delle distribuzioni è
(**A**) $-4\mathcal{X}\{x > -1\} - 6\delta(x+1)$
(**B**) $4\mathcal{X}\{x > -1\} - 6\delta(x-1)$
(**C**) **punti 1.2, X:** $4\mathcal{X}\{x > -1\} - 6\delta(x+1)$
(**D**) $4\mathcal{X}\{x > -1\} + 6\delta(x+1)$
(**E**) $-4\mathcal{X}\{x > -1\} - 6\delta(x-1)$
(**F**) $-4\mathcal{X}\{x > -1\} + 6\delta(x-1)$

Risposte:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

Cognome																		
Nome																		

Firma: